УДК 514.8
Віталій ЧЕРНЯК
cvi71@ukr.net
м. Кременець

ПОБУДОВА ПОВЕРХОНЬ РІВНЯ ДИСКРЕТНИХ НЕВПОРЯДКОВАНИХ СКАЛЯРНИХ ПОЛІВ

Робота присвячена розробленню способу побудови неоднозначних поверхонь рівня скалярних невпорядкованих дискретних полів в просторах довільної вимірності. Наявні способи дозволяють будувати поверхні рівня тільки у вигляді контурних ліній (графіків) в двовимірному або тривимірному просторі для скалярних полів, заданих на прямокутній сітці. Розроблений метод дозволяє для дискретного невпорядкованого скалярного поля в просторі довільної вимірності побудувати неоднозначну поверхню рівня у вигляді дискретно представленого геометричного об'єкта (кривої, поверхні, гіперповерхні).
Ключові слова: поверхня рівня, скалярне поле, тріангуляція Делоне.

Згідно [1] контурні графіки, як правило, представляють собою деякий набір ліній на площині. Кожна з ліній є горизонтальною проекцією фігури перетину заданої поверхні з горизонтальною площиною рівня, тобто ці контурні графіки є поверхнями рівня скалярного поля в двовимірному просторі. Наявні засоби побудови ліній рівня в різних математичних пакетах (Matchad, Matlab) дозволяють будувати контурні графіки тільки у вигляді плоских кривих в дво- чи тривимірному просторі при задаванні скалярного поля на прямокутній сітці, тобто на впорядкованій множині точок (рис. 1, 2).

Метою даної роботи є розроблення способу побудови поверхонь рівня дискретних невпорядкованих скалярних полів в просторах довільної вимірності.

Нехай задано скалярне поле $\boldsymbol{u}$ на невпорядкованій множині точок. Алгоритм побудови поверхні рівня $\boldsymbol{u_C} = C$ в двовимірному просторі буде складатися з таких дій.

1. Будуємо тріангуляцію Делоне для даної множини точок за допомогою оператора **delaunay** [1]. Упорядковану точкову множину розглядаємо з позицій теорії графів як планарний геометричний граф, який складається з вершин, ребер і трикутників.

2. Відкидаємо трикутники, які не пересікають площину u_C. Перевірка трикутника на перетин його площиною $\boldsymbol{u_C}$ базується на визначенні того, чи знаходяться вершини трикутника з одної сторони площини $\boldsymbol{u_C}$, чи з різних. Для цього визначається знак різниці

$$q_1 = sign(u_1, \tag{1}$$

де ***sign*** – функція знаходження знака числа; $\boldsymbol{u_1}$ – значення скалярного поля у вершини *1* трикутника.

Якщо всі вершини трикутника знаходяться з одної сторони площини $\boldsymbol{u_C}$ (тобто різниці значень скалярного поля кожної вершини трикутника відносно значення поля рівня $\boldsymbol{u_C}$ мають один і той самий знак), то такий трикутник відкидається.

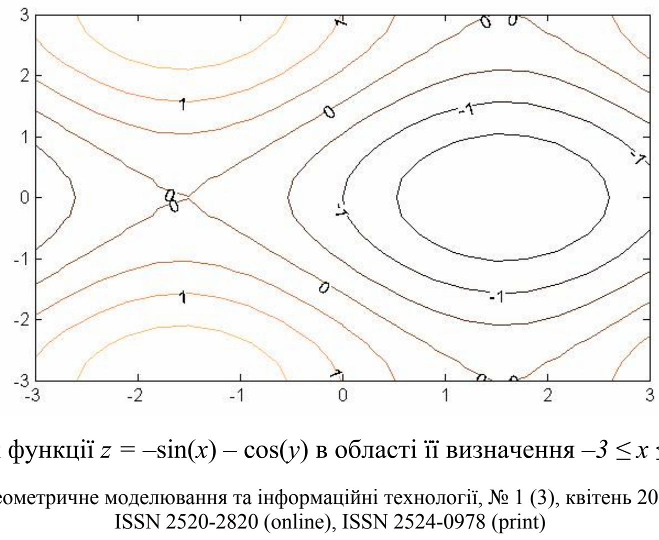

Рис. 1. Контурний графік функції $z = -\sin(x) - \cos(y)$ в області її визначення $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ на площині

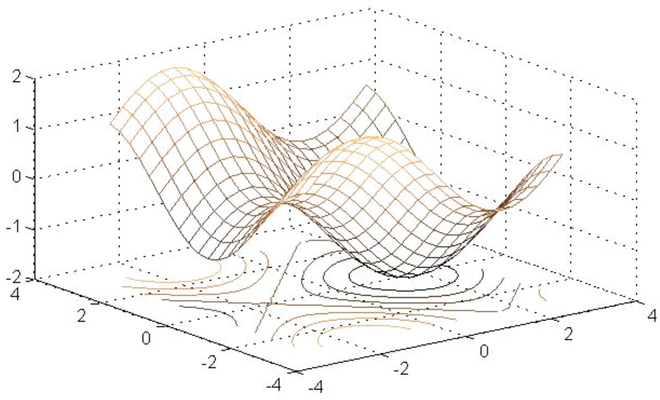

Рис. 2. Поверхня та контурний графік функції $z = -\sin(x) - \cos(y)$
в області її визначення $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$ в тривимірному просторі

3. Для кожного трикутника множини визначаємо координати точок відрізка його перетину площиною рівня $\boldsymbol{u_C}$ (рис. 3).

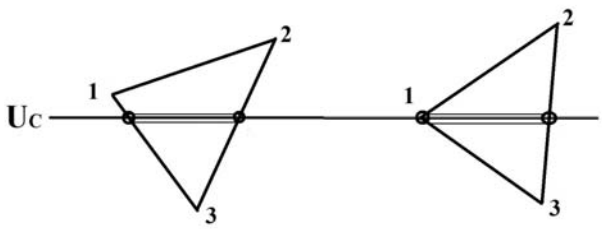

Рис. 3 Визначення відрізка перетину трикутника площиною

У результаті застосування даного алгоритму буде отриману невпорядковану множину координат вершин відрізків. З'єднавши між собою суміжні відрізки, отримаємо впорядковану лінію рівня у вигляді дискретно представленої кривої. На рис. 4–5 показано тріангульовані поверхні та їх дискретно представлені лінії рівня.

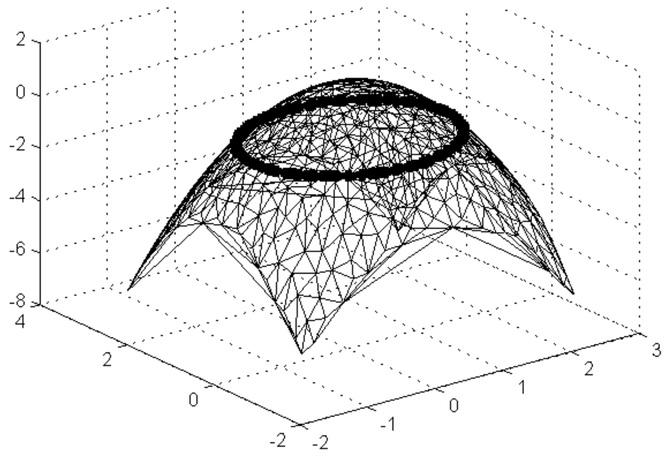

Рис. 4. Лінія рівня $u_C = 0$ на поверхні $u = -x^2 - y^2 + 2$

Алгоритм побудови поверхні рівня $\boldsymbol{u_C} = C$ скалярного невпорядкованого поля $\boldsymbol{u}$ в тривимірному просторі складається з таких дій.

1. Розбиваємо множину точок на тетраедри, тобто впорядковуємо скалярне поле.

Геометричне моделювання та інформаційні технології, № 1 (3), квітень 2017
ISSN 2520-2820 (online), ISSN 2524-0978 (print)

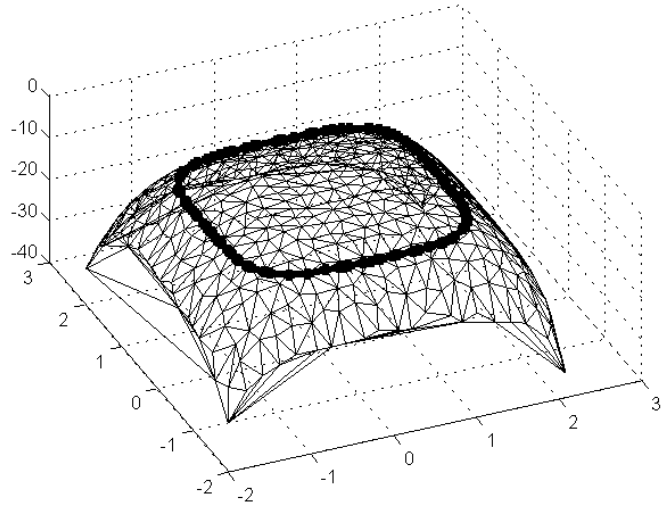

Рис. 5. Лінія рівня $u_C = -4$ на поверхні $u = -x^4 - y^4$

2. Відкидаємо тетраедри, які не пересікають площину $\boldsymbol{u_C}$ – якщо всі вершини тетраедра знаходяться з одної сторони площини рівня $\boldsymbol{u_C}$, то такий тетраедр відкидається.

3. Для кожного тетраедра множини визначаємо вершини фігури перерізу (трикутник або чотирикутник, чотирикутник розбивається на два трикутники) його площиною рівня $\boldsymbol{u_C}$. Отримана множина фігур і буде дискретно представленою поверхнею рівня (рис. 6–8).

Побудова гіперповерхні рівня для скалярного поля $\boldsymbol{u = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)}$ в багатовимірному просторі буде аналогічним алгоритму для тривимірного простору.

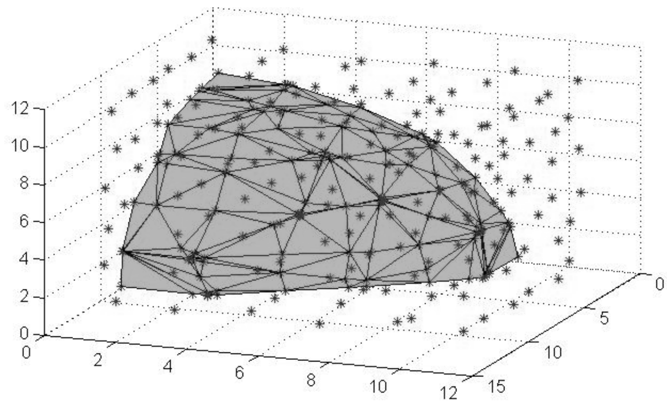

Рис. 6. Фрагмент поверхні рівня $u_C = 18$ на полі $U = \sqrt{20^2 - x^2 - y^2 - z^2}$

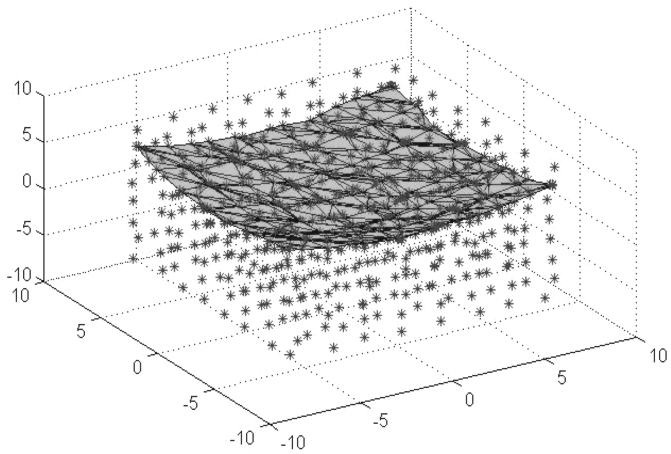

Рис. 7. Поверхня рівня $u_C = 0{,}5$ на полі $U = \dfrac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

при її області визначення $-8 \le x \le 8$, $-8 \le y \le 8$, $-8 \le z \le 8$

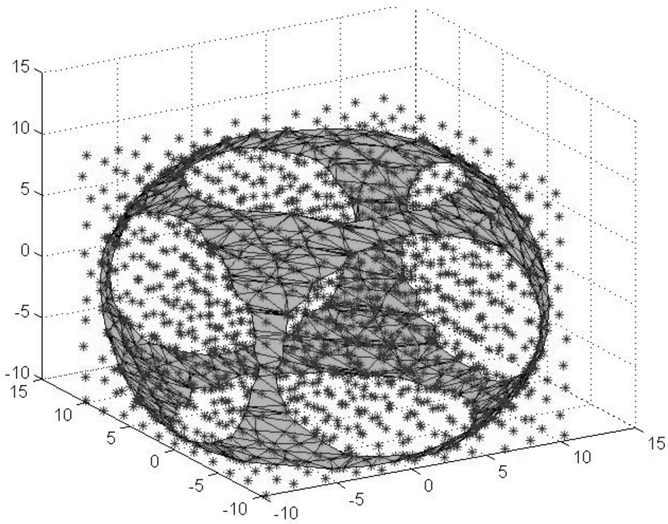

Рис. 8. Поверхня рівня $u_C = 15$ на полі $U = \sqrt{20^2 - x^2 - y^2 - z^2}$
при її області визначення $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$, $-10 \le z \le 10$

Розроблений алгоритм дозволяє побудувати неоднозначні поверхні рівня для дискретно представлених скалярних невпорядкованих полів в просторах довільної вимірності. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмів визначення параметрів та характеристик дискретних невпорядкованих векторних полів.

Список використаних джерел

1. В. Дьяконов MATLAB 6 : учебный курс / В. Дьяконов. — СПб. : Питер, 2001. — 592 с.

Vitalii CHERNIAK
Kremenets'

THE CONSTRUCTION OF SURFACE ON THE LEVEL OF DISCRETE DISORDERED SCALAR FIELDS

Activity is dedicated to development of methods of constructing ambiguous surfaces of disordered discrete scalar fields in spaces of arbitrary dimension. The existing methods make it possible to build a surface level only in the form of contour lines (graphs) in two-dimensional or three-dimensional space for scalar fields defined on a rectangular grid. The designed method allows to build a mixed surface level presented as discrete geometry (curves, surfaces, hypersurface) for discrete disordered scalar field in an arbitrary dimension space.
Keywords: surface level, scalar field, Delaunay triangulation.

Виталий ЧЕРНЯК
г. Кременец

ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ ДИСКРЕТНЫХ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Работа посвящена разработке способа построения неоднозначных поверхностей уровня скалярных неупорядоченных дискретных полей в пространствах произвольной размерности. Имеющиеся способы позволяют строить поверхности уровня только в виде контурных линий (графиков) в двумерном или трехмерном пространстве для скалярных полей, заданных на прямоугольной сетке. Разработанный метод позволяет для дискретного неупорядоченного скалярного поля в пространстве произвольной размерности построить неоднозначную поверхность уровня в виде дискретно представленного геометрического объекта (кривой, поверхности, гиперповерхности).
Ключевые слова: поверхность уровня, скалярное поле, триангуляция Делоне.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.2017