

УДК 514.18

Ірина УСТЕНКО

ustenko.irina@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1541-2414

м. Миколаїв

ЗАСТОСУВАННЯ СИНУСОЇДАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КРИВИНИ ВІД ДОВЖИНИ ДУГИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ КРИВИХ ЛІНІЙ

В статті розглядається питання моделювання плоских кривих, що подаються у натуральній параметризації та мають синусоїдальну залежність розподілу кривини від довжини дуги. Розроблено програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів на ПЕОМ.

Ключові слова: моделювання кривих, натуральна параметризація, синусоїдальна залежність розподілу кривини, довжина дуги.

Постановка проблеми

Криві лінії знайшли широке застосування при розв'язуванні багатьох задач, пов'язаних з геометричним моделюванням плоских і просторових обводів різноманітних технічних об'єктів. Кривими лініями описуються корпуси суден, літаків, автомобілів, профілі лопаток турбін і компресорів тощо. Нові сфери застосування кривих вимагають розробки відповідних методів їх побудови. При моделюванні кривих ліній часто застосовуються їх параметричні рівняння, в яких за параметр приймається довжина власної дуги.

Незважаючи на розмаїття підходів до моделювання кривих, висвітлених в науковій літературі, проблема розробки нових методів їх побудови і на цей час є актуальною, оскільки практика проектування технологічно складних виробів висуває нові завдання, спрямовані на подальше удосконалення підходів до моделювання кривих. Таким чином, проблема розробки нових методів побудови кривих має важливе теоретичне та особливо практичне значення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У сучасній літературі з прикладної геометрії можна знайти достатньо робіт, в яких розглядаються питання моделювання плоских і просторових кривих із застосуванням їх натуральних рівнянь та задани-

ми законами розподілу кривини [1-13]. Найчастіше ці закони приймаються у вигляді лінійних, квадратичних і кубічних залежностей [4, 5, 9]. За кордоном це питання в деяких аспектах розглядалось у роботах Дж. А. Адамса [11], Т.К. Пала [12], А. Шектера [13].

У роботі [10] для геометричного моделювання візерунків застосовувалася функція, яка у натуральній параметризації подавалася рівнянням наступного вигляду:

$$k(s) = [1 + p \arccos^m(\cos^n(s))]^w,$$

де p , m , n і w – параметри, які визначають форму кривої.

Метод геометричного моделювання плоских кривих із застосуванням синусоїдальної залежності кривини від довжини дуги шляхом числового інтегрування системи диференціальних рівнянь, виведених французькими геометрами Серре і Френе запропоновано в роботі [1]. Числове інтегрування рівнянь Серре-Френе реалізовувалося методом Рунге-Кутта з додатковими умовами, за які приймалися синусоїдальні залежності кривини кривої від довжини дуги у наступному вигляді:

$$k(s) = A \sin^2(s) + 1,$$

де A – коефіцієнт, що варіюється.

Постановка завдання

Здійснити моделювання плоских кривих, поданих у натуральній параметризації, із застосуванням синусоїдальної зале-

жності розподілу кривини від довжини дуги, взятої у вигляді

$$k(s) = A \sin(bs) + 1, \quad (1)$$

де A і b – коефіцієнти, що варіюються.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням закону розподілу кривини від довжини власної дуги, взятому у вигляді (1).

Зазначимо, що параметричні рівняння кривої у натуральній параметризації записуються наступним чином:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds; \quad (2)$$

$$y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds.$$

Кут нахилу дотичної до модельованої кривої визначається інтегруванням виразу закону розподілу кривини

$$\varphi(s) = \int_0^s k(s) ds. \quad (3)$$

Оскільки інтеграли у виразах (2) і (3) аналітично не беруться, то їх значення знаходилися числовим методом трапецій.

Спочатку змодельюємо криві з законом розподілу у вигляді (1) з різними значеннями коефіцієнтів A і b . Отримані при цьому графічні результати наведені на рис. 1-6. На всіх цих рисунках градування координатних осей виконано з кроком 0,25. Підписи під рисунками містять вираз синусоїдального розподілу кривини, за яким було отримано ці конкретні графічні результати.

Наведені дані свідчать про те, що форма кривих суттєво залежить від величини коефіцієнта A . Зазначимо, що цей коефіцієнт збільшувався від одиниці до чотирьох.

Розрахунки показали, що при сталому значенні коефіцієнта A величина коефіцієнта b впливає на кількість зубів і западин, отриманої геометричної форми, збільшуючи їх кількість прямопропорційно зростанню коефіцієнта b (див. рис. 4-6). До речі, хоча на попередніх рисунках коефіцієнт A

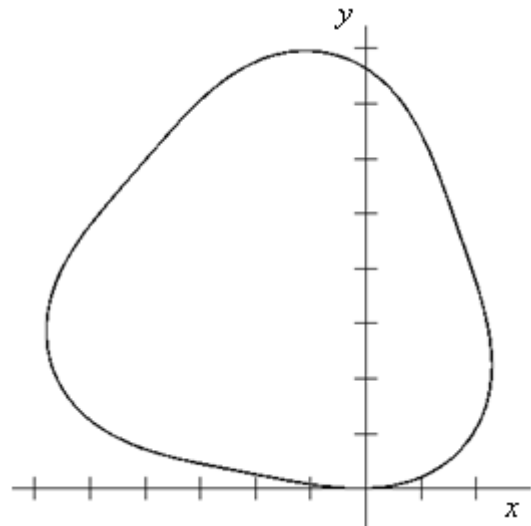


Рис. 1. $k(s) = \sin(3s) + 1$

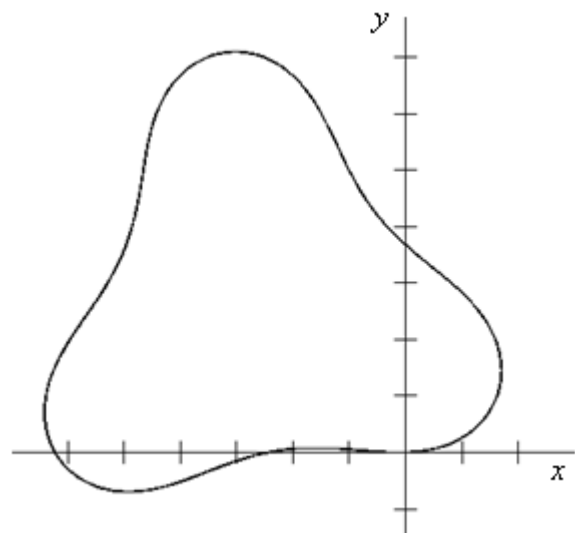


Рис. 2. $k(s) = 2 \sin(3s) + 1$

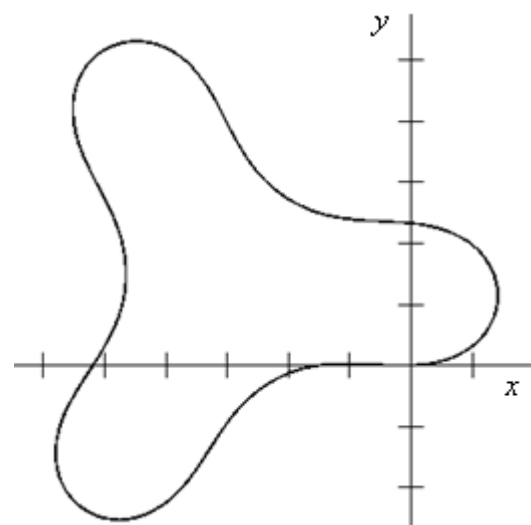


Рис. 3. $k(s) = 3 \sin(3s) + 1$

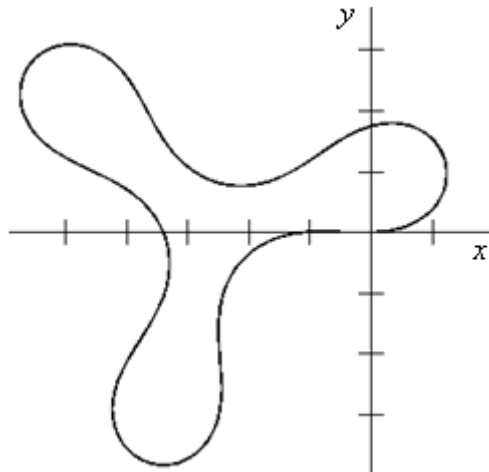


Рис. 4. $k(s) = 4 \sin(3s) + 1$

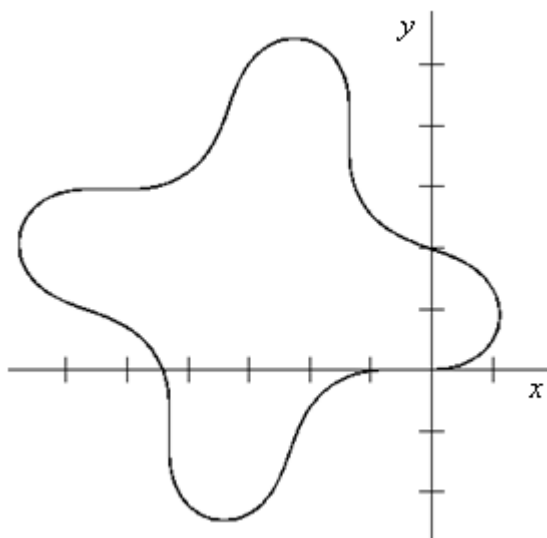


Рис. 5. $k(s) = 4 \sin(4s) + 1$

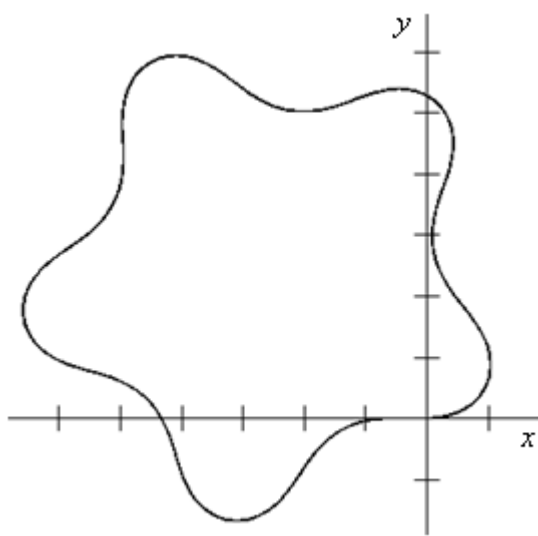


Рис. 6. $k(s) = 4 \sin(5s) + 1$

варіювався, але коефіцієнт b був величиною сталою і дорівнював трьом. Саме трьом дорівнює кількість зубів і западин, що яскраво проявляється на рис. 3 і 4.

На рис. 7-10 наведені результати моделювання кривих з коефіцієнтом b , який дорівнював числу π . Як свідчать ці дані, форма кривих суттєво змінилася. Вона не вписується в передбачувану форму, яка впливає з розгляду рис. 3 і 4, тобто тими кривими, які моделювалися з коефіцієнтом b , який дорівнював трьом і чотирьом, саме між цими значеннями знаходиться число π .

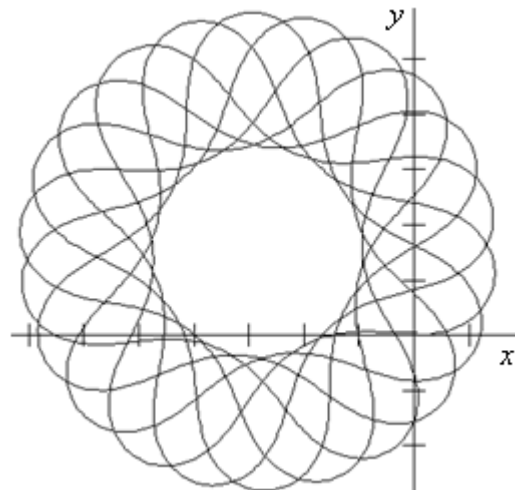


Рис. 7. $k(s) = 3 \sin(\pi s) + 1$

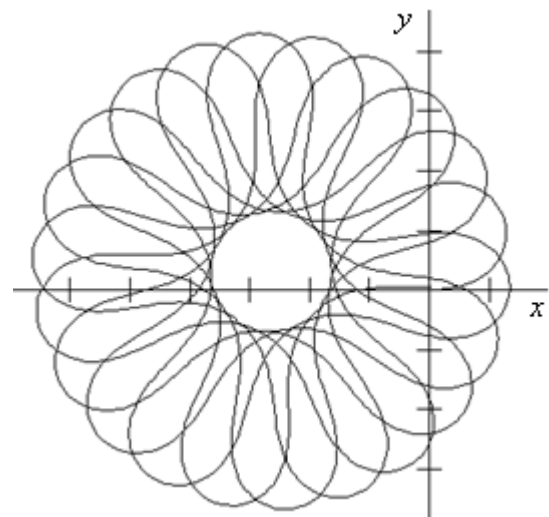


Рис. 8. $k(s) = 4 \sin(\pi s) + 1$

Були також проведені розрахунки з розподілом кривини, в якому замість синуса застосовувалася тригонометрична функція косинус. Отримані при цьому криві

нагадували вище розглянуті, але були симетричними до них відносно осей координат. Зрозуміло, що інформація, наведена на вище розташованих рисунках має чисто ілюстративний характер. Вона демонструє моделювання різноманітних кривих за наявності певного закону розподілу кривини від довжини дуги.

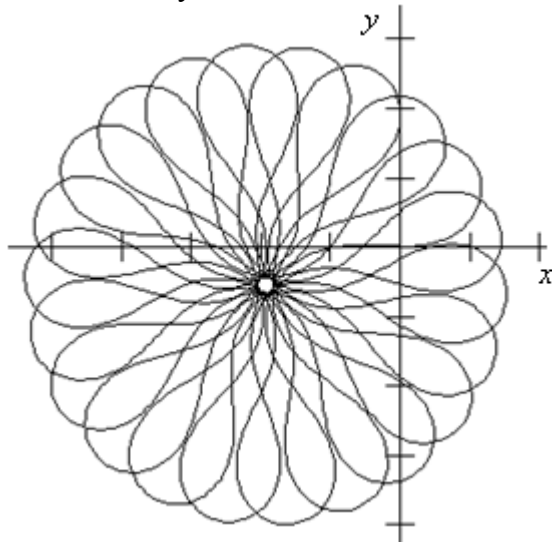


Рис. 9. $k(s) = 5 \sin(\pi s) + 1$

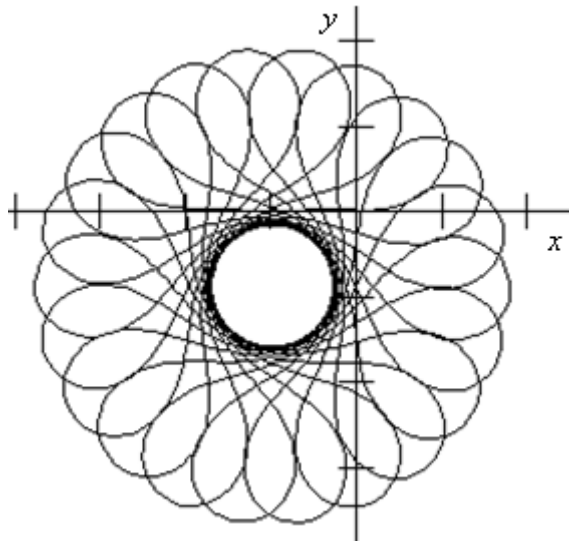


Рис. 10. $k(s) = 6 \sin(\pi s) + 1$

Зазначимо, що розрахунки проводилися за таких значеннях довжини дуги, які б забезпечували побудову всієї кривої, а не окремої її частини. У зв'язку з цим максимальне значення довжини дуги, яке вимірювалося в π одиницях, сягало, в залежності від варіанту, восьми – шістнадцяти π і навіть більше.

Інтегрування рівнянь (2) і (3) відбувалося числовим методом трапецій з кількістю інтервалів розбиття 2000. При цьому візуалізація отриманих розрахункових результатів відбувалася майже миттєво.

Графіки, показані на рис. 11-14, були отримані за дещо іншим, хоча і синусоїдальним, законом розподілу кривини. Цей закон мав наступний вигляд:

$$k(s) = A \sin^2(s) + \sin(s) + 1.$$

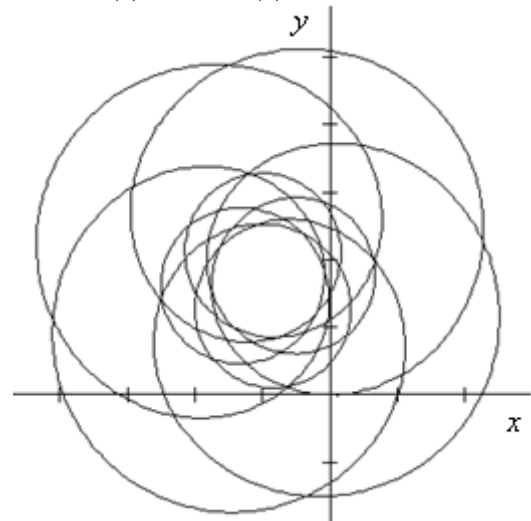


Рис. 11. $k(s) = 0,5 \sin^2(s) + \sin(s) + 1$

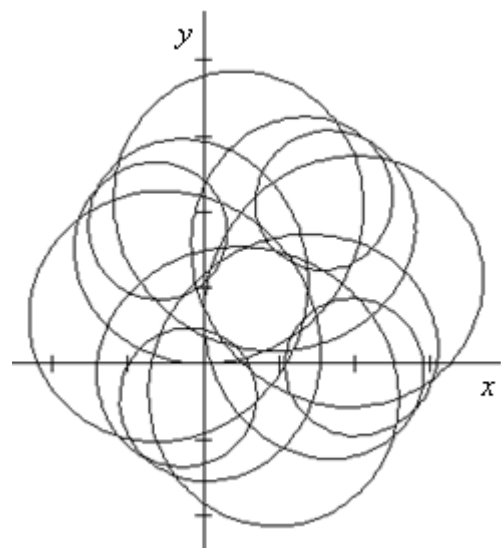


Рис. 12. $k(s) = 1,5 \sin^2(s) + \sin(s) + 1$

Як впливає з розгляду цих рисунків коефіцієнт A суттєво впливає на остаточний результат.

Розрахунки, пов'язані з моделюванням кривих та їх візуалізацією, проводилися із

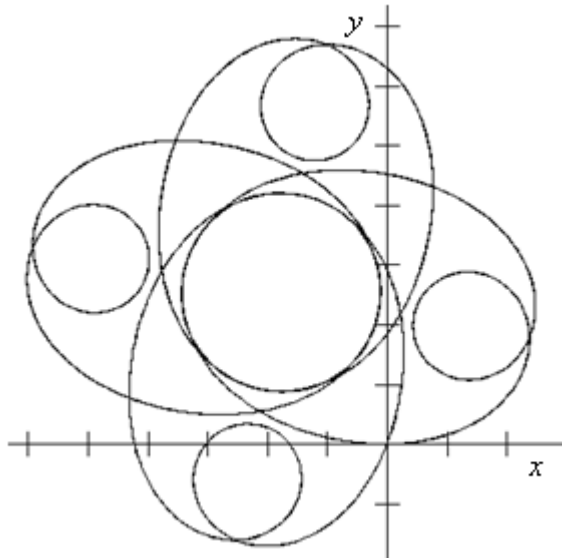


Рис. 13. $k(s) = 2,5 \sin^2(s) + \sin(s) + 1$

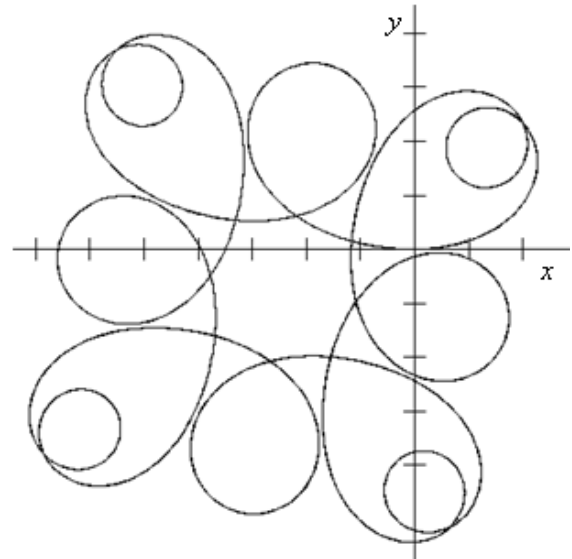


Рис. 14. $k(s) = 3,5 \sin^2(s) + \sin(s) + 1$

застосуванням спеціально розробленого програмного коду.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Практична реалізація запропонованого методу геометричного моделювання плоских кривих у натуральній параметризації із застосуванням синусоїдального закону розподілу кривини підтвердила його працездатність, його комп'ютерна реалізація з візуалізацією отриманих результатів наоч-

но продемонстрували можливість моделювання кривих у широкому діапазоні варіювання параметрів.

Подальші дослідження у запропонованій сфері моделювання кривих ліній можуть бути спрямовані на забезпечення моделювання таких кривих, які відповідають певним, наперед заданим умовам, що впливають з практики створення криволінійних обводів технологічно складних галузей промисловості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агарков, О.Ю. Моделювання кривих з синусоїдальною залежністю їх кривини від довжини дуги [Текст] / О.Ю. Агарков // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2014. – № 3 (50). – С. 554-558.
2. Анпілогова, В.О. Моделювання кривих ліній за допомогою управляючих ламаних, що визначають їх натуральні рівняння [Текст] / В.О. Анпілогова, С.І. Ботвіновська, А.Г. Анпілогов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 124-129.
3. Бадаєв, С.Ю. Інтегральні криві із заданим законом кривини [Текст] / С.Ю. Бадаєв // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4. – Том 18. – С. 132-134.
4. Борисенко, В.Д. Геометричне моделювання плоских криволінійних обводів за заданим параболічним законом розподілу їх кривини [Текст] / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.С. Комар // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – Вип. 4. – Том 35. – С. 26-31.
5. Борисенко, В.Д. Моделювання складених кривих із застосуванням лінійних законів розподілу їх кривини [Текст] / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, І.В. Устенко // Наукові праці: Науковометодичний журнал. – Вип. 254. Т. 266. Комп'ютерні технології. – Миколаїв: Видавництво ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 6-10.
6. Захарова, Т.М. Конструювання плоских і просторових кривих у функції натурального параметра [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна гра-

- фіка" / Тетяна Миколаївна Захарова; КНУБА – К., 2014. – 24 с.
7. Легета, Я.П. Опис та побудова замкнутої кривої за її натуральними рівняннями [Текст] / Я.П. Легета // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 219-228.
 8. Пилипака, С.Ф. Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів [Текст] / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Праці ХДУХТ, 2002. – Вип. 1. – С. 24-26.
 9. Устенко, С.А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
 10. Челомбітько, В.Ф. Геометричне моделювання візерунків поліграфічного захисту цінних паперів лініями зі змінною кривиною: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.03 "Технічна естетика" / Віктор Федорович Челомбітько; КНУБА. – К., 2015. – 22 с.
 11. Adams, J.A. The intrinsic method for curve definition [Text] / J.A. Adams // Computer Aided Design. – 1975. – Vol. 7, No 4. – P. 243-249.
 12. Pal, T.K. Two-dimensional curve synthesis using liner curvature elements [Text] / T.K. Pal, A.W. Nutbourne // Computer Aided Design. – 1977. – Vol. 9. – No 2. – P. 77-84.
 13. Schecter, A. Linear blending of curvature profiles [Text] / A. Schecter // Computer Aided Design. – 1978. – Vol. 10, No 2. – P. 101-109.

Ірина USTENKO
Mykolayiv

APPLICATION OF SINUSOIDAL DEPENDENCE OF CURVATURE FROM THE LENGTH OF THE ARC IN THE GEOMETRIC MODELING OF CURVES LINES

The paper discusses the problem of modelling plane curves, which are presented in a natural parameterisation and have a sinusoidal dependence of the curvature distribution on the arc length. A program of calculations and visualization of the results obtained on a PC has been developed.

Keywords: *modelling of curves, natural parameterization, sinusoidal dependence of the curvature distribution, arc length.*

Ирина УСТЕНКО
Николаев

ПРИМЕНЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КРИВИЗНЫ ОТ ДЛИНЫ ДУГИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КРИВЫХ ЛИНИЙ

В статье рассматривается вопрос моделирования плоских кривых, которые представляются в натуральной параметризации и имеют синусоидальную зависимость распределения кривизны от длины дуги. Разработана программа расчетов и визуализации полученных результатов на ПЭВМ.

Ключевые слова: *моделирование кривых, натуральная параметризация, синусоидальная зависимость распределения кривизны, длина дуги.*

Стаття надійшла до редколегії 12.10.2017