ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

УДК 514.18
*Олена КРЕМЕНЧЕНКО*
elena.krem.elena@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0160-7114
*Єлизавета ЗАВАЛКО*
asklepia2012@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4401-1388
*Анатолій ХОМЧЕНКО*
khan@kma.mk.ua
м. Миколаїв

# КОГНІТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕРЕНДИПОВОГО ЕЛЕМЕНТА Q12 НА ОСНОВІ КУБАТУРИ ГАУССА

*У статті представлено простий і наглядний спосіб перетворення обчислювального шаблону кубатури Гаусса-Лежандра в серендиповий елемент бікубічної інтерполяції з кутовими вузлами, які вільні від навантажень. Показано унікальний випадок, коли достатньо побачити графічний портрет ліній нульового рівня, щоб апріорі встановити нульове значення функції випадкового вектора.*
***Ключові слова***: *кубатури Гаусса, скінченний елемент серендипового сімейства, нестандартні базисні функції, бікубічна інтерполяція.*

## Постановка проблеми

Поява нових методів моделювання і моделей серендипових елементів значною мірою була пов’язана з фізичною неадекватністю стандартних моделей Ергатудіса, Айронса та Зенкевича. Мова йдеться про протиприродний спектр вузлових навантажень від одиничної масової сили елемента, наприклад, на бікубічному елементі Q12 навантаження на проміжний вузол не повинне перевищувати 0,125. При такому розподілі зникають від’ємні навантаження в кутових вузлах і з’являються фізично правдоподібні моделі. Зрозуміло, що розподіленні навантаження залежать не тільки від кількості матеріальних точок-вузлів, але й від їх розташування. Зазвичай розглядають їх рівномірний розподіл.

Реабілітація серендипового сімейства в очах прихильників механічних аналогій починається з нульового навантаження в кутових вузлах. Цей випадок цікавий ще й тим, що об’єм між "нависаючою" частиною інтерполюючої поверхні і площиною носія в точності дорівнює об’єму між цією площиною і «провисаючою» частиною поверхні.

Інтерполяційний багаточлен можна розглядати як функцію випадкового вектора з нульовим математичним сподіванням. Ця корисна інтерполяція усуває протиприродність у вузлових навантаженнях і наповнює здоровим глуздом стандартні моделі. Зауважимо, що ці навантаження часто застосовують в якості вагових коефіцієнтів кубатурних формул для наближеного обчислення кратних інтегралів (по Ньютону-Котесу).

На практиці зазвичай не рекомендується використовувати кубатури з від’ємними вагами, тому що це може збільшити похибку обчислень. В цьому ще одна причина для створення альтернативних базисів серендипових елементів.

Відомо, що стандартні моделі були винахідливо підібрані як ефективний інструмент ізопараметричних перетворень на площині та в просторі. В цьому простежується спроба застосувати геометричне моделювання в теорії серендипових апроксимацій.

Нижче описана процедура використання когнітивних властивостей графічного портрета ліній нульового рівня для прямого

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

моделювання Q12 з кутовими вузлами, вільними від навантажень. Багато хто знає, що в лагранжевому базисі бікубічної інтерполяції таких поліномів немає, а в серендипових, як виявилось, вони є. Проте, тут описано унікальний випадок, коли достатньо побачити графічний портрет ліній нульового рівня, щоб апріорі встановити нульове значення функції випадкового вектора.

### Аналіз попередніх публікацій

Кількість публікацій по методу скінченних елементів (МСЕ) продовжує рости так швидко, що будь-яка спроба скласти повний список порушеної теми, стає неможлива. Читачам, які цікавляться математичними аспектами МСЕ, можна рекомендувати книгу [1]. Книга [2] призначена для інженерно-орієнтованих читачів, які цікавляться задачами прикладного характеру. Ознайомлення з МСЕ краще починати з книги [3], яка має навчально-методичний характер. Модельний ряд серендипових елементів Q12 з кутовими вузлами, які вільні від навантажень, наведено в статті [4].

Квадратури Гаусса [1, 3] були введені в 1866 році для інтервалу [-1;1]. В стандартних програмах інтегрування вони застосовуються з 1967 року, витіснивши квадратури Ньютона-Котеса. В МСЕ застосовуються кубатури Гаусса-Лежандра для наближеного обчислення кратних інтегралів. Підвищений інтерес користувачів до цих формул пояснюється найвищою алгебраїчною точністю обчислень.

### Мета статті

Мета статті – показати простий і наглядний спосіб перетворення обчислювального шаблону кубатури Гаусса-Лежандра в серендиповий елемент бікубічної інтерполяції з кутовими вузлами, які вільні від навантажень.

### Основна частина

Розглянемо скінченний елемент (СЕ) Q12 – це квадрат 2x2 з 12-ти рівномірно розташованими вузлами на границі (рис. 1), оснащений набором (базисом) з 12-ти функцій впливу $N_i(x,y)$.

Функції $N_i(x,y)$ задовольняють умовам інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k,y_k)=\begin{cases}1, i=k,\\ 0, i\neq k;\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{12} N_i(x,y)=1, \quad (1)$$

де $i$ – номер функції, $k$ – номер вузла.

Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа має вигляд:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{12} N_i(x,y)\cdot f_i, \quad (2)$$

де $f_i$ – вузлові значення інтерполюючої функції.

На рис. 1 показано портрети ліній нульового рівня кутових поверхонь $N_1(x,y)$ елемента Q12. Лінії нульового рівня $x=1$, $y=1$ зливаються зі сторонами квадрата. Області від'ємних значень $N_1(x,y)$ заштриховано. Вузли Гаусса на шаблоні $C$ позначені хрестиками.

Система двох випадкових величин $(x,y)$ геометрично інтерполюється як випадкова точка з координатами $(x,y)$ на площині $xOy$ або як випадковий вектор, спрямований з початку координат в точку $(x,y)$, складові якого представляють собою випадкові величини $x$ та $y$. Для серендипового СЕ функція розподілу двох випадкових величин виражається формулою $\Phi(x,y)=\frac{1}{4}(1+x)(1+y)$, густина розподілу дорівнює $\varphi(x,y)=\Phi''_{xy}=\frac{1}{4}$.

Математичне сподівання функції впливу, як функції випадкового вектора:

$$m_i=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i(x,y)dxdy, \ i=1,2,\dots,12. \quad (3)$$

Саме ця формула застосовується в МСЕ для обчислення навантаження, зосередженого у вузлі $i$.

Виявляється, що вузлове навантаження має просту та зрозумілу ймовірнісну інтерпретацію, а з точки зору геометрії $m_i$ можна визначити як середню аплікату поверхні $N_i(x,y)$ в межах СЕ. Корисний ме-

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

тод інтерпретації зазвичай супроводжує «суперечку моделей» (по влучному вислову Е. С. Вентцель). Литовський математик Р. Кашуба цілковито правильно вважає, що метод інтерпретацій сприяє розповсюдженню демократії, так як розвиває здібність змінювати точку зору.

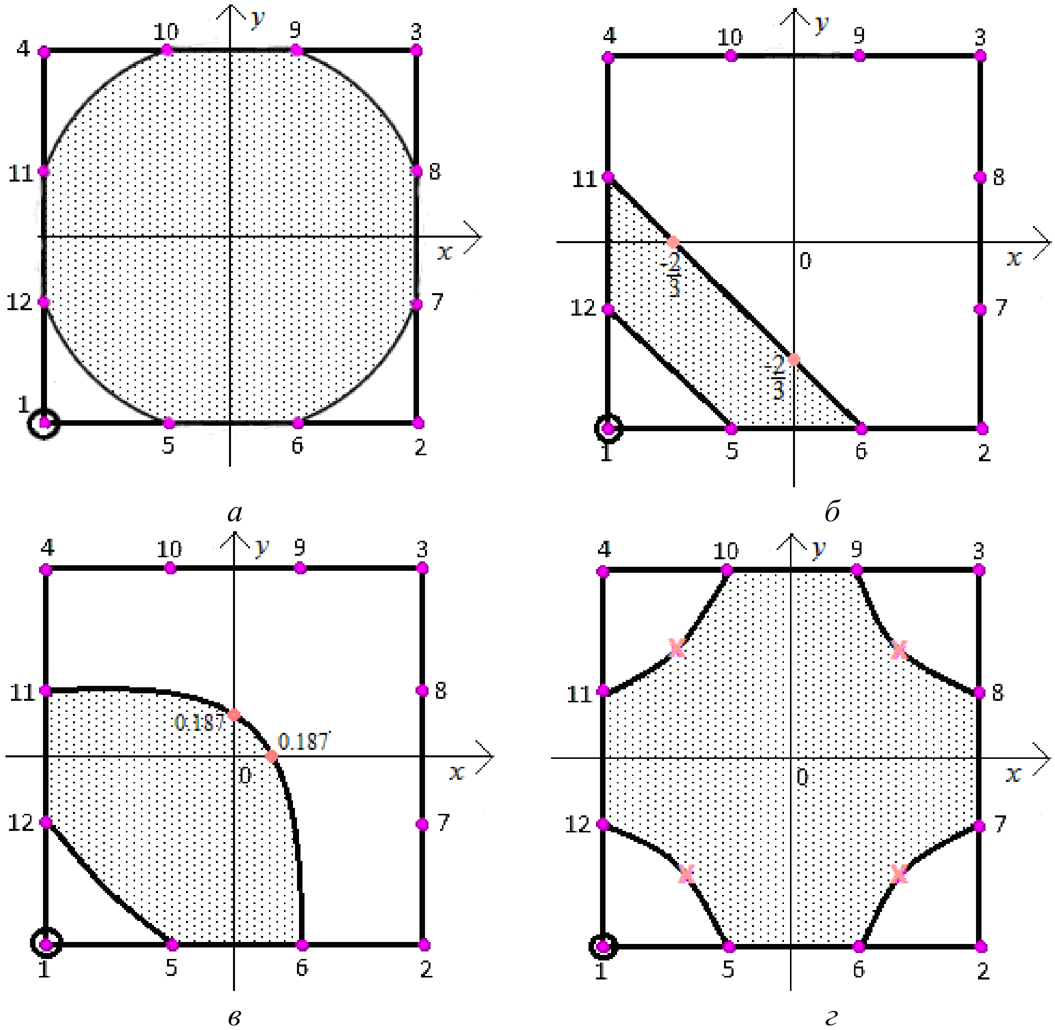


Рис. 1. Лінії нульового рівня кутових поверхонь $N_1(x,y)$:
*а* – стандартна модель S; *б*, *в*, *г* – альтеративні моделі A, B, C відповідно

Тепер розглянемо кубатуру Гаусса-Лежандра, яка забезпечує точне інтегрування полінома третього порядку по кожній змінній. Обчислювальний шаблон – це квадрат ($|x| \le 1, |y| \le 1$) з 4-ма вузлами інтегрування в середині області. Координати вузлів: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер замість (3) маємо іншу обчислювальну формулу:

$$m_i = \frac{1}{4}\left(N_i\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+ N_i\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+N_i\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+ N_i\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right). \tag{4}$$

Для стандартної моделі $S$ обчислення дають $m_1 = -\frac{1}{8}$. Спеціалісти по будівельній механіці [2] вважають від'ємне навантаження важливим недоліком, проте радять змиритись з цим.

Моделі A та B з'явились в 1982 році [5, 6]. Для моделі A $m_1 = -\frac{1}{8}$, для моделі B $m_1 = 0$. Модель B є результатом арифметичного усереднення моделей S та A. Необхідно зауважити, що лінії нульового рівня і області від'ємних (додатних) значень $N_1(x, y)$ перших трьох моделей на рис. 1 не дозволяють a priori встановити значення $m_1$. Доводиться конструювати поліном $N_1(x, y)$ і обчислювати $m_1$ за формулою (3) або (4). Найбільший інтерес являє модель C. Ми прагнули сконструювати альтернативну модель, яка максимально наслідує властивості стандартної моделі, замінивши окружність парою рівнобічних гіпербол $xy = \pm\frac{1}{3}$. Отримано виключно інформативний портрет ліній нульового рівня. Гіперболи нульового рівня проходять і через вузли інтегрування обчислювального шаблона кубатури Гаусса і через вузли інтерполяції носія Q12. А це означає, що в формулі (4) кожен доданок правої частини дорівнює нулю. Висновок очевидний: в цьому випадку $m_1 = 0$. Зазначимо, що модель C була відкрита ще в 1997 році, проте тоді ми не помітили цього зв'язку між Q12 і кубатурою Гаусса.

Нижче наведено характерні функції впливу $N_1(x, y)$ та $N_5(x, y)$, щоб читач зміг перевірити виконання умов (1), а також умов міжелементної неперервності.

*Модель S*

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(9\left(x^2 + y^2\right) - 10\right),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = \frac{9}{32}\left(1-x^2\right)(1-y)(1-3x),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6,\ldots,12$.

*Модель A*

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(9(1+x+y)^2 - 1\right),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = \frac{9}{32}\left(1-x^2\right)(1-y)(-3x-y),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6,\ldots,12$.

*Модель B*

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\times$$
$$\times\left(9\left(x^2 + y^2 + xy + x + y\right) - 1\right),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = \frac{9}{64}\left(1-x^2\right)(1-y)(-6x-y+1),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6,\ldots,12$.

*Модель C*

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(9x^2y^2 - 1\right),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = \frac{9}{64}\left(1-x^2\right)(1-y)(-6x-y+1),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6,\ldots,12$.

Тепер за формулою зваженого усереднення можна отримати безліч моделей з невагомими кутовими вузлами. В якості «батьківської» пари обираємо моделі B і C. «Дочірня» модель будується за формулою:

$$\overline{N_i}(x, y) = \alpha N_i^{st}(x, y) + (1-\alpha) N_i^{alt}(x, y). \quad (5)$$

Якщо $\alpha = 1$, формула (5) дає модель B, при $\alpha = 0$ «дочірня» модель і модель C співпадають. Інші α змінюють портрет ліній нульового рівня, проте у всіх випадках «дочірня» модель стійко успадковує інтегральну характеристику «батьківської» пари: $m_i = 0$, $i = 1,\ldots,4$ $m_i = 0$. Нескладно помітити й інші характеристики, які успадковує «дочірня» модель.

## Висновки

Існує безліч моделей Q12 з неваговими кутовими вузлами. Особливу цікавість являє вивчення можливості конструювання моделей Q12 з неваговими проміжними вузлами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1997. – 350 с.
2. Ergatoudis, I. Curved isoperimetric «quadrilateral» elements for finite element analysis [Text] / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. – 1968. – 4. – P.31-42.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Хомченко, А. Н. Стереометрія ізопараметричних апроксимацій: нестандартні базиси [Текст] / А. Н. Хомченко, О. С. Кременченко, Є. А. Завалко // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – №2, жовтень 2016. – Миколаїв: МНУ імені В.О. Сухомлинського, 2016. – С. 106-110.
5. Хомченко, А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных [Текст] / А. Н. Хомченко // 3-й Респ. симпозиум по диффер. и интегр. уравнениям: Тез. докладов. – Одесса, 1982. – С. 257-258.
6. Хомченко, А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ [Текст] / А.Н. Хомченко. – Ивано-Франковск, 1982. – 6 с. Деп. в ВИНИТИ, №1213.

***Elena KREMENCHENKO, Elizaveta ZAVALKO, Anatoly KHOMCHENKO***
Mykolayiv

### COGNITIVE MODELING OF SERENDIPITY ELEMENTS Q12 BASED ON GAUSSIAN CUBATURES

*The article provides a simple and intuitive method of transformation computing template of Gauss-Legendre's cubature into serendipity element of bicubic interpolation with corner nodes which are load-free. A unique case is shown, when enough to see a graphic portrait of zero lines to establish a priori null value of the function of random vector.*

***Keywords**: Gaussian cubature, the finite element of serendipity family, non-standard basis functions, bicubic interpolation.*

***Елена КРЕМЕНЧЕНКО, Елизавета ЗАВАЛКО, Анатолий ХОМЧЕНКО***
Николаев

### КОГНИТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРЕНДИПОВА ЭЛЕМЕНТА Q12 НА ОСНОВЕ КУБАТУРЫ ГАУССА

*В статье представлен простой и наглядный способ перевоплощения вычислительного шаблона кубатуры Гаусса-Лежандра в серендипов элемент бикубической интерполяции с краеугольными узлами, которые свободные от нагрузок. Показано уникальный случай, когда достаточно увидеть графический портрет линий нулевого уровня, чтобы априори устанавливать нулевое значение функции случайного вектора.*

***Ключевые слова**: кубатуры Гаусса, конечный элемент серендипова семейства, нестандартные базисные функции, бикубическая интерполяция.*

Стаття надійшла до редколегії 09.10.2017