

УДК 514.18

Олена КРЕМЕНЧЕНКО

elena.krem.elena@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0160-7114

Єлизавета ЗАВАЛКО

asklepi2012@gmail.com

ORCID: 0000-0003-4401-1388

Анатолій ХОМЧЕНКО

khan@chmnu.edu.ua

м. Миколаїв

КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНОГО РЯДУ СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ: ПАРИТЕТ ОБ'ЄМІВ

У статті представлено новий ряд моделей, які мають одну загальну специфічну властивість – паритет об'ємів. Завдяки комп'ютерній візуалізації аналізуються поверхні кутових вузлів, тому що саме на них навантаження від одиної масової сили є аномальним. Наведено різні інтерпретації інтегральних характеристик базисних поліномів: геометрична, фізична, ймовірнісна. Наявність нестандартних базисів відкриває необмежені можливості для створення модельного ряду скінченних елементів з наперед заданими інтегральними характеристиками.

Ключові слова: ізопараметричні апроксимації, модельний ряд, скінченний елемент серендипового сімейства, геометричний підхід, паритет об'ємів, нестандартні базисні функції, «приховані» параметри.

Серендипові скінченні елементи (ССЕ), в порівнянні з лагранжевими, спрощують та прискорюють процес обчислень і тим самим дозволяють ефективніше використовувати методи обчислювальної математики. Проте ці елементи ще недостатньо вивчені, тому дослідження їх властивостей є актуальним.

Сьогодні в теорії серендипових апроксимацій з'явилися нові підходи і нестандартні моделі [1], завдяки яким можна зменшити об'єм обчислень та підвищити точність. Історія ССЕ почалася з роботи Зенкевича, Ергатудіса та Айронса в 1968 р. [2]. У своїй роботі [3] Зенкевич звертає увагу на парадокс «від'ємних навантажень», але радить змиритись з фізично аномальним розподілом, адже математично локалізація навантажень виконана правильно. У 1982 р. вперше вдалося застосувати геометричний, а також ймовірнісно-геометричний підхід на ССЕ [4], що забезпечує математичну обґрунтованість і фізичну адекватність нових (альтернативних) моделей.

Розглянемо серендиповий скінченний елемент – квадрат розміром 2×2 , на границях якого рівномірно розташовано 12 вузлів (бікубічна інтерполяція).

Інтерполяційний поліном зручно записати в формі Лагранжа:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) \cdot f_i, \quad (1)$$

де $N_i(x, y)$ – базисні функції, які мають наступні властивості:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) = 1. \quad (2)$$

Матричний метод, що панує в МСЕ, передбачає складання і рішення СЛАР з матрицею 12×12 . В результаті ми отримаємо лише стандартний базис.

Функція кутової поверхні $N_1(x, y)$ стандартної моделі:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32} (1-x)(1-y)(9x^2 + 9y^2 - 10). \quad (3)$$

Комп'ютерну візуалізацію та лінії нульового рівня стандартного кутового елемента показано на рисунку 1.

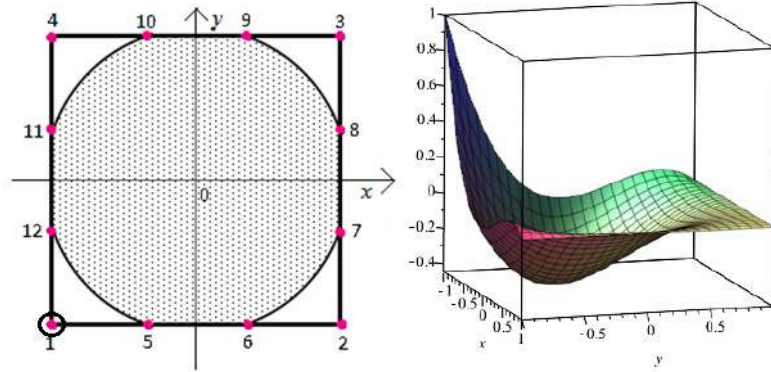


Рис. 1. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ стандартної моделі

Вузлові навантаження від одиничної масової сили визначаються за формулою інтегрального середнього:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_{\omega} N_i(x, y) dx dy, \quad (4)$$

де $N_i(x, y)$ – базисна функція відповідної моделі; ω – область інтегрування; S – площа області ω .

Навантаження на кутові вузли стандартного елемента серендипової сім'ї згідно з формулою (4):

$$\gamma_i = -\frac{1}{8}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

Формула (4) є теоремою про середнє значення в інтегральному обчисленні, тобто γ_i – середня апліката, а це означає, що сумарний об'єм, який обмежується проміжними поверхнями є надлишковим, зменшити його можна за допомогою балансування.

Множина нестандартних базисів утворюється за допомогою зваженого усереднення:

$$\bar{N}_1(x, y) = \alpha \cdot N_i^{st}(x, y) + (1 - \alpha) \cdot N_i^{alt}(x, y). \quad (5)$$

Проінтегрувавши формулу (5) отримаємо,

$$\bar{\gamma}_1(x, y) = \alpha \cdot \gamma_i^{st} + (1 - \alpha) \cdot \gamma_i^{alt}. \quad (6)$$

Задаючи номер вузла та навантаження на нього, можна створювати новий базис з наперед заданими характеристиками, маючи лише стандартний та будь-який альтернативний.

На рисунках 2–10 представлено лінії нульового рівня та комп'ютерну візуалізацію модельного ряду нестандартних моделей, наведено формули відповідно. Візуалізацію представлено в масштабованому вигляді.

$$N_1(x, y) = \frac{1}{256} (1-x)(1-y)(-8 - 9(x+y+x^2+y^2+10xy+9x^2y+9xy^2)). \quad (7)$$

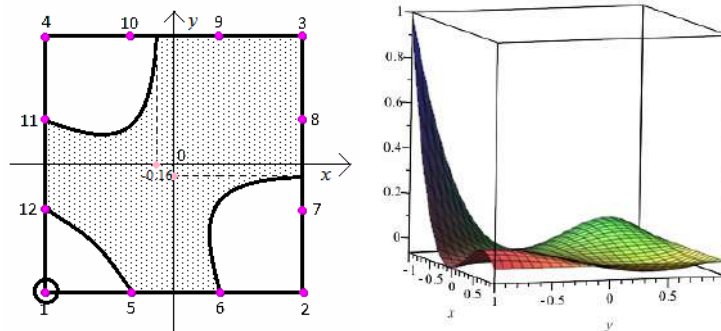


Рис 2. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі А

$$N_1(x, y) = \frac{1}{256}(1-x)(1-y)(-8+9(x+y+x^2+y^2-2xy-3x^2y-3xy^2+4x^2y^2)). \quad (8)$$

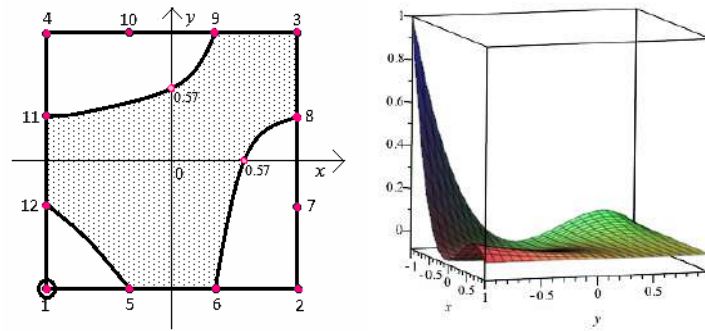


Рис. 3. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі В

$$N_1(x, y) = \frac{1}{128}(1-x)(1-y)(-4-9(x+y+x^2+y^2+4xy+3x^2y+3xy^2-2x^2y^2)). \quad (9)$$

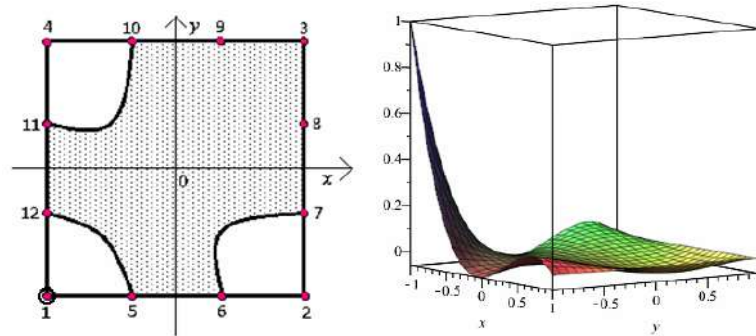


Рис. 4. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі С

$$N_1(x, y) = \frac{1}{128}(1-x)(1-y)(1+3x)(1-3y)(-4-6x-3y-9xy). \quad (10)$$

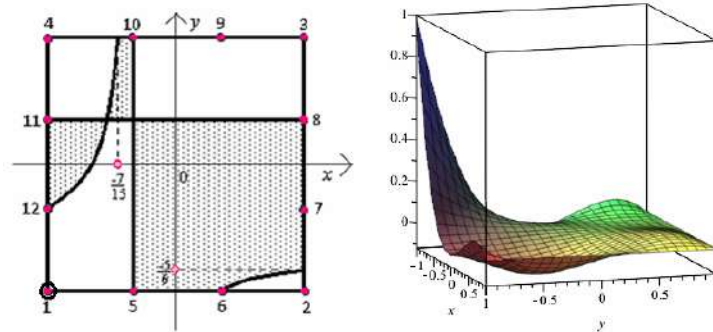


Рис. 5. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі D

$$N_1(x, y) = \frac{1}{128}(1-x)(1-y)(1-3x)(1+3y)(-4-3x-6y-9xy). \quad (11)$$

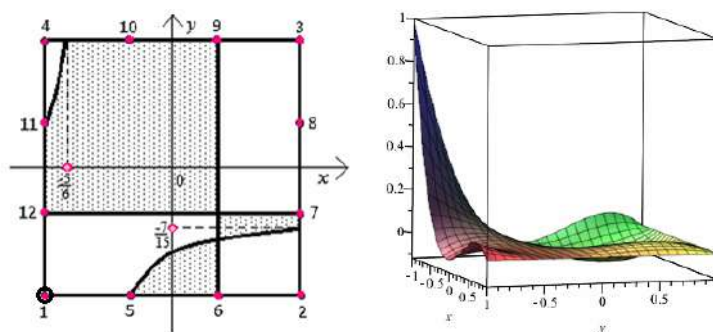


Рис. 6. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі E

$$N_1(x, y) = \frac{1}{64}(1-x)(1-y)(-2+9(x^2-y^2+x+y-x^2y-xy^2)). \quad (12)$$

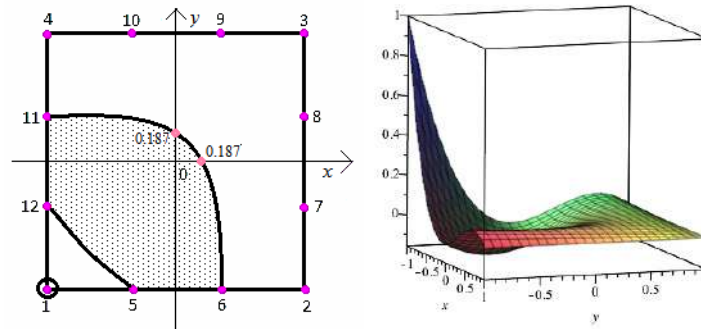


Рис. 7. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі F

$$N_1(x, y) = \frac{1}{256}(1-x)(1-y)(-8-9(x^2+y^2+x+y-9x^2y-9xy^2-8xy-18x^2y^2)). \quad (13)$$

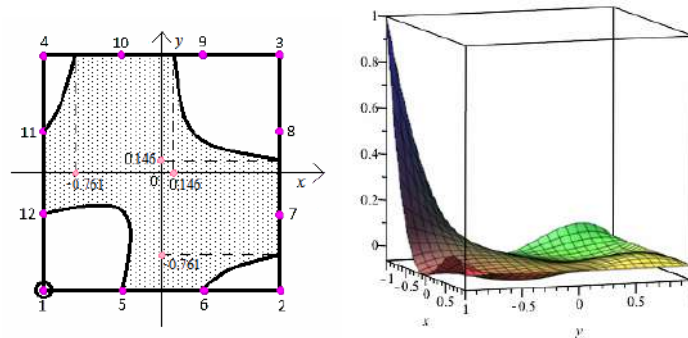


Рис. 8. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі G

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2+xy+y^2+x+y)-1). \quad (14)$$

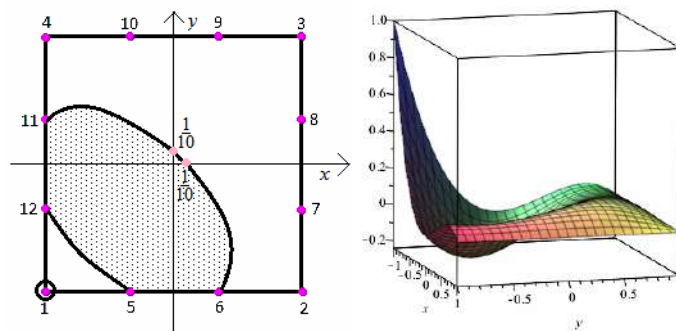


Рис. 9. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі H

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(3xy-1)(3xy+1). \quad (15)$$

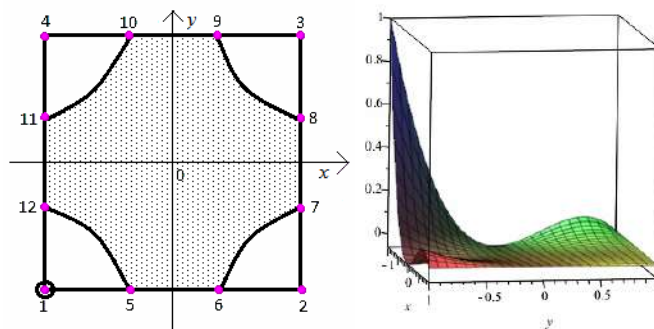


Рис. 10. Лінії нульового рівня та візуалізація кутової поверхні $N_1(x, y)$ моделі I

Зауважимо, що модельний ряд елементів з паритетом об'ємів побудовано вперше.

Скориставшись формулою (4) для всіх моделей цього ряду, отримаємо $\gamma_i = 0$, де $i = 1, 2, 3, 4$.

З ймовірнісної точки зору маємо функцію випадкового вектору з нульовим математичним сподіванням, а з фізичної – кутові вузли не приймають участі у розподілі навантажень від одиничної масової сили.

З геометричної точки зору це означає, що об'єм над і під лінією нульового рівня однаковий. Інакше кажучи, маємо паритет об'ємів–специфічну властивість.

Таким чином, наявність нестандартних базисів ізопараметричних апроксимацій відкриває необмежені можливості для створення модельного ряду СЕ з наперед заданими інтегральними характеристиками.

Список використаних джерел

1. Хомченко А. Н. Стереометрія ізопараметричних апроксимацій: нестандартні базиси / А. Н. Хомченко, О. С. Кременченко, Є. А. Завалко // Геометричне моделювання та інформаційні технології. — № 2. — Миколаїв : МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2016. — С. 106—110.
2. Ergatoudis I. Curved isoperimetric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. S. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct.— 1968. — 4. — P. 31—42.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
4. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковск, 1982. — 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.

Елена КРЕМЕНЧЕНКО, Елизавета ЗАВАЛКО, Анатолий ХОМЧЕНКО

г. Николаев

КОГНИТИВНО-ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЬНОГО РЯДА СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ: ПАРИТЕТ ОБЪЕМОВ

В статье представлен новый ряд моделей, которые имеют одно общее специфическое свойство - паритет объемов. Благодаря компьютерной визуализации анализируются поверхности угловых узлов, так как именно на них нагрузки от единичной массовой силы являются аномальными. Приведены различные интерпретации интегральных характеристик базисных полиномов: геометрическая, физическая, вероятностная. Наличие нестандартных базисов открывает неограниченные возможности для создания модельного ряда конечных элементов с наперед заданными интегральными характеристиками.

Ключевые слова: изопараметрические аппроксимации, модельный ряд, конечный элемент серендипового семейства, геометрический подход, паритет объемов, нестандартные базисные функции, «скрытые» параметры.

Elena KREMENCHENKO, Elizaveta ZAVALKO, Anatoly KHOMCHENKO

Mykolaiv

COGNITIVE-GRAPHIC ANALYSIS OF SERENDIPITY ELEMENTS: PARITY OF VOLUMES

The article presents a new lineup with a common specific feature - parity of volumes. With computer imaging analyses of the surface of the corner nodes, because their load from a single mass force is abnormal. Different interpretations of integral characteristics of basic polynomials: geometrical, physical, probabilistic are shown. Availability of non-standard basis offers unlimited abilities for creating a lineup of finite elements with predetermined integral characteristics.

Key words: isoparametric approximation, lineup, the finite element of serendipity family, geometric approach, parity of volumes, non-standard basis functions, "hidden" parameters.

Стаття надійшла до редколегії 01.04.2017