ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

УДК 514.18

Валерій БОРИСЕНКО
borisenko.valery@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0857-0708
м. Миколаїв

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ З КУБІЧНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ КРИВИНИ ВІД ДОВЖИНИ ДУГИ

В статті розглядається метод моделювання плоских кривих із застосуванням кубічної залежності розподілу кривини від довжини дуги. Задача розв'язується за умови, що відомі координати трьох вихідних точок і кути нахилу в них дотичних. Невідомі коефіцієнти кубічного закону розподілу кривини визначаються шляхом розв'язання задачі мінімізації проміжно отриманих точок від заданих. Розроблено програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів на ПЕОМ.

***Ключові слова**: комп'ютерне моделювання кривих, натуральна параметризація, кубічна залежність розподілу кривини, довжина дуги.*

Постановка проблеми

Останніми роками в проектуванні складних наукомістких виробів різних галузей промисловості відбулися суттєві якісні зміни. Спостерігається повсюдний перехід від традиційних засобів обробки графічної інформації до безпаперових технологій, які базуються на цифровому описі об'єктів, що проектуються і надалі виготовляються. Комп'ютерні технології дозволяють створювати числові моделі різних об'єктів. За їх допомогою проектант може переглядати на екрані комп'ютера ще фізично не існуючий об'єкт, отримати бажані його геометричні характеристики, внести, якщо необхідно, певні зміни, підготувати виробництво і, нарешті, виготовити той чи інший виріб на сучасних обробних центрах.

Інтенсивний розвиток комп'ютерних технологій та тривимірної графіки вимагають удосконалення існуючих і розвитку нових методів геометричного моделювання кривих ліній, адаптації їх до вирішення різноманітних практичних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У сучасній літературі з прикладної геометрії можна знайти достатньо робіт, в яких розглядаються питання моделювання плоских і просторових кривих із застосуванням їх натуральних рівнянь [1-5, 7-12, 14, 15]. Це свідчить про зацікавленість науковців досліджувати криві в натуральній параметризації. Але в більшості цитованих робіт при моделюванні кривих застосовується лінійний закон розподілу кривини від довжини дуги. Лише в роботі [3] її автори скористувалися квадратичним законом розподілу кривини. Підвищення вимог до модельованих кривих, збільшення при цьому об'єму вихідної інформації вимагає підвищення степеню залежності, якою має подаватися закон розподілу кривини.

Постановка завдання

Здійснити моделювання плоских кривих, поданих у натуральній параметризації та які проходять через три задані точки з відомими в них кутами нахилу дотичних. Задачу розв'язувати із застосуванням кубічного закону розподілу кривини від довжини дуги.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо геометричне моделювання плоского криволінійного обводу, що проходить через три задані точки з відомими в них кутами нахилу дотичних. Крива моделюється із застосуванням кубічного розподілу кривини:

$$k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d, \tag{1}$$

де a, b, c, d – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі моделювання кривої.

Кубічному розподілу кривини відповідає наступна залежність кута нахилу дотичної до кривої від довжини дуги обводу:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \frac{as^3}{4} + \frac{bs^2}{3} + \frac{cs}{2} + d \cdot s, \qquad (2)$$

де φ_0 – кут нахилу дотичної до кривої в початковій точці.

Параметричні рівняння дуги криволінійного обводу, що задана за допомогою кубічного закону розподілу кривини (1), з урахуванням (2) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \\ &+ \int_0^s \cos\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds; \\ y(s) &= y_0 + \\ &+ \int_0^s \sin\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds, \end{aligned} \qquad (3)$$

де x_0, y_0 – координати початкової точки модельованого криволінійного обводу.

Кубічний закон розподілу кривини кривої від довжини дуги застосовується у тих випадках, коли необхідно забезпечити проходження кривої через три задані точки площини з відомими в них кутами нахилу дотичних, або коли треба при двох заданих точках і відомих у них кутах нахилу дотичних забезпечити в цих точках нульові значення других похідних, що еквівалентно завданню нульових значень кривини в вихідних точках.

Для визначення координат точок криволінійного обводу, який генерується із застосуванням залежності (1), необхідно знати довжину кривої S, графік розподілу кривини $k(s)$, координати трьох точок x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2, а також кути нахилу в них дотичних φ_0, φ_1 і φ_2 (рис. 1).

Визначимо коефіцієнти залежності (1), яка у підсумку забезпечить проходження кривої через ці три точки із заданими значеннями кутів нахилу в них дотичних.

Для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо рівняння (3) для точок 1 і 2. Матимемо:

точка 1

$$x_1 = x_0 + \int_0^s \cos\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds;$$

$$y_1 = y_0 + \int_0^s \sin\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds,$$

точка 2

$$x_2 = x_0 + \int_0^s \cos\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds;$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^s \sin\left[\varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s\right] ds,$$

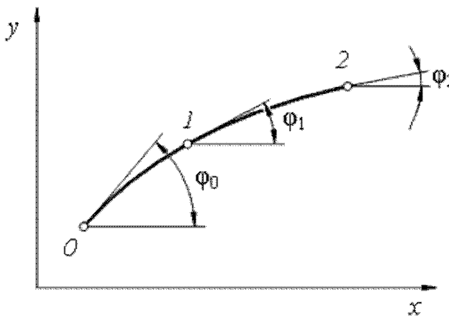

Рис. 1. Розташування точок для моделювання кривої з кубічним розподілом кривини

У цих виразах, окрім коефіцієнтів a, b, c, d, невідомими є довжини кривих обводів S_1 і S_2, які вимірюються від нульової точки до точок 1 і 2, відповідно.

Для зменшення кількості невідомих запишемо рівняння (2) для точок 1 і 2, в яких також відомі кути нахилу дотичних:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{aS_1^4}{4} + \frac{bS_1^3}{3} + \frac{cS_1^2}{2} + d \cdot S_1;$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{aS_2^4}{4} + \frac{bS_2^3}{3} + \frac{cS_2^2}{2} + d \cdot S_2.$$

Звідки отримуємо

$$a = \frac{\Phi_2 S_2 - \Phi_1 S_1}{S_2 - S_1} + \frac{2c}{S_1 S_2} + \frac{4d(S_1 + S_2)}{S_1^2 S_2^2};$$

$$b = \frac{3S_1 S_2 (\Phi_2 - \Phi_1)}{4(S_1 - S_2)} - \frac{3c(S_1 + S_2)}{S_1 S_2} -$$

$$-\frac{3d\left(S_1^2+S_1S_2+S_2^2\right)}{S_1^2S_2^2},$$

де $\Phi_1=\dfrac{4(\varphi_1-\varphi_0)}{S_1^4}$; $\Phi_2=\dfrac{4(\varphi_2-\varphi_0)}{S_2^4}$.

Наявність виразів для коефіцієнтів a і b дозволила зменшити кількість невідомих до чотирьох. Визначення цих невідомих (коефіцієнтів c і d виразу (1) і довжин дуг S_1 і S_2) здійснимо розв'язанням оптимізаційної задачі, пов'язаної з мінімізацією відхилень проміжно побудованої кривої (при деяких значеннях невідомих коефіцієнтів і довжин дуг) від заданих точок 1 і 2.

Оскільки в задачі, що розв'язується, існують два критерії, бо крива, яка вийшла з точки 0 має пройти спочатку через точку 1, а потім через точку 2, то вона відноситься до класу багатокритеріальних задач. У цій роботі для її розв'язання застосовано метод Гермейера [6], який передбачає використання для цільової функції (у нашому випадку існують дві цільові функції W_i) єдиного показника Q, в якому цим складовим приписують різну вагу λ_i, пронормовану на 1. Тобто

$$Q=\sum\lambda_iW_i,\ \sum\lambda_i=1.$$

Отже, в оптимізаційній задачі використовувався наступний вираз для цільової функції:

$$Q=\lambda_1\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(y_1'-y_1)^2}+ \\ +\lambda_2\sqrt{(x_2'-x_2)^2+(y_2'-y_2)^2}, \tag{4}$$

де λ_1 и λ_2 – нормувальні коефіцієнти, сума яких дорівнює одиниці; x_1', y_1' і x_2', y_2' – координати точок, аналогічних точкам 1 і 2, але отримані при проміжних значеннях невідомих величин варійованих під час розв'язання оптимізаційної задачі.

Введення в цільову функцію нормувальних коефіцієнтів λ_i дозволяє двокритеріальну задачу звести до однокритеріальної. У нашому випадку результуюча крива повинна пройти через дві задані точки 1 і 2.

Для розв'язання оптимізаційної задачі був застосований високоефективний алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований в роботі [13].

На підставі запропонованого методу моделювання плоских кривих у натуральній параметризації з кубічним законом розподілу кривини розроблено програму розрахунків та візуалізації отриманих результатів на ПЕОМ.

Результати розв'язання тестової задачі наведені на рис. 2. На цьому рисунку показані три криві лінії, які будувалися з різними вихідними даними по кутах нахилу дотичних у заданих точках і координатах x і y точок 1 і 2. У нульовій точці кут нахилу дотичної зменшувався від 90º до 80º з кроком 5º. У точці 1 цей кут зростав від 40º до 60º з кроком 10º, і нарешті, в точці 2 кут нахилу дотичної зростав від 10º до 20º з кроком 5º. У вихідних точках відрізками прямих ліній показані дотичні до модельованих кривих. Розрізняти криві за значеннями кутів нахилу дотичних не дуже складно.

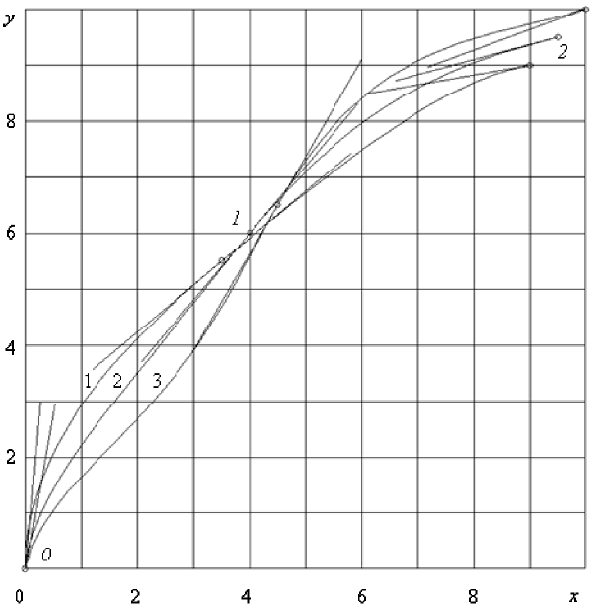

Рис. 2. Тестові криві з кубічним законом розподілу кривини

Як кажуть, для чистоти експерименту також змінювалися координати точок 1 і 2 з поступовим синхронним зростанням з кроком 0,5, що легко простежується при розгляді рис. 2.

Цифрове позначення кривих виконано з метою подальшого їх узгодження з графіками розподілу кривини.

Незважаючи на доволі суворі вимоги до вихідних даних усі криві були змодельовані, вони точнісінько пройшли через точки 1 і 2 та мали в них відповідні кути нахилу дотичних. Зазначимо, що у виразі цільової функції були застосовані наступні значення нормувальних коефіцієнтів: $\lambda_1 = 0{,}8$ і $\lambda_2 = 0{,}2$. Виявилося, що провести криві через точку 1 складніше, ніж через точку 2. Цим пояснюється різниця в величинах нормувальних коефіцієнтів.

На рис. 3 наведені графіки розподілу кривини кривих змодельованих і показаних на рис. 2. За вісь абсцис на цьому рисунку прийнята відносна довжина дуги кривої. Цифрами позначена нумерація кривих, узгоджена з номерами кривих, показаних на рис. 2.

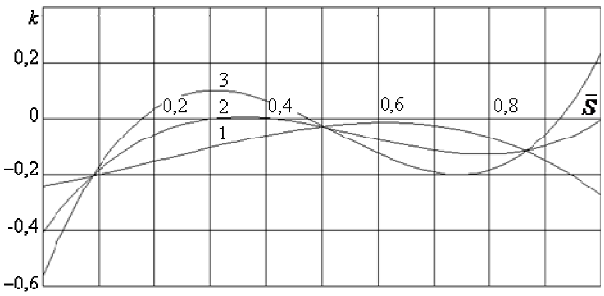

Рис. 3. Тестові криві з кубічним законом розподілу кривини

Щодо графіків розподілу кривини можна зробити наступні висновки. По-перше, ці графіки перетинаються в точках з однаковими значеннями абсцис. По-друге, зображені криві є кривими третього порядку. Про це яскраво свідчить крива, позначена цифрою 3. Вона тричі перетинає вісь абсцис, що математично строго підтверджує третій степінь її рівняння.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Практична реалізація запропонованого методу геометричного моделювання плоских кривих у натуральній параметризації із застосуванням кубічного закону розподілу кривини підтвердила його працездатність. Плідною виявилася ідея визначення невідомих коефіцієнтів законів розподілу кривини шляхом мінімізації відхилення вихідних точок від проміжно отриманих їх аналогів при розв'язанні оптимізаційної задачі. Подальші зусилля в сфері цих досліджень мають бути спрямовані на їх впровадження, адаптуючи до потреб практики, зокрема, при моделюванні обводів виробів технологічно складних галузей промисловості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анпілогова, В. О. Моделювання кривих ліній за допомогою управляючих ламаних, що визначають їх натуральні рівняння [Текст] / В. О. Анпілогова, С. І. Ботвіновська, А. Г. Анпілогов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К. : КДТУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 124-129.
2. Борисенко, В. Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків : ХДУХТ, 2004. – Вип. 5. – С. 30-34.
3. Борисенко, В.Д. Геометричне моделювання плоских криволінійних обводів за заданим параболічним законом розподілу їх кривини [Текст] / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.С. Комар // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – Вип. 4. – Том 35. – С. 26-31.
4. Борисенко, В. Д. Моделювання складених кривих із застосуванням лінійних законів розподілу їх кривини [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, І. В. Устенко // Наукові праці: Науково-методичний журнал. – Вип. 254. Т. 266. Комп'ютерні технології. – Миколаїв: Видавництво ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 6-10.
5. Борисенко, В. Д. Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації [Електронний ресурс] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко // Розвиток інформаційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції (м. Миколаїв, 22 – 24 вересня 2016 р.). – Миколаїв : МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2016. – С. 110-113.
6. Кини, Р.П. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения [Текст] / Р.П. Кини, Х. Райха. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

7. Захарова, Т. М. Конструювання плоских і просторових кривих у функції натурального параметра [Текст]: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Тетяна Миколаївна Захарова; КНУБА – К., 2014. – 24 с.
8. Легета, Я.П. Опис та побудова замкнутої кривої за її натуральними рівняннями [Текст] / Я.П. Легета // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 219 – 228.
9. Пилипака, С. Ф. Графо-аналитический метод приближенного построения кривой по заданному натуральному уравнению [Текст] / С. Ф. Пилипака // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К. : Будівельник, 1989. – Вып. 48. – С. 44 – 45.
10. Пилипака, С.Ф. Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів [Текст] / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: Праці ХДУХТ, 2002. – Вип. 1. – С. 24 – 26.
11. Устенко, С.А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
12. Adams, J.A. The intrinsic method for curve definition [Text] / J.A. Adams // Computer Aided Design. – 1975. – Vol. 7, No 4. – P. 243 – 249.
13. Hooke, R. Direct search solution of numerical and statistical problems [Text] / R. Hooke, T.A. Jeeves // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, No 2. – P. 212-229.
14. Pal, T.K. Two-dimensional curve synthesis using liner curvature elements [Text] / T.K. Pal, A.W. Nutbourne // Computer Aided Design. – 1977. – Vol. 9. – No 2. – P. 77–84.
15. Schecter, A. Linear blending of curvature profiles [Text] / A. Schecter // Computer Aided Design. – 1978. – Vol. 10, No 2. – P. 101 – 109.

Valery BORISENKO
Mykolayiv

COMPUTER MODELLING OF CURVES LINES IN NATURAL PARAMETERIZATION WITH CUBIC DEPENDENCE OF CURVATURE FROM THE LENGTH OF THE ARC

The method of modelling plane curves using the cubic dependence of the curvature distribution on the arc length is considered. The problem is solved provided that the coordinates of the three initial points and the slopes of the tangents in them are known. The unknown coefficients of the cubic curvature distribution law are determined by solving the problem of minimizing the intermediate points obtained from the given ones. A program of calculations and visualization of the results obtained on a PC has been developed.

***Keywords**: computer modelling of curves, natural parameterization, cubic dependence of curvature distribution, arc length.*

Валерий БОРИСЕНКО
Николаев

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ В НАТУРАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ С КУБИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КРИВИЗНЫ ОТ ДЛИНЫ ДУГИ

В статье рассматривается метод моделирования плоских кривых с использованием кубической зависимости распределения кривизны от длины дуги. Задача решается при условии, что известны координаты трех исходных точек и углы наклона в них касательных. Неизвестные коэффициенты кубического закона распределения кривизны определяются путем решения задачи минимизации промежуточно полученных точек от заданных. Разработана программа расчетов и визуализации полученных результатов на ПЭВМ.

***Ключевые слова**: компьютерное моделирование кривых, натуральная параметризация, кубическая зависимость распределения кривизны, длина дуги.*

Стаття надійшла до редколегії 30.09.2017