

УДК 514.18

Леонід КУЦЕНКО

leokuts@i.ua

ORCID: 0000-0003-1554-8848

Сергій ШЕВЧЕНКО

life0633414380@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1574-1949

м. Харків

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО БІЛЬЯРДУ У ПОЛІ ТЯЖІННЯ МІЖ ДВОМА ПІВПЛОЩИНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ВІДОБРАЖЕННЯ ПУАНКАРЕ

Наведено спосіб визначення траєкторії математичного більярду у полі тяжіння усередині кута, утвореного двома півплощинами. Знайдені їх залежності від кута «розкриття» півплощин, від координат точки старту більярдної кулі, та від її початкової швидкості. Розглянуто питання аналізу руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре з метою дослідження динаміки гравітаційного більярду у межах кута, утвореного двома півплощинами.

Ключові слова: математичний більярд, поле тяжіння, траєкторія більярду, унаочнення траєкторії, відображення Пуанкаре, динаміка більярду.

Постановка проблеми

Трасування математичних більярдів у фізичних силових полях (центральному й гравітаційному) традиційно пов'язують з дослідженням динамічних систем. Більярдну кулю тут розглядають як абстрактну матеріальну точку, відбиття якої від прямолінійного пружного борта здійснюється за законом Декарта-Снеліуса (кут падіння дорівнює куту відбиття). У загальному випадку усередині опуклої області Q із границею G можна вказати сім'ю кривих $\{G_c\}$, що мають таку властивість: якщо початкова ланка якої-небудь траєкторії дотикається однієї із кривих G_c , то й всі інші ланки цієї траєкторії дотикаються тієї ж кривої. Криві з такими властивостями називають більярдними каустиками в області Q , і їх дослідження є актуальним для різноманітних впроваджень математичних більярдів.

Актуальною задачею є складання алгоритмів побудови траєкторій математичних більярдів для конкретно обраних областей з метою виявлення більярдних каустик. Для дослідження динаміки гравітацій-

ного більярду у межах певної області, доцільним буде розробка способу унаочнення руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Теорема Анрі Пуанкаре формулюється так: «Майже будь-яка неперіодична траєкторія, що дотикається каустик G_c , усюди щільно заповнює область між бортом більярду G і цією каустикою G_c ». Траєкторії руху більярдної кулі для звичайного стола добре вивчені [1, 2], для їх побудови існують евристичні прийоми, наприклад, метод дзеркальних відображень. Але завдання побудови траєкторій кулі значно ускладнюється, якщо рух кулі розглядати в деякому силовому полі (наприклад, у гравітаційному полі сили ваги), напрямком якого паралельно поверхні стола. Томі є доцільним доповнити відомі дослідження [2-7] по удосконаленню алгоритмів побудови математичних більярдів у гравітаційному полі. При цьому особливу увагу слід приділити унаочненню більярдних каустик.

Постановка завдання

Розробити математичне забезпечення алгоритму побудови траєкторії руху бильярдної кулі у полі сили ваги за умови її відбиття від двох прямолінійних бортів у вигляді кута. Навести спосіб унаочнення руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре з метою дослідження динаміки гравітаційного бильярда у межах кута, утвореного двома півплощинами.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо рух матеріальної точки одиничної маси в гравітаційному потенційному силовому полі між двома пружними півплощинами, що утворюють із вертикаллю кути ϑ_1 і ϑ_2 (рис. 1).

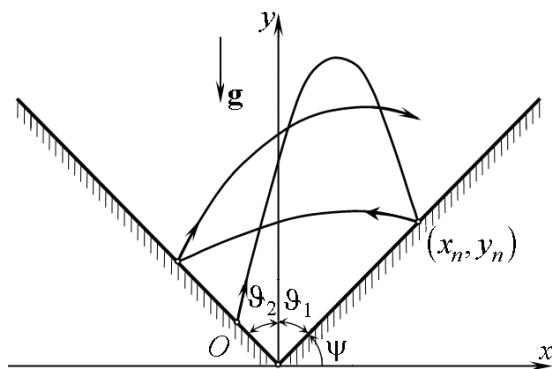


Рис. 1. Рух точки у вертикальному полі сили тяжіння

Взаємодія точки з півплощинами здійснюється за законом абсолютного пружного удару. Розглянемо двовимірний рух у площині малюнка. Положення точки визначається декартовими координатами x, y . Траєкторіями точки між відскоками будуть гілки парабол. У параметричній формі після n -го зіткнення рівняння траєкторії матиме вигляд

$$\left. \begin{aligned} x &= x_n + u_n t \\ y &= y_n + v_n t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де x_n, y_n – координати точки в момент n -го зіткнення; $u_n = \dot{x}_n, v_n = \dot{y}_n$ – проекції швидкості точки на осі x, y після n -го зітк-

нення; g – прискорення вільного падіння ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Розглянемо спочатку рух точки при відсутності перескоку на іншу півплощину. Вважатимемо для визначеності, що точка після відскоку від правої півплощини попадає на праву ж півплощину, рівняння якої

$$y = k_1 x, \quad (2)$$

де $k_1 = \text{ctg } \vartheta_1$ – тангенс кута нахилу прямої.

Якщо через час t_n точка попадає на ту ж півплощину, то з врахуванням (1) і (2)

$$\text{маємо } y_n + v_n t_n - \frac{gt_n^2}{2} = k_1 (x_n + u_n t_n).$$

З останнього виразу одержимо

$$v_n t_n - \frac{gt_n^2}{2} = k_1 u_n t_n, \text{ звідки} \quad t_n = \frac{2(v_n - k_1 u_n)}{g}. \quad (3)$$

Підставляючи час t_n у рівняння траєкторії (1), одержимо координати наступної точки зіткнення (x_{n+1}, y_{n+1}) :

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + u_n t_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n t_n - \frac{gt_n^2}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Обчислюємо проекції швидкості точки в момент нового зіткнення:

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1}^- &= u_n \\ v_{n+1}^- &= v_n - gt_n \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Позначимо вектор швидкості точки в цей момент так:

$$\mathbf{V}_{n+1}^- = [u_{n+1}^- \quad v_{n+1}^-]^T = [u_n \quad v_n - gt_n]^T,$$

де t – знак транспонування.

Для знаходження швидкості точки після відбиття \mathbf{V}_{n+1} скористаємося [8-10] допоміжною схемою (рис. 2), на якій кути падіння й відбиття позначені γ_{n+1} .

Як відомо вектор, нормальний до кривої

$$F(x, y) = 0 \quad (6)$$

визначається за формулою

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} F'_x & F'_y \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

а одиничний вектор нормалі – за формулою

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}. \quad (8)$$

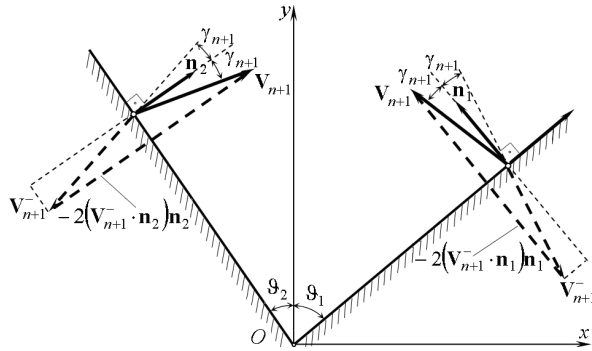


Рис. 2. Схема для визначення швидкості точки при відбитті

У розглянутому випадку для правої півплощини (2)

$$F(x, y) = y - k_1 x = 0, \quad (9)$$

тому одиничний вектор нормалі матиме координати

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2}} \end{bmatrix}^T. \quad (10)$$

Наявність одиничного вектора дає можливість записати вираз для обчислення швидкості точки після відбиття (рис. 2)

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_{n+1}^- - 2(\mathbf{V}_{n+1}^- \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 = \frac{1}{1+k_1^2} \times \begin{bmatrix} (1-k_1^2)u_n + 2k_1(v_n - gt_n) \\ k_1^2(v_n - gt_n) - v_n + gt_n + 2k_1u_n \end{bmatrix}. \quad (11)$$

У цій формулі $(\mathbf{V}_{n+1}^- \cdot \mathbf{n}_1)$ означає скалярний добуток векторів.

Проекції швидкості точки після відбиття слід обчислювати за формулами

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(1-k_1^2)u_n + 2k_1(v_n - gt_n)}{1+k_1^2} \\ v_{n+1} &= \frac{k_1^2(v_n - gt_n) - v_n + gt_n + 2k_1u_n}{1+k_1^2} \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Отже, формули (4) і (12) дають можливість аналізувати рух точки на правій

півплощині. Умову відсутності перескоку (на іншу півплощину) зручно записати, використовуючи енергетичні залежності, адже для моделі має місце закон збереження енергії:

$$E = T + \Pi = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} + gy_n = \text{const}, \quad (13)$$

де E , T , Π – повна, кінетична й потенційна енергія точки.

Отже, перескок на іншу півплощину відсутній, якщо кінетична енергія в момент зіткнення менша, або дорівнює повній енергії

$$\frac{(u_{n+1}^-)^2 + (v_{n+1}^-)^2}{2} \leq E, \quad (14)$$

причому рівність відповідає влученню точки в кут $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$.

Далі розглянемо рух точки при наявності перескоку на іншу півплощину. Вважатимемо для визначеності, що точка після відскоку від правої півплощини попадає на ліву півплощину, рівняння якої

$$y = k_2 x, \quad (15)$$

де $k_2 = -\text{ctg } \theta_2$ – тангенс кута нахилу прямої.

Якщо час руху до зіткнення t_n , то з врахуванням формул (1), (2) та (15) маємо

$$\begin{aligned} y_n + v_n t_n - \frac{gt_n^2}{2} &= k_2 (x_n + u_n t_n) \text{ або} \\ v_n t_n - \frac{gt_n^2}{2} &= k_2 u_n t_n + (k_2 - k_1) u_n, \end{aligned}$$

звідки одержуємо квадратне рівняння для знаходження t_n

$$t_n^2 + \frac{2(k_2 u_n - v_n)}{g} t_n + \frac{2(k_2 - k_1) x_n}{g} = 0. \quad (16)$$

Додатний корінь цього рівняння визначає шуканий час

$$t_n = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad (17)$$

$$\text{де } p = \frac{(k_2 u_n - v_n)}{g}, \quad q = \frac{2(k_2 - k_1) x_n}{g}.$$

Координати точки зіткнення (x_{n+1}, y_{n+1}) і проекції швидкості (u_{n+1}^-, v_{n+1}^-) для часу t_n визначаються за формулами (4) і (5).

Для знаходження швидкості точки після відбиття \mathbf{V}_{n+1} знову скористаємося допоміжною схемою рис. 2. Для лівої півплощини (15) маємо рівняння

$$F(x, y) = y - k_2 x = 0, \quad (18)$$

З урахуванням формул (6)-(8) маємо одиничний вектор нормалі:

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{k_2}{\sqrt{1+k_2^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k_2^2}} \end{bmatrix}^T. \quad (19)$$

За аналогією з формулою (11) маємо швидкість точки після відбиття

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_{n+1}^- - 2(\mathbf{V}_{n+1}^- \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2 = \frac{1}{1+k_2^2} \times \\ \times \begin{bmatrix} (1-k_2^2)u_n + 2k_2(v_n - gt_n) \\ k_2^2(v_n - gt_n) - v_n + gt_n + 2k_2u_n \end{bmatrix}.$$

Проекції швидкості точки після відбиття слід обчислювати так:

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(1-k_2^2)u_n + 2k_2(v_n - gt_n)}{1+k_2^2} \\ v_{n+1} &= \frac{k_2^2(v_n - gt_n) - v_n + gt_n + 2k_2u_n}{1+k_2^2} \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Формули (4) і (20) дозволяють аналізувати рух точки після відскоку від лівої півплощини.

Наведемо розрахункові дослідження траєкторій руху точки за допомогою складеного алгоритму та програми. Координати точки в момент зіткнення визначаються за формулами (4), проекції швидкості – за формулами (12) і (20). Час між зіткненнями визначається за формулами (3) і (17). Критерієм перескоку є умова (14).

Приклад 1. На рис. 3 побудовані множини траєкторій для двох випадків початкових умов: а) $x_b = 0,4 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$; б) $x_b = 0,4 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 0,4 \text{ м/с}$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$. Початкові координати однакові $x_b = 0,4 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, проекції швидкостей на горизон-

тальну вісь – відрізняються. У першому випадку $u_b = 0$, $v_b = 0$, у другому – $x_b = 0,4 \text{ м}$, $v_b = 0$. Кути, утворені півплощинами з вертикаллю – рівні $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$. Траєкторії заповнюють прямокутні області з вершиною в початковій точці руху.

Приклади демонструють формування бильярдної каустики – прямокутної області, що обмежує всі неперіодичні траєкторії.

Приклад 2. Рис. 4 демонструє формування періодичних траєкторій: а) $x_b = 0,28 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$; б) $x_b = 0,28 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 0,5 \text{ м/с}$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$. Очевидно, що такі траєкторії одержуються у тих випадках, коли кут падіння в точку на півплощину дорівнює 90° . На рис. 4, а наведений варіант траєкторії із чотирьох ділянок і трьома парами зіткнень: $x_b = 0,28 \text{ м}$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$. При зміні проекції початкової швидкості на горизонтальну вісь $u_b = 0,5 \text{ м/с}$ одержуємо періодичний режим із двома ділянками й парою зіткнень.

Приклад 3. Періодичні траєкторії представлені також на рис. 5, відповідно, у варіантах а) $x_b = 0$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 3 \text{ м/с}$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$; б) $x_b = 0$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 2,55 \text{ м/с}$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$. При вильоті із точки на осі симетрії кута з будь-якою горизонтальною початковою швидкістю реалізується траєкторія, що складається із двох ділянок рис. 5, а ($x_b = 0$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 3 \text{ м/с}$, $v_b = 0$). За певних умов, що залежать від ординати y_b й модуля горизонтальної складової швидкості u_b , ці траєкторії зливаються в одну (рис. 5, б; $x_b = 0$, $y_b = 1 \text{ м}$, $u_b = 2,55 \text{ м/с}$, $v_b = 0$).

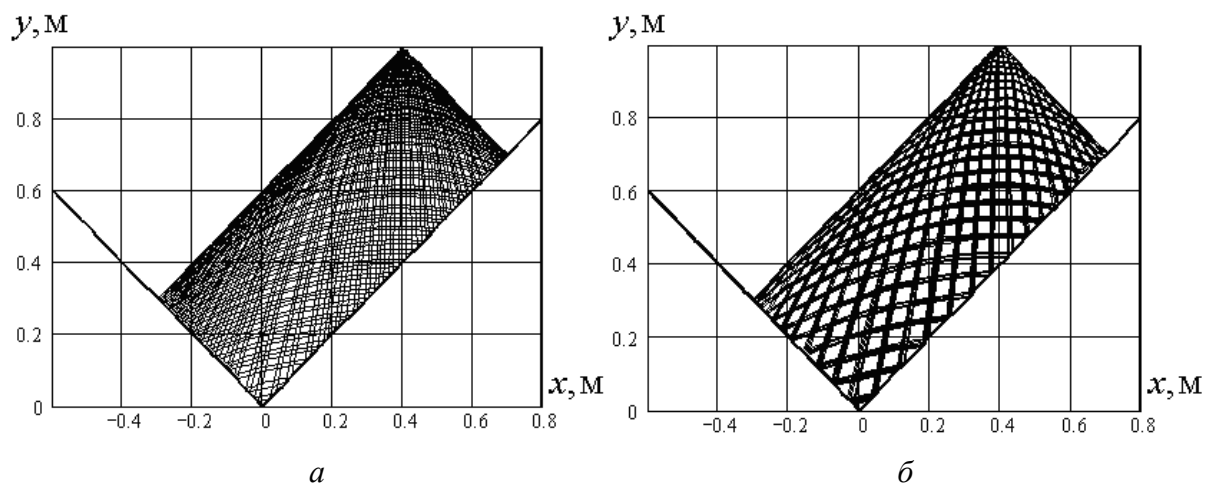


Рис. 3. Формування більярдних каустик для неперіодичних траєкторій

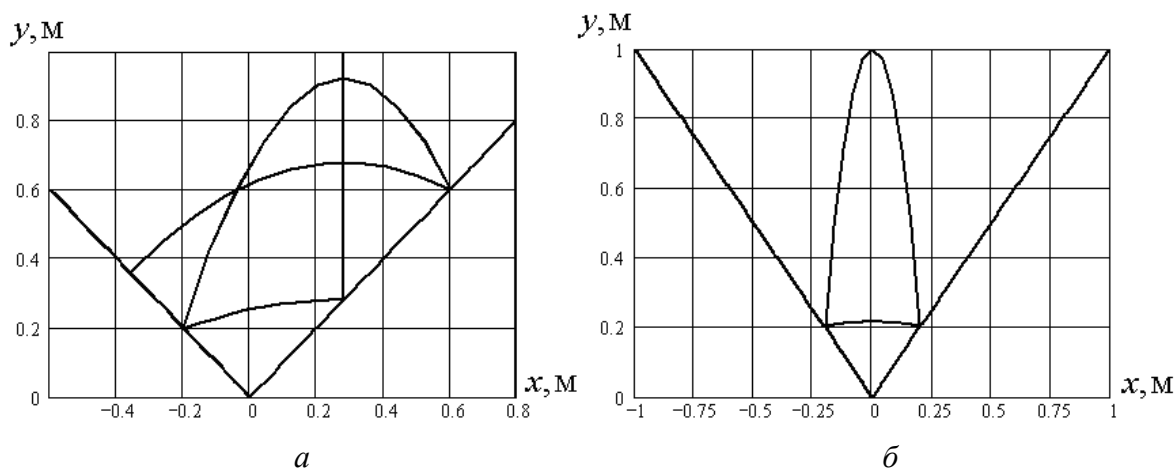


Рис. 4. Приклади формування періодичних траєкторій

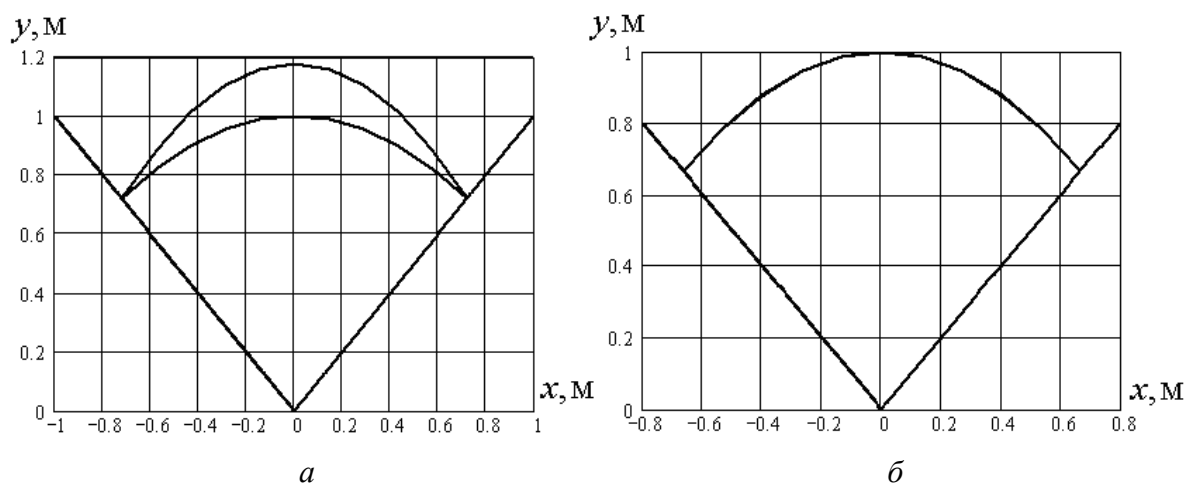


Рис. 5. Приклади формування періодичних траєкторій

Приклад 4. Траєкторії на рис. 6 побудовані для несиметричного кута $\vartheta_1 = 60^\circ$, $\vartheta_2 = 30^\circ$ для варіантів $x_b = 0,5$ м, $y_b = 1$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = 60^\circ$, $\vartheta_2 = 30^\circ$; б) $x_b = 0,3$ м, $y_b = 0,4045$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = 60^\circ$, $\vartheta_2 = 30^\circ$. На рис. 6, а ці траєкторії укладені в області, також обмеженою каустикою, що представляє собою прямокутник ($x_b = 0,5$ м, $y_b = 1$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$). І для цього кута існують окремі випадки, коли реалізуються періодичні траєкторії. Одна з них, що складається із двох елементів із двома зіткненнями, представлена на рис. 6, б ($x_b = 0,3$ м, $y_b = 0,4045$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$).

Приклад 5. Серія цікавих траєкторій для кутів $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30^\circ$ показана на рис. 7 і 8. Каустики на рис. 7, а, б побудовані відповідно для $x_b = 0,3$ м, $y_b = 1$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$ і $x_b = 0,1$ м, $y_b = 1$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$. Специфіка траєкторій рис. 7, а полягає в тому, що на етапі руху реалізуються два послідовних зіткнення на лівій півплощині.

При одержанні траєкторій на рис. 8, а була змінена тільки координата $x_b = 0,34$ м. На рис. 8, б для $x_b = 0,384$ м й інших колишніх параметрів отримана періодична траєкторія з десяти ланок з вісьма зіткненнями.

Приклад 6. Специфічну форму має каустика для варіантів а) $x_b = 0$, $y_b = 1$ м,

$u_b = 2$ м/с, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30^\circ$; б) $x_b = 0,6$ м, $y_b = 1$ м, $u_b = 0$, $v_b = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 40^\circ$. Для траєкторії на рис. 9, а початкова точка взята на осі симетрії кута ($x_b = 0$, $y_b = 1$ м), початкова швидкість має проекції: $u_b = 2$ м/с, $v_b = 0$. Інші параметри такі ж, як і в моделі двох попередніх рисунків.

Далі наведемо спосіб унаочнення руху точки фазового простору за допомогою двовимірного відображення Пуанкаре з метою дослідження динаміки гравітаційного більярда у межах кута, утвореного двома півплощинами.

Розв'язання сформульованого завдання складається декількох етапів. В даній роботі розглянемо лише перший з них – варіант гравітаційного більярда у випадку відсутності перескоку кульки на сусідню півплощину.

Будемо позначати горизонтальні координати точок зіткнення як x_n , і горизонтальні проекції швидкості, що їм відповідають, – u_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ординати точок y_n у розглянутому випадку визначаються із геометрії кута, а проекції швидкості на вертикальну вісь $v_n \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) після відскоку – із закону збереження повної механічної енергії

$$E = T + \Pi = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} + gy_n = \text{const}, \quad (21)$$

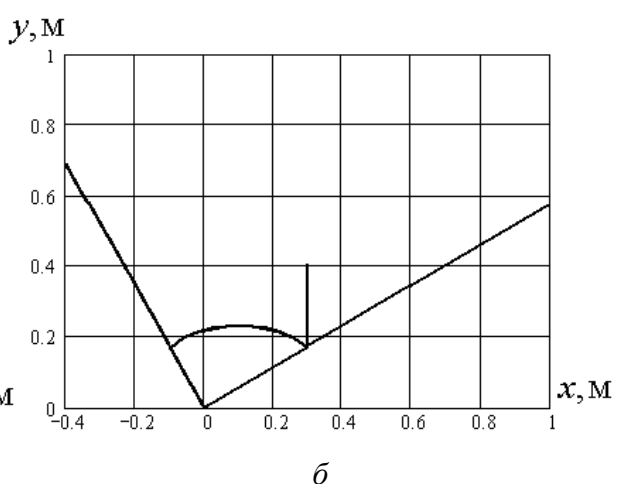
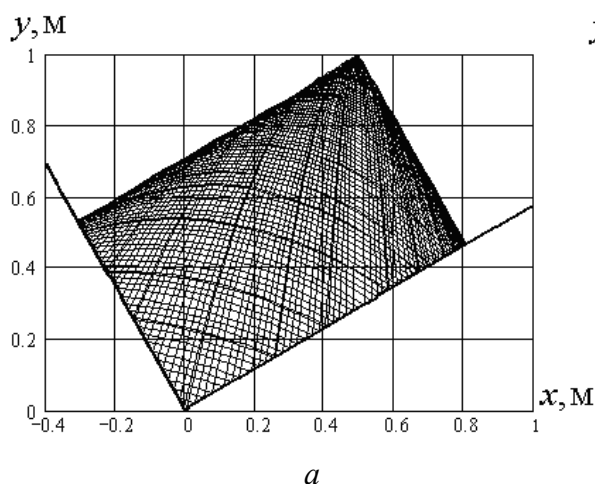


Рис. 6. Траєкторії для несиметричного кута

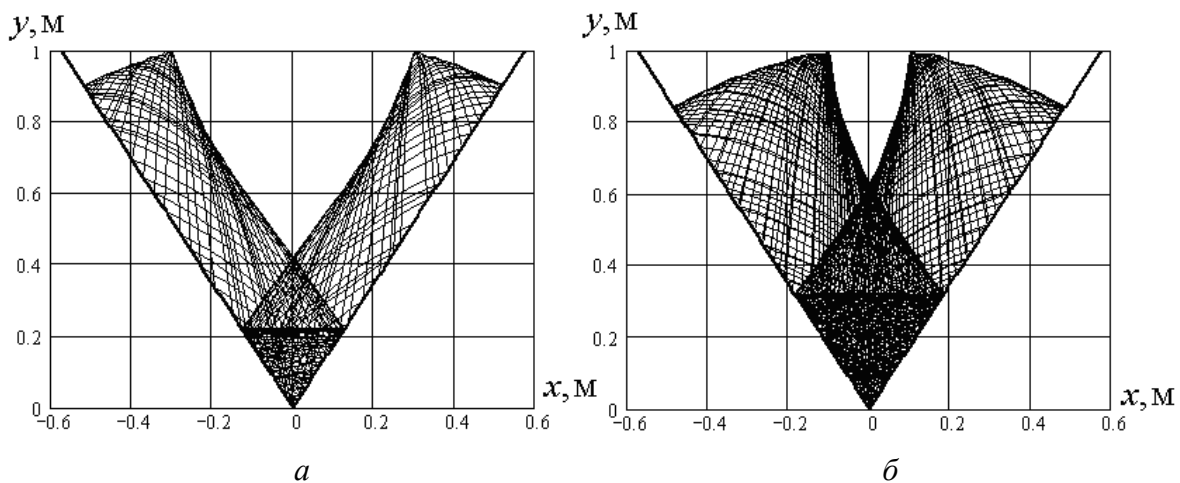


Рис. 7. Приклади формування більярдних каустик

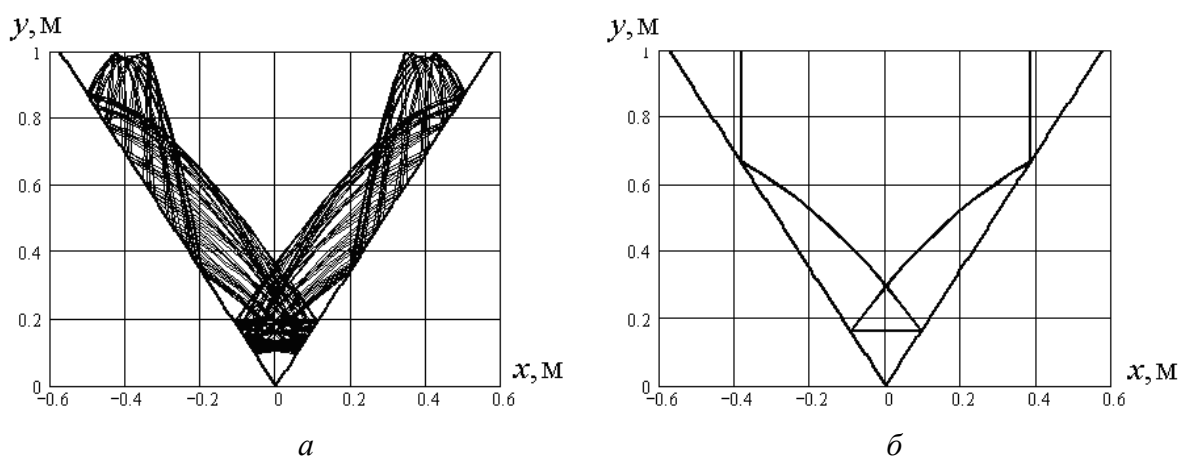


Рис. 8. Приклад нестійкості обчислювального процесу

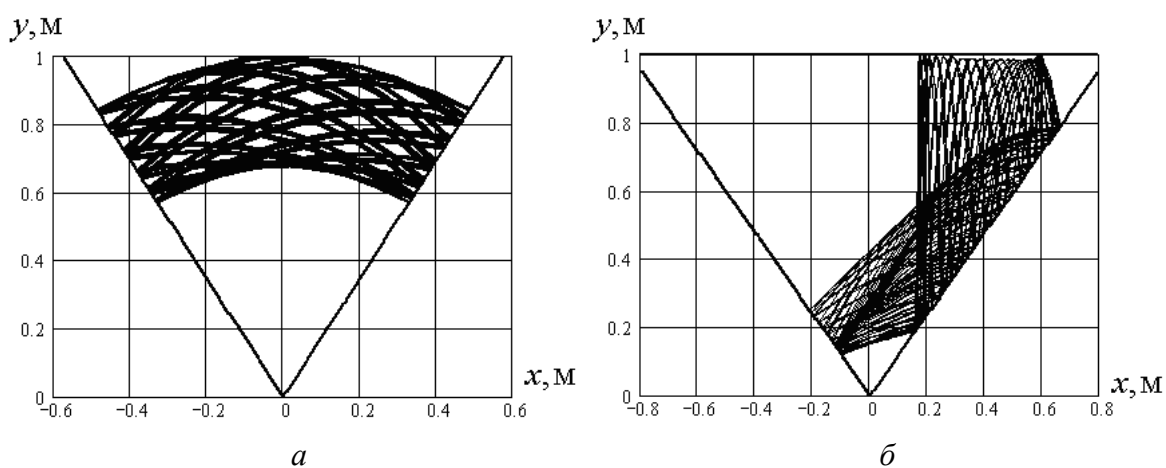


Рис. 9. Приклади формування більярдних каустик

де E , T , Π – повна, кінетична і потенціальна енергія точки. Так надалі аналізуватимемо відображення $(x_n, u_n) \rightarrow (x_{n+1}, u_{n+1})$.

Побудову фазових портретів можна істотно спростити, якщо скористатися полярними координатами r й φ (рис. 10). $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$.

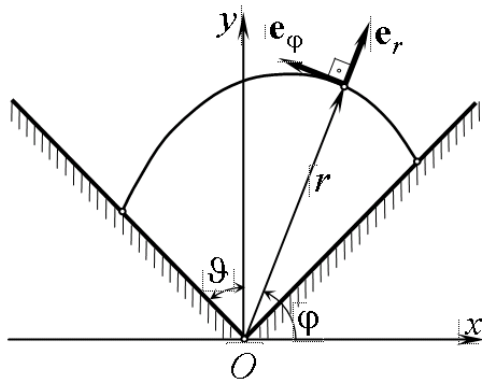


Рис. 10. Полярні координати точки

Відповідні ортогональні одиничні вектори позначимо через \mathbf{e}_r і \mathbf{e}_φ . Уведемо позначення для проекцій швидкості точки \mathbf{V} на радіальне й поперечне напрямки полярної системи координат

$$w = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_r, \quad z = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\varphi. \quad (22)$$

Надалі, змінивши для зручності масштаб виміру проекцій швидкості, будемо користуватися величинами

$$W = \frac{w}{\cos \vartheta}, \quad Z = \frac{|z|}{\sin \vartheta}. \quad (23)$$

Покажемо, що формули відображення Пуанкаре можна одержати в замкнутому аналітичному виді, якщо прийняти чисельні значення прискорення вільного падіння й енергії відповідно $g = \frac{1}{2}$, $E = \frac{m}{2}$, а кути, які утворюють похилі півплощини з вертикаллю рівними $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$.

Цей прийом, не звужуючи загальності одержаних результатів, дає можливість виключити при реалізації кожного відображення необхідність знаходження корінь квадратного рівняння.

Закон збереження енергії (21) набуває у цьому випадку такої форми

$$u^2 + v^2 + y = 1. \quad (24)$$

При аналізі відображень варто розрізняти два випадки: якщо при відскоку має місце зіткнення з тією же стороною кута, то реалізується відображення T_r ; якщо має місце перескок, то – T_l .

Одержимо спочатку формули відображень для випадку відсутності перескоку. Нехай n -е зіткнення має місце, наприклад, із правою півплощиною. На рис. 11 показаний фрагмент траєкторії між двома зіткненнями.

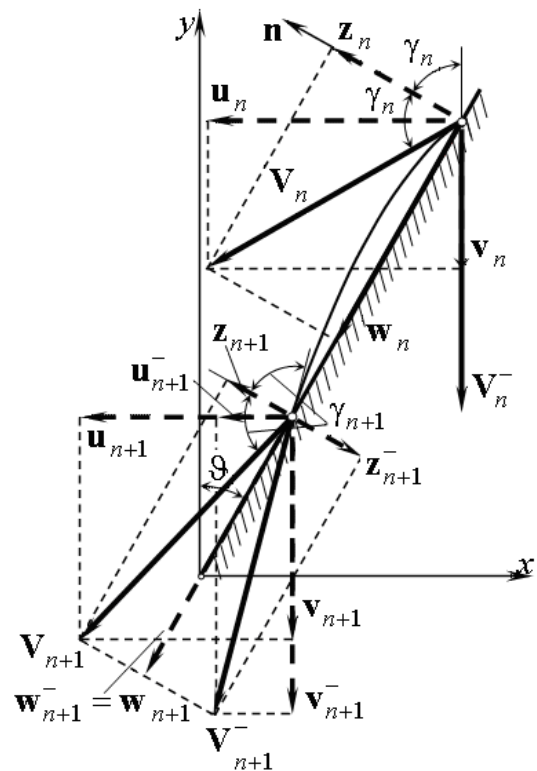


Рис. 11. Швидкості точки і їх складові при відсутності перескоку

Позначимо координати точки зіткнення (x_n, y_n) , а швидкість у момент удару \mathbf{V}_n^- . Після відбиття швидкість позначена як \mathbf{V}_n , а її позначеннями по декартовим і полярним осям відповідно $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$, $(\mathbf{w}_n, \mathbf{z}_n)$. Для $n+1$ -го зіткнення прийняті позначення: $-\mathbf{V}_{n+1}^-$ швидкість точки; $(\mathbf{u}_{n+1}^-, \mathbf{v}_{n+1}^-)$ – по декартовим осях; $(\mathbf{w}_{n+1}^-, \mathbf{z}_{n+1}^-)$ – по полярним осям.

– по полярним осях. Після нового відскоку для швидкості використані ті ж позначення, але без верхнього індексу «мінус»: \mathbf{V}_{n+1} , $(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})$, $(\mathbf{w}_{n+1}, \mathbf{z}_{n+1})$. Попарно рівні кути падіння й відбиття позначені буквою γ з відповідним індексом, \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі. Схема на рис. 11 служить також корисною ілюстрацією доцільності введення полярних координат. При зіткненні радіальна проекція швидкості не змінюється $w_{n+1}^- = w_{n+1}$, а поперечна проекція – міняє тільки свій знак $z_{n+1}^- = -z_{n+1}$ ($|z_{n+1}^-| = |z_{n+1}|$).

Рух точки після n -го відскоку (траєкторія в параметричній формі) визначається за формулами

$$x = x_n + u_n t, \quad (25)$$

$$y = y_n + v_n t - \frac{1}{4} t^2, \quad (26)$$

З формул (25), (26) випливають вирази для проекцій швидкості точки:

$$u = \dot{x} = u_n, \quad (27)$$

$$v = \dot{y} = v_n - \frac{1}{2} t. \quad (28)$$

З формули (27) слідує, що горизонтальна проекція швидкості в проміжку між ударами не міняється. Точка, за припущенням, ударяється з правою півплощиною, рівняння якої

$$y = kx, \quad (29)$$

де k – тангенс кута нахилу прямої.

Очевидно, що

$$k = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (30)$$

Якщо точка через час t_n попадає на ту ж півплощину, то з врахуванням виразів (25), (26) і (29) маємо

$$y_n + v_n t_n - \frac{1}{4} t_n^2 = k(x_n + u_n t_n). \quad (31)$$

Із цього рівняння знаходимо час руху до зіткнення

$$t_n = 4(v_n - k u_n). \quad (32)$$

Нові координати точки на півплощині з врахуванням (25), (26) і (32)

$$x_{n+1} = x_n + u_n t_n, \quad (33)$$

$$y_{n+1} = y_n + v_n t_n - \frac{1}{4} t_n^2. \quad (34)$$

Для знаходження проекцій швидкості після нового зіткнення зручно ввести в розгляд вектор проекцій швидкості в момент попереднього удару

$$\mathbf{V}_{n+1}^- = \begin{bmatrix} u_{n+1}^- \\ v_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n - \frac{1}{2} t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ 2k u_n - v_n \end{bmatrix}. \quad (35)$$

У відповідність із законом відбиття швидкість точки після відскоку

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_{n+1}^- - 2(\mathbf{V}_{n+1}^- \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (36)$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі до півплощини.

Для одиничного вектора нормалі маємо

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}^T, \quad (37)$$

де T – знак транспонування.

Підставляючи (35), (37) у формулу (36), з врахуванням (10) одержимо

$$\mathbf{V}_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n + 2q \cos \vartheta \\ 2u_n \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} - v_n - 2q \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad (38)$$

де $q = u_n \cos \vartheta - v_n \sin \vartheta$.

Перетворимо вираз (38) для проекцій швидкості до полярних координат. Для координат точки в декартовій і полярній системі мають місце відомі співвідношення (див. рис. 1):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (39)$$

Для проекцій швидкості:

$$\left. \begin{aligned} u = \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = v_r \cos \varphi - \\ &- v_\varphi \sin \varphi = w \cos \varphi - z \sin \varphi \\ v = \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = v_r \sin \varphi + \\ &+ v_\varphi \cos \varphi = w \sin \varphi + z \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

де $v_r = \dot{r} = w$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = z$ – проекції швидкості точки на радіальне й поперечне напрямки (див. також формулу (22)).

Вирази (40), що зв'язують проекції швидкості точки в декартовій і полярній системах координат, можна записати у формі відповідного лінійного перетворення

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Маємо обернене перетворення проекцій швидкості точки в декартовій системі до проекцій швидкості в полярній системі координат на підставі (41):

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (42)$$

При ударі об праву півплощину $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, тому в момент n -го зіткнення на підставі формул (41), (42):

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \sin \vartheta - z_n \cos \vartheta \\ w_n \cos \vartheta + z_n \sin \vartheta \end{bmatrix}; \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} w_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \sin \vartheta + v_n \cos \vartheta \\ -u_n \cos \vartheta + v_n \sin \vartheta \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Формула (44) дозволяє переписати вирази для проекцій швидкості точки після зіткнення за допомогою (38) у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 2z_n \cos \vartheta, \\ v_{n+1} &= -v_n + 2u_n \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} + 2z_n \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Подальші перетворення зручно здійснити, записавши вирази (45) інакше:

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -2z_n \cos \vartheta, \\ v_{n+1} + v_n &= 2u_n \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} + 2z_n \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Тому що $(n + 1)$ -е зіткнення відбувається з тією же півплощиною, то для проекцій швидкості u_{n+1} , v_{n+1} будуть справедливі формули (43), у яких індекс n замінити на індекс $n + 1$

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{n+1} \sin \vartheta - z_{n+1} \cos \vartheta \\ w_{n+1} \cos \vartheta + z_{n+1} \sin \vartheta \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Підставляючи (43) і (47) у вирази (46), після нескладних перетворень одержимо формули, що зв'язують проекції швидкості точки в полярних координатах після n -го й $n + 1$ -го відскоків (відображення Пуанкаре),

$$\left. \begin{aligned} w_{n+1} &= w_n - 2z_n \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \\ &= w_n - 2|z_n| \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \\ z_{n+1} &= |z_{n+1}| = z_n = |z_n| \end{aligned} \right\}. \quad (48)$$

З врахування прийнятих вище позначень (23) остаточно відображенню Пуанкаре можна надати таку форму:

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= W_n - 2Z_n \\ Z_{n+1} &= Z_n \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Висновки і перспективи досліджень

Отже, залежності (3), (4), (12), (17) і (20) дозволяють визначити вигляд множини «більярдних» траєкторій руху матеріальної точки в гравітаційному силовому полі між двома пружними півплощинами, та унаочнити одне з головних понять теорії математичних більярдів – більярдну каустику. Наведений спосіб визначення відображення Пуанкаре дозволить унаочнити рух точки фазового простору з метою дослідження динаміки гравітаційного більярда в межах кута між двома півплощинами.

Подальші дослідження пов'язані з одержанням формули відображень Пуанкаре для випадку наявності перескоку фізичної точки на сусідню півплощину, а також унаочнення та реалізації на практиці відображенню Пуанкаре у вигляді (49).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лаптев, В.В. Теоретические основы методики использования современной электронной техники в обучении физике в школе: дис. ... доктора пед. наук. [Текст]. – Ленинград, 1989. – 180 с.

2. Чирцов, А.С. Электронный учебник «Движение частиц в силовых полях» [Текст] / Региональная конференция «Современные технологии обучения» 16-17 апр. 1996г. – СПб., 1996. – С. 55-56.
3. Бутиков, Е.И. Компьютерные модели в физике [Текст] / Е.И. Бутиков. – СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1996.
4. Козел, С.М. Физика в картинках (учебный компьютерный курс для средней школы) [Текст] / С.М. Козел. – М.: Физикон, 1994. – 150 с.
5. Петросян, В.Г. Математический бильярд в силовом поле [Электронный ресурс] / В.Г. Петросян, Р.М. Газарян, С. Люгай. – Режим доступа: http://znamenys.chat.ru/ELBR1_O.htm
6. Петросян, В.Г. Постановка и решение исследовательских задач по физике при помощи компьютера [Электронный ресурс] / В.Г. Петросян, И.В. Лихицкая, Л.Р. Беитокова. – Режим доступа: <http://som.fio.ru/Resources/MarkovaSN/Theacher/Doc1/Doc1.htm>
7. Совертков, П.И. Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике [Текст] / П.И. Совертков. – М.: Гелиос АРВ, 2004. – 384 с.
8. Куценко, Л.М. Опис траєкторій математичного бильярда в гравітаційному полі між двома півплощинами [Текст] / Л.М. Куценко, О.В. Адашевський // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 27. – С. 3-12.
9. Куценко, Л.М. Відображення Пуанкаре для гравітаційного бильярда при відсутності перескоку на сусідню півплощину [Текст] / Л.М. Куценко, О.В. Адашевський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С. 233-239.
10. Куценко, Л.М. Побудова відображення Пуанкаре для гравітаційного бильярда в межах кута, утвореного двома півплощинами [Текст] / Л.М. Куценко, О.В. Адашевський // Праці Тавр. держ. агротех. університету. Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Т. 51. – С. 71-78.

Leonid KUTSENKO, Sergey SHEVCHENKO
Kharkiv

RESEARCH OF MATHEMATICAL BILLIARDS IN THE GRAVITATIONAL FIELD BETWEEN TWO SEMI-PLANES WITH THE USE OF THE PUANKARE REFLECTION

A method has been given for determining the trajectory of a mathematical billiard in the gravitational field inside the angle which is formed by two semi-planes. It has been found their relations to the angle of "exposure" of the semi-planes, to the coordinates of the starting point of the billiard ball, and to its initial velocity. It has been discovered the problem of analyzing the motion of a phase space point using the two-dimensional Puankare reflection with the purpose of studying the dynamics of the gravitational billiard within the angle which is formed by two semi-planes.

Keywords: mathematical billiard, gravitational field, billiard trajectory, trajectory clarification, Puankare reflection, billiard dynamics.

Леонід КУЦЕНКО, Сергей ШЕВЧЕНКО
Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО БИЛЬЯРДА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Приведен способ определения траектории математического бильярда в поле тяготения внутри угла, образованного двумя полуплоскостями. Найдены их зависимости от угла «раскрытие» полуплоскостей, от координат точки старта бильярдного шара, а также от его начальной скорости. Рассмотрены вопросы анализа движения точки фазового пространства при помощи двумерного отображения Пуанкаре с целью исследования динамики гравитационного бильярда в пределах угла, образованного двумя полуплоскостями.

Ключевые слова: математический бильярд, поле тяготения, траектория бильярда, визуализация траектории, отображение Пуанкаре, динамика бильярда.

Стаття надійшла до редколегії 13.10.2017