

УДК 681.3

**Віктор МЕЛЬНИК**

[vamlnk2015@gmail.com](mailto:vamlnk2015@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-6981-5046

м. Миколаїв

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНОМУ РОЗРЯДІ В ОБЛАСТЯХ З ВІСЕВОЮ СИМЕТРІЄЮ

*Проведено чисельне моделювання хвильових процесів у механічній системі, яка включає в себе канал електричного розряду, оточуючу його рідину, перешкоду у вигляді тонкостінної оболонки кінцевих розмірів і частину зовнішнього середовища, що безпосередньо примикає до неї. Показано, що поблизу плазмової порожнини, яка утворюється при електричному розряді у воді, можуть формуватися ударні хвилі з великою амплітудою. Для їх опису використовується система рівнянь газової динаміки в циліндричній та сферичній системі координат. Задачу розв'язано чисельним методом Годунова.*

**Ключові слова:** електричний розряд, хвильовий процес, канал електричного розряду, акустичне наближення, ударні хвилі.

### Постановка проблеми

Електрогідрравлічний ефект являє собою процес перетворення електричної енергії в механічну енергію гідродинамічного збурення.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Існує значна кількість робіт (їх огляд наведено в [1]), присвячених оцінці гідродинамічних течій при електричному розряді у воді (ЕРВ). Для аналітичного розв'язання гідродинамічних задач застосовується метод інтегральних перетворень (Фур'є, Лапласа, Ханкеля) до хвильового рівняння, що дозволяє отримати алгебраїчну систему рівнянь, або знизити порядок системи диференціальних рівнянь. Основні труднощі пов'язані зі зверненням відповідних інтегральних перетворень [2]. Крім того, використання рівнянь лінійної акустики обмежено розглядом хвиль малої інтенсивності.

### Формулювання цілей

Комплексний аналіз нелінійних ефектів, що виникають при ЕРВ, проводився з використанням системи рівнянь газової динаміки. Найбільше поширення при інтегруванні системи рівнянь газової динаміки отримала явна кінцево-різницева схема

С.К.Годунова [3], що надає можливість явно виділити поверхні розриву і добре адаптується до особливостей визначення течій.

### Основний матеріал

Розглядаються випромінювачі канонічної форми - циліндричні, сферичні та їх комбінації. Передбачається, що в їх внутрішніх порожнинах, заповнених рідиною, на осі симетрії генеруються електричні розряди.

Вводяться наступні припущення фізичного і геометричного характерів:

- в початковий момент часу вже сформований канал електричного розряду, що представляє собою циліндр кінцевої довжини;
- рідина, що заповнює навколишнє середовище і випромінювач, ідеальна і стислива, рух її безвихровий;
- деформування стінок випромінювача відбувається пружно, згідно закону Гука для ізотропних середовищ;
- радіус циліндра не менше, ніж на порядок, перевищує товщини пружних стінок.

Поблизу плазмової порожнини, що утворюється при електричному розряді у воді, можуть формуватися ударні хвилі з великою амплітудою, що викликає необхідність залучення нелінійних співвідношень для їх опису. Тому використовується система рівнянь газової динаміки в циліндричній системі координат  $rOz$  :

$$\frac{\partial(F_1 r)}{\partial t} + \frac{\partial(F_2 r)}{\partial z} + \frac{\partial(F_3 r)}{\partial r} = F_4,$$

$$F_1 = [\rho, \rho u_r, \rho u_z, \varepsilon]^T,$$

$$F_2 = [\rho u_z, \rho u_z u_r, \rho u_z^2 + p, (\varepsilon + p) u_z]^T,$$

$$F_3 = [\rho u_r, \rho u_r^2 + p, \rho u_z u_r, (\varepsilon + p) u_r]^T, \quad (1)$$

$$F_4 = [0, p, 0, 0]^T, \quad \varepsilon = \rho [E + (u_z^2 + u_r^2) / 2].$$

Система рівнянь (1) замикається рівнянням стану води, яке в широкому діапазоні зміни тисків має вигляд:

$$E = \frac{p + \gamma B}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}$$

$$\int_0^L \left[ (N_1 \psi_r + Q \psi_z) \delta \left( \frac{\partial u_z}{\partial s} \right) + (\rho_M n \dot{u}_z - p_z) \delta u_z \right] r ds - [r p_z \delta u_z]_{s=0,L} = 0;$$

$$\int_0^L \left[ (N_1 \psi_1 - Q \psi_r) \delta \left( \frac{\partial u_r}{\partial s} \right) + \left( \frac{N_2}{r} + \rho_M n \dot{u}_r - p_r \right) \delta u_r \right] r ds - [r p_r \delta u_r]_{s=0,L} = 0; \quad (2)$$

$$\int_0^L \left[ M_1 \delta \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial s} \right) + \left( \frac{M_2}{r} \psi_2 + Q + \rho_M \frac{n^3}{12} \dot{u}_\phi \right) \delta u_\phi \right] r ds - [r M \delta u_\phi]_{s=0,L} = 0,$$

де  $p_r, p_z, M$  - зовнішні сили і момент, що діють на граничних контурах оболонки  $s = 0$  і  $s = L$ .

Слід зазначити, що співвідношення (2) дозволяють шляхом завдання початкової конфігурації серединної поверхні моделювати динамічні процеси в оболонках обертання довільної форми, у тому числі і в круглих пластинах. Для останніх рівняння (2) стають невизначеними в полюсних точках  $r = 0$ . Після виконання граничного переходу при  $r \rightarrow 0$  рівняння (2) приймають вигляд:

$$2 \frac{\partial}{\partial s} (N_1 \psi_r + Q \psi_z) + p_z = \rho_m n \dot{u}_z,$$

$$\dot{u}_r = \dot{u}_\phi = Q = 0.$$

Рух рідини у зовнішній по відношенню до оболонкової конструкції області описується в рамках акустичного наближення, справедливого для тиску до 100 МПа.

З урахуванням осьової симетрії задачі рівняння руху рідини прийме вигляд:

- в циліндричній системі координат:

$$\frac{1}{c_0^2} \ddot{p} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (3)$$

де  $B = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ , при цьому для води  $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_0 = 1460 \text{ м/с}$ ;  $\gamma = 7,15$ ;  $B = 298,6 \text{ МПа}$ .

Опис перехідних процесів в тонких оболонках найчастіше ґрунтується на використанні гіпотез Кірхгофа-Лява або Тимошенко. Для опису руху оболонки використовуються варіаційні рівняння [4], що отримуються з загального рівняння динаміки, в якому варіації  $\delta u_r$ ,  $\delta u_z$ ,  $\delta u_\phi$  покладаються лінійно незалежними і зводяться до системи трьох рівнянь:

- в сферичній системі координат:

$$\frac{1}{c_0^2} \ddot{p} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (4)$$

На осі симетрії в циліндричній та сферичній системах координат відповідно задаються умови

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\pi} = 0, \quad (5)$$

оскільки через вісь не повинно відбуватися перетікання рідини.

Для отримання замкнутої системи рівнянь слід розглянути початкові умови на межах розділу середовищ: плазмової порожнини, поверхнях оболонок і зовнішніх меж розрахункових областей для середовища, що оточує конструкцію. Початкові умови покладаються нульовими для оболонки, а початковий тиск в рідині вважається рівним атмосферному.

Моделюванню умов на межі «вода-плазма» приділено значну увагу [5]. У даному випадку використовується один з найпростіших способів завдання крайових умов такого типу, який передбачає заздалегідь відомі значення енергії  $E_p$ , що вводиться в канал

розряду, і час її введенні  $\tau_p$ . Тоді зв'язок між енергетичними характеристиками розряду і гідродинамічними параметрами здійснюється за допомогою рівняння балансу енергії:

$$\frac{\gamma_{\Pi} p_{\Pi}}{\gamma_{\Pi} - 1} \dot{V}_{\Pi} + \frac{V_{\Pi}}{\gamma_{\Pi} - 1} \dot{p}_{\Pi} = N_{\Pi}(t), \quad (6)$$

де  $\gamma_{\Pi} = 1,26$  - ефективний показник адиабати плазми;  $N_{\Pi}(t)$  - встановлений закон зміни потужності енергії, що вводиться.

На внутрішній поверхні циліндра задовольняються умови динамічної сумісності між нормальними швидкостями рідини  $U$ , тіла, що деформується  $u_{\xi}$  і тиском  $p_1^*$  на поверхні розриву

$$p_1^* = p - a(U - u_{\xi}), \quad (7)$$

де  $a$  - масова швидкість

У разі, якщо перешкода, з якою взаємодіє внутрішня хвиля тиску, нерухома, як це має місце, наприклад, для днищ циліндра, в рівнянні (8) покладається  $u_{\xi} = 0$ .

Для хвильових рівнянь (3) і (4) забезпечується умова безвідривного обтікання

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{\partial u_{\xi}}{\partial t}, \quad (8)$$

де  $\bar{n}$  - нормаль до поверхні тіла, що деформується. Оскільки зовнішня задача розв'язується в лінійній постановці в припущенні малості переміщень оболонки в порівнянні з її характерними розмірами, гранична умова (8) задається на нерухомій поверхні.

Перейдемо до постановки граничних умов для зовнішньої межі рідини, яка оточує оболонку. Будь-який розв'язок хвильового рівняння, що описує хвилі, які йдуть на нескінченність, можна представити рядом, що збігається:

$$p(r_0, \theta, \vartheta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_0^{-j} p_j(t - r_0/c_0, \theta, \vartheta), \quad (9)$$

де  $r_0, \theta, \vartheta$  - сферичні координати;  $p_j$  - аналітичні функції своїх змінних.

Ідея, яка належить Бейлісу і Теркелу [6], полягає в тому, що шуканий оператор, забезпечує не відбиті властивості межі, будучи застосований до (9), повинен звертати в нуль перших  $m$  членів розкладання. Безпосередньою перевіркою можна перекона-

тися, що така властивість характерна для оператора  $\varphi^m(r_0^m \cdot)$ , де  $\varphi = \partial/\partial r_0 + c_0^{-1} \partial/\partial t$ :

$$\varphi^m(r_0^m p) = 0(r_0^{-m-1}). \quad (10)$$

На практиці в співвідношенні зазвичай обмежуються значеннями  $m = 1$  або  $2$ , оскільки при великих значеннях  $m$  виникають труднощі з різницевої апроксимацією. Умова (10) при має вигляд:

при  $m = 1$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r_0} + \frac{1}{r_0} p = 0, \quad (11)$$

при  $m = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial r_0 \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial r_0^2} + \\ & + \frac{4}{r_0} \left( \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r_0} \right) + \frac{2}{r_0^2} p = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Чисельне інтегрування системи рівнянь (1) здійснюється за допомогою явної двохшаровою кінцеворізностної схеми типу «хрест». Середина поверхня покривається поруч вузлів уздовж меридіана, в яких центруються рівняння руху. Напруження і деформації обчислюються в середині елементів різницевої сітки на ряді шарів по товщині оболонки. Швидкості вузлових точок і деформації обчислюються в проміжні моменти часу  $\tau_{k+1/2} = (\tau_k + \tau_{k+1})/2$ , а геометричні характеристики і напружено-деформований стан - в цілочисельні моменти часу  $\tau_{k+1}$ . Після кінцево-різностної апроксимації рівнянь (2) та збору коефіцієнтів при  $(\delta u_z)_i, (\delta u_r)_i, (\delta u_{\varphi})_i$  в силу довільності варіацій утворюється система рекурентних формул для обчислення швидкостей переміщень і нових координат вузлових точок:

$$\begin{aligned} (u_j)_{i,k+1/2} &= (u_j)_{i,k-1/2} + \frac{\Delta \tau_k + \Delta \tau_{k+1}}{2(K_j)_{i,k}} \times \\ & \times \left[ (\Phi_j)_{i,k} + (1 - \delta_{j\varphi}) (p_j)_{i,k+1/2} \right]; \\ r_{i,k+1} &= r_{i,k} + \Delta \tau_{k+1} (u_r)_{i,k+1/2}; \\ \Delta \tau_k &= \tau_k - \tau_{k-1}; \\ z_{i,k+1} &= z_{i,k} + \Delta \tau_{k+1} (u_z)_{i,k+1/2}; \\ j &= r, z, \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $(\Phi_j)_{i,k}$  - приведені до  $i$ -го вузлу узагальнені сили, обчислені у  $k$ -му часовому шарі;  $(K_j)_{i,k}$  - узагальнені маси;  $\delta_{ip}$  - символ Кронекера.

Крок за часом  $\Delta\tau_k$  визначається з умови стійкості схеми «хрест». Оскільки кроки розв'язання гідродинамічної  $\Delta t$  і пружною  $\Delta\tau$  задач значно розрізняються, на інтервалі часу  $\Delta t$  проводиться кілька кроків інтегрування рівнянь динаміки оболонок при фіксованих значеннях компонент поверхневого навантаження  $p_r, p_z$ , що визначаються у внутрішньому і зовнішньому по відношенню до оболонки середовищах.

Для контрольних розрахунків розглядається задача про випромінювання нестационарного сигналу, який створюється точковим джерелом, розташованим в центрі сфери радіусу  $R=0,25$  м. Передбачається, що на поверхні сфери задається тиск  $p^* = f(t - r/c_0)/r$  (рис. 1, криві 1), що є точними розв'язками хвильового рівняння (4), де функція  $f(x)$  має наступний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x \geq 60; \\ x^2(x - 60)^2(30 - x), & 0 < x < 60. \end{cases} \quad (14)$$

При розрахунку зовнішня область моделюється тонким шаром шириною  $\Delta R$ , оточуючим оболонку, таким чином, що на нього припадає  $N_R$  розрахункових вузлів по координаті  $r$ . Тиски, розраховані в серединному перетині  $R + \Delta R/2$  (криві 2, рис. 1) і на межі  $R + \Delta R$  (криві 3), порівнюються з точним розв'язком  $p^*$ . Різниця в амплітудах тиску не перевищує 3%. Деякі незначні відмінності спостерігаються в хвостовій частині хвилі.

На рис. 2 показано тиск в точках зовнішньої межі, розташованих з інтервалом  $\pi/4$  при випромінюванні джерелом, зміщеним на  $R/3$  від центру сфери вздовж осі симетрії. Порівняння з точним розв'язком (штрихові лінії) підтверджує, що і у двовимірному випадку алгоритм приводить до цілком прийнятних результатів.

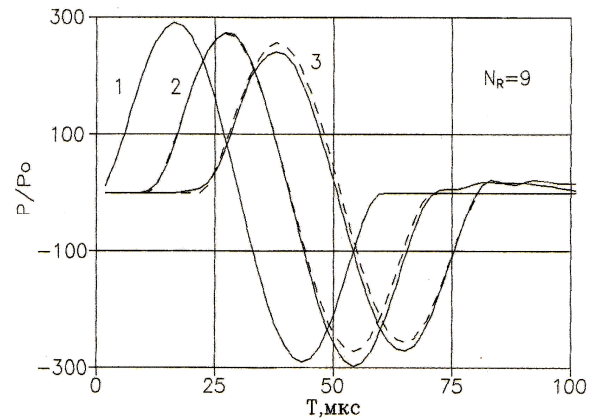


Рис. 1. Значення тиску для сфери

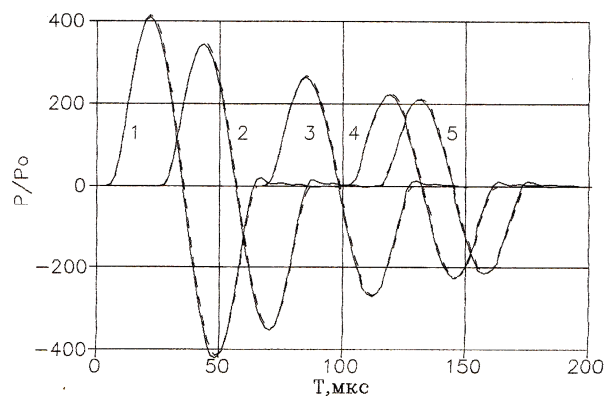


Рис. 2. Значення тиску в залежності від зсуву джерела збурення хвиль

Для циліндричного випадку тиск задається на поверхні циліндра радіуса  $R$ , завдовжки  $2L$ . При розрахунках береться  $R = L = 0,25$  м. Передбачається, що джерело збурень розташовано на осі циліндра, роблячи його довжину в співвідношенні 1:3. На рис. 3 показано тиск в точках з координатами  $(R + \Delta R; 0)$  (криві 1) і  $(R + \Delta R; L + \Delta L)$  (криві 2) циліндричної системи  $(r; z)$ . На відміну від сферичного випадку, викорис-

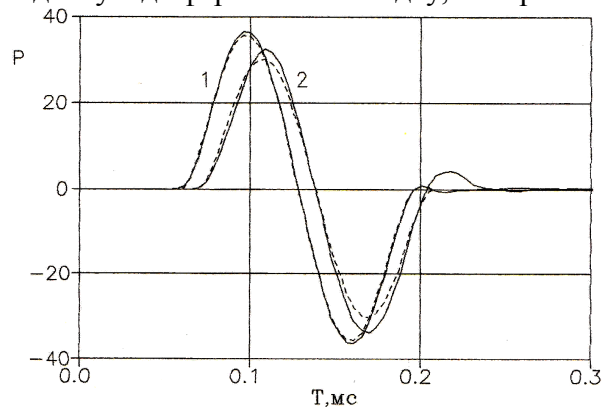


Рис. 3. Значення тиску для циліндру

тання граничних умов дещо завищує амплітуду чисельного розв'язку (суцільні лінії) в порівнянні з точним (штрихові). Найгірший збіг спостерігається в кутовій точці розрахункової області, де амплітуда паразитних коливань досягає 10 % амплітуди  $p^*$ .

### Висновки і перспективи досліджень

Тим не менш, незважаючи на незначні похибки обчислювального характеру, що

виникають при моделюванні граничних умов, що не відбивають хвилю, їх використання дозволяє звести до мінімуму розміри розрахункової області. В цьому є перевага даного підходу в порівнянні з прийомами, що найчастіше використовуються на практиці і полягають в безперервному розширенні області розповсюдження акустичних хвиль, залежно від віддаленості хвилі, яка випромінюється.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Поздеев, В.А. Прикладная гидродинамика электрического разряда в жидкости [Текст] / В.А. Поздеев. – Киев: Наук. думка, 1980. – 192 с.
2. Перцев, А.К. Динамика оболочек и пластин [Текст] / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов.- Л.: Судостроение, 1970. – 316 с.
3. Численное решение многомерных задач газовой динамики [Текст] / Под ред. С.К.Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. Григолюк, Э.Й. Нестационарная гидроупругость оболочек [Текст] / Э.Й. Григолюк, А.Г. Горшков. – Л.: Судостроение, 1974. – 208 с.
5. Наугольных, К.А. Электрические разряды в воде [Текст] / К.А. Наугольных, Н.А. Рой. – М.: Наука, 1971. – 151 с.
6. Уилкинс, М.Л. Расчет упруго-пластических течений [Текст] / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике.- М: Мир, 1967.- С.212-263.

**Victor MELNIK**  
Mykolayiv

### MODELING OF ACOUSTIC WAVE PROCESS FOR ELECTRICAL DISTRIBUTION IN AREAS WITH CENTRAL SYMMETRY

*Numerical modeling of wave processes in a mechanical system is carried out, which includes an electric discharge channel surrounding its liquid, an obstacle in the form of a thin-walled shell of finite dimensions, and part of the external environment immediately adjacent to it. It is shown that near the plasma cavity, which is formed during electric discharge in water, shock waves with a large amplitude can be formed. For their description, a system of equations of gas dynamics in a cylindrical and spherical coordinate system is used. The problem was solved by Godunov's numerical method.*

**Keywords:** electric discharge, wave process, electric discharge channel, friction surface, acoustic approximation, shock waves.

**Виктор МЕЛЬНИК**  
Николаев

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ В ОБЛАСТЯХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

*Проведено численное моделирование волновых процессов в механической системе, которая включает в себя канал электрического разряда, окружающую его жидкость, препятствие в виде тонкостенной оболочки конечных размеров и часть внешней среды, непосредственно примыкающей к ней. Показано, что вблизи плазменной полости, которая образуется при электрическом разряде в воде, могут формироваться ударные волны с большой амплитудой. Для их описания используется система уравнений газовой динамики в цилиндрической и сферической системе координат. Задача решена численным методом Годунова.*

**Ключевые слова:** электрический разряд, волновой процесс, канал электрического разряда, акустическое приближения, ударные волны.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.2017