

УДК 658.512:514.1; 004.942

**Володимир ДАНИЛЕНКО**

[vladdanyl@ukr.net](mailto:vladdanyl@ukr.net)

ORCID: 0000-0003-4952-7498

**Ольга ШОМАН**

[olgasho@ukr.net](mailto:olgasho@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-3660-0441

м. Харків

## РОЗРАХУНКОВІ СІТКИ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

*Розглянуто застосування деяких видів розрахункових сіток, які одержано за допомогою геометричних перетворень. Наведено приклади. Показано результати моделювання конформних сіток для деяких впроваджень.*

**Ключові слова:** геометричне моделювання, геометричні перетворення, проєкції, розрахункові сітки, конформні відображення.

### Постановка проблеми

Взаємооднозначність відображень фізичної та обчислювальної складових забезпечують методи послідовних конформних відображень і диференціальний метод на основі розв'язання еліптичних рівнянь у частинних похідних. В інших випадках взаємооднозначність відображень не гарантується, тому потрібен інтерактивний процес генерації сіток з використанням графічних комп'ютерних засобів. При моделюванні як зовнішніх, так і внутрішніх процесів може застосовуватися будь-який метод побудови сіток. Для практики найбільш цікавими є ортогональні і конформні сітки.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Відомо, що до області використання розрахункових сіток відносяться, скажімо, формування картографічних проєкцій [1], виконання картин оглядовості просторових об'єктів [2] та ін. При цьому, якщо картографічна проєкція (рис. 1) (математично визначений спосіб відображення поверхні еліпсоїда на площину) встановлює аналітичну залежність (відповідність) між географічними координатами точок земного еліпсоїда і прямокутними координатами проєкцій тих же

точок на площину (мапу), то побудова картин оглядовості просторових об'єктів допомагає у проєктуванні, наприклад, транспортних засобів з визначенням зорового сприйняття оточуючого простору водіями та пасажирями (рис. 2) або операторами сільськогосподарської техніки (рис. 3) і т. п.

В наведених прикладах використано координатні сітки, які є результатом геометричних перетворень моделей об'єктів у різних системах координат. Сітки досить часто допомагають розв'язувати важливі позиційно-метричні задачі в багатьох впровадженнях.

Розширює діапазон впроваджень розрахункових сіток розроблення способів і методів моделювання конформних сіток, які є регулярними розрахунковими сітками. Під регулярністю розуміють те, що сітка є упорядкованою за визначеними правилами і має так звані «осі» криволінійної системи координат – сіткові напрями. У перетвореному (обчислювальному) просторі елементами сітки є топологічні прямокутники (двовимірний випадок) або паралелепіпеди (тривимірний випадок).

В [3] було проведено огляд властивостей і способів генерації розрахункових сіток. Наведемо деякі відомості.

### Постановка завдання

Для генерації розрахункових регулярних сіток можливо використовувати конформні відображення. З ними пов'язано розв'язання задач визначення параметрів фізичних полів на основі теорії функцій комплексної змінної [3]. Конформні сітки слугують перетворенню комплексних змінних. Звичай будуються двовимірні конформні сітки, застосовуючи два підходи [4, 5]: для добре обтічних тіл викорис-

товують послідовність відображень поверхні, які «зводять» поверхню до кола одиничного радіуса, а для тіл довільної форми прийнятним є однокрокове перетворення Крістоффеля – Шварца. На рис. 4 наведено результат виконання складеного алгоритму конформного відображення за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца [6]. Зауважимо, що метод комплексних змінних дозволяє одержати аналітичні функції перетворення.

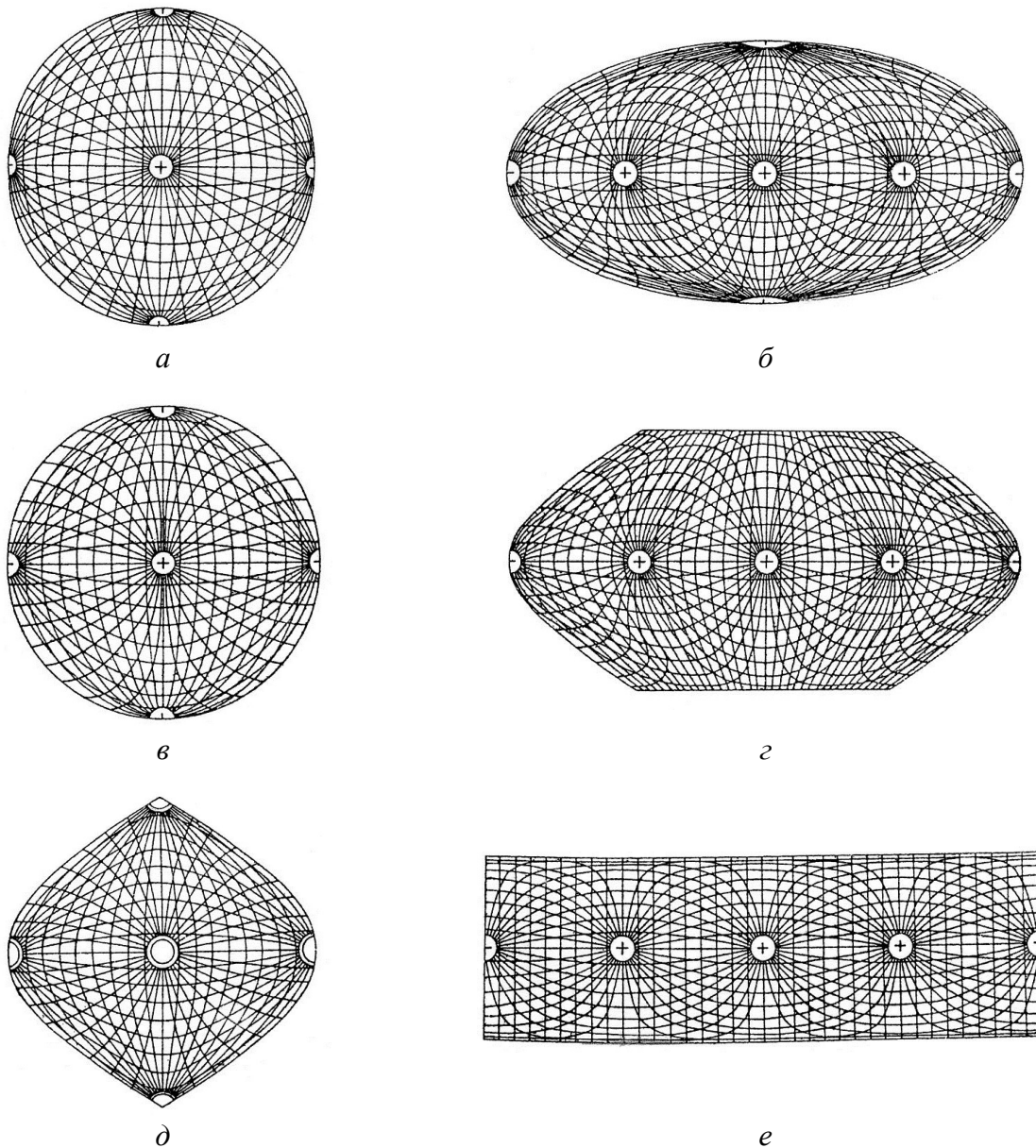


Рис. 1. Картографічні проекції [1]: *a* – проекція Ламберта, *б* – проекція Аїтова–Гаммера, *в* – проекція Молльвейде, *г* – проекція Еккерта, *д* – проекція Сансона, *е* – проекція ізоциліндрична

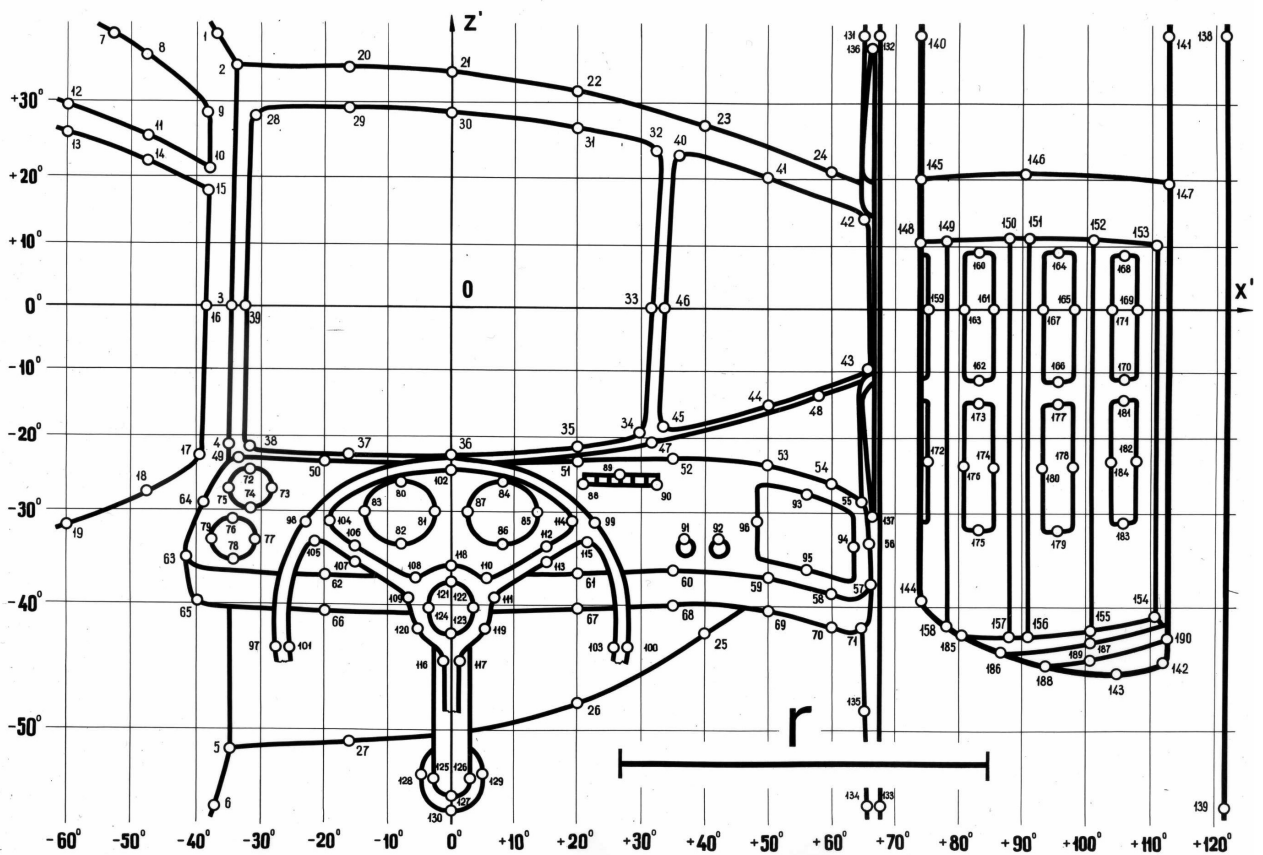


Рис. 2. Розрахункова сітка визначення зорового сприйняття оточуючого простору водія та пасажирами

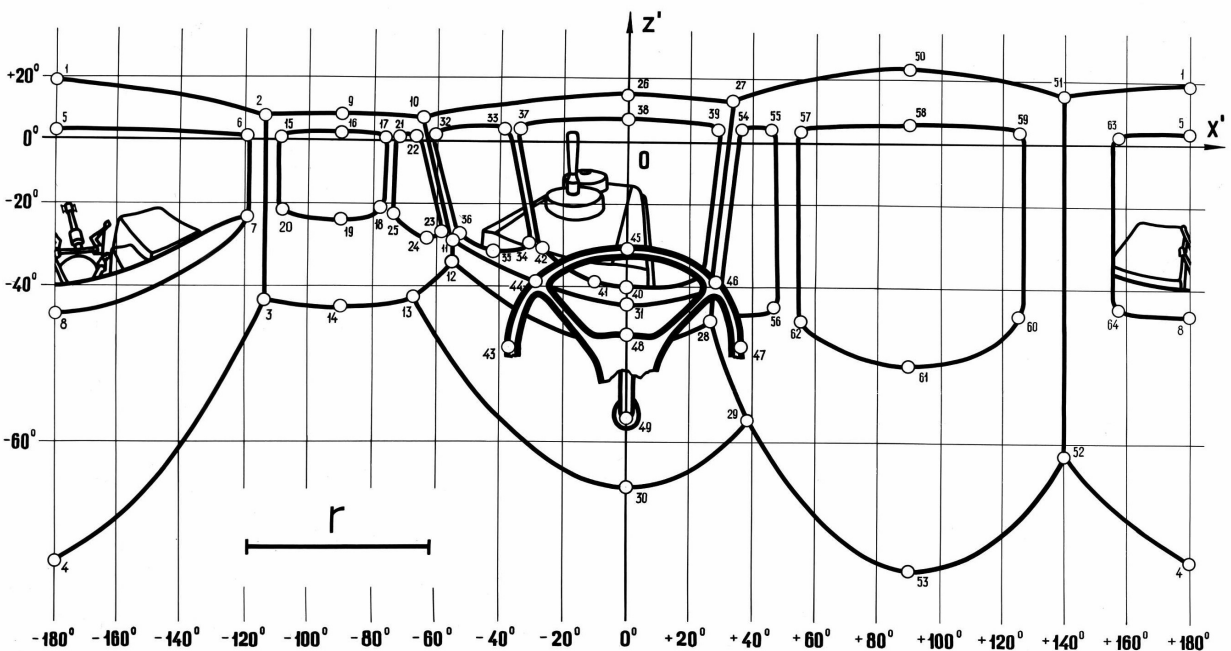


Рис. 3. Розрахункова сітка визначення зорового сприйняття оточуючого простору операторами сільськогосподарської техніки

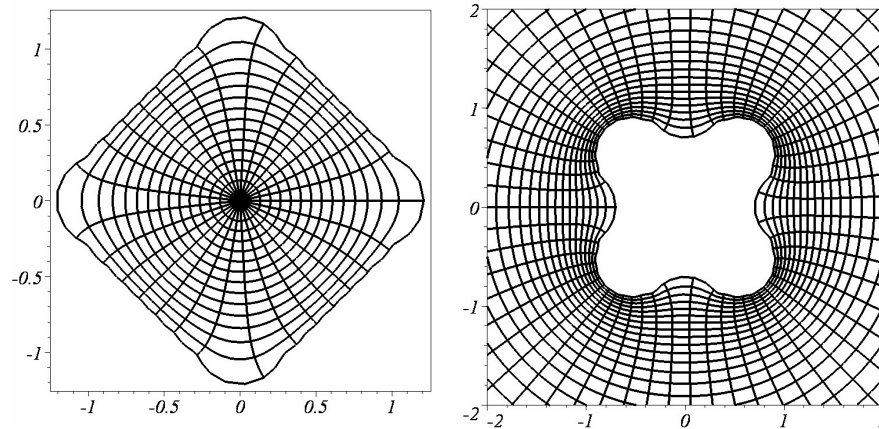


Рис. 4. Приклади результатів конформних відображень за допомогою інтеграла Крістоффеля – Шварца

### Виклад основного матеріалу

На початкових етапах досліджень (раніше) конформні перетворення з використанням функцій комплексної змінної застосовувалися для розрахунку тільки потенційних течій навколо тіл складної форми. Згодом такі перетворення для побудови сіток здійснювали вже без обмежень щодо типу течії.

До загальних недоліків побудови сіток конформними відображеннями з використанням комплексних змінних належить обмеження на розмірність сіток, адже вони є переважно двовимірними. Існують підходи до побудови просторових сіток, наприклад [7], однак у тривимірному випадку цілком конформні сітки можуть бути отримані хіба що в окремих випадках. Недоліком тут є нетривіальність вибору послідовності конформних відображень для тіл складної конфігурації. Прямі перетворення границь області від фізичної до обчислювальної площини досить ефективні, проте обернені перетворення такими не є [5]. Вони полягають у встановленні відповідності між сітковими вузлами обчислювальної і фізичної областей. Тому, в загальному випадку, визначення внутрішніх вузлів сітки здійснюється шляхом числового розв'язання еліптичної системи з граничними умовами, визначеними при прямому перетворенні, що також є певним недоліком методу.

Побудова цілком конформних або ортогональних сіток можлива тільки у двовимірному випадку, а для трьох вимірів виконання зазначених умов є дуже обмеженим. Конформні сітки будують, як правило, на основі перетворень комплексних змінних і розв'язання еліптичних рівнянь у частинних похідних. Крім того, в роботі [8] до недоліків конформних сіток віднесено те, що згущення вузлів сітки всередині фізичної області не завжди відбувається необхідним чином для розв'язання задач обчислювальної гідроаеродинаміки; сітки є дуже чутливими до зміни зовнішніх границь (невелика зміна границі веде до необхідності перебудови сітки); подвійне обмеження на ортогональність і масштабний фактор вносять додаткові труднощі в генерацію сітки за допомогою диференціальних рівнянь.

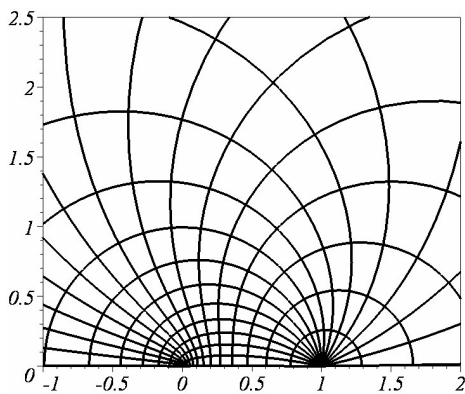
### Висновки і перспективи досліджень

На основі викладеного було зроблено висновок, що програми, які використовують регулярні конформні сітки, є значно простішими, тому що вони не вимагають збереження і переробки інформації про сусідні комірки, ребра, грані (орієнтація, довжини та ін.), що необхідно для розрахунку на неструктурованих сітках. Крім того, регулярні сітки дозволяють застосовувати методи розщеплення за напрямками у

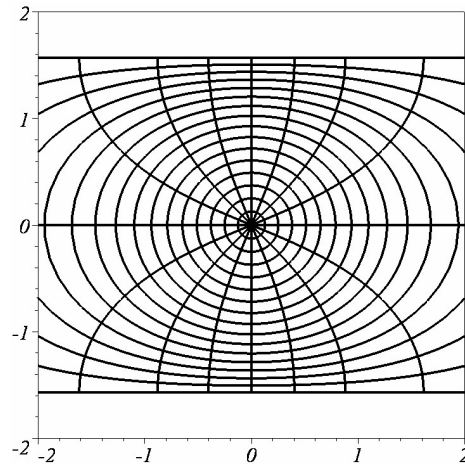
багатовимірних задачах. Для регулярних конформних сіток характерним є зниження точності схеми на границях з тілом складної геометрії, оскільки задача побудови таких сіток у загальному випадку не є тривіальною. Також тут існує проблема малих областей на границях з тілом, що

накладає обмеження на крок інтегрування і потребує для розв'язання стійких різницьових схем.

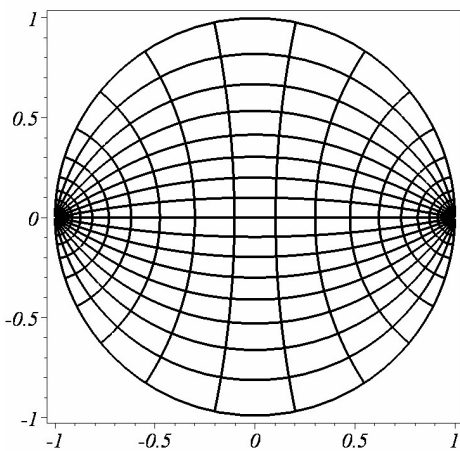
Мета наших досліджень пов'язана зі складанням алгоритмів і програм візуалізації регулярних сіток (рис. 5) для подальшої інтерпретації розв'язків.



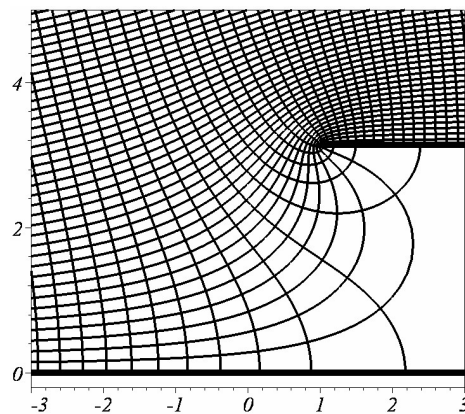
Функція відображення  $f(z) = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$



Функція відображення  $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$



Функція відображення  $f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$



Функція відображення  $w = i\pi + z - \ln z$

Рис. 5. Приклади конформних сіток

Характерними вхідними умовами геометричної задачі є рівняння і граничні умови, а також фізичні величини (параметри), за якими одержується сітка ліній. Як приклад, такими параметрами можуть бути значення потенціалу та напруженості електричного поля. Конформна сітка – це картина силових ліній поля (еквіпотенціалей і ліній струму).

Метод послідовних конформних відображень дозволяє розробляти ефективні наближені методи для розв'язання деяких технічних задач. Одними з таких задач, наприклад, є задача геометричного моделювання хромування деталей та задача електрохімічного згладжування (вирівнювання) профілів мікрорельєфу поверхонь деталей, що застосовуються в електротехніці

[9]. Подібні задачі відносяться до задач моделювання фізичних полів.

Зауважимо, що з позицій прикладної геометрії конформні сітки розглядаються

як графічне подання узагальнених паралельних множин в задачах геометричного моделювання розподілу параметрів фізичних полів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Доскач, Ю.В. Равновеликие отображения сферических картин [Текст] / Ю.В. Доскач, Ю.М. Кавун // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1973. – Вып. 16. – С. 160-162.
2. Даниленко, В.Я. Обернені перетворення панорамних рельєфів в задачах коригування оглядовості автобусів [Текст] / В.Я. Даниленко // Технічна естетика і дизайн. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 10. – С. 37-41.
3. Васильєв, С.В. Генерація сіток при розрахунках фізичних полів методом конформних відображень [Текст] / С.В. Васильєв, О.В. Шоман // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 9. – С. 116-121.
4. Лабусов, А.Н. Генерація сіток (регулярних и неструктурированных) [Електронний ресурс] / А.Н. Лабусов. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.spbcas.ru/cfd/person/labusov.htm>
5. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей [Текст] / К. Флетчер. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
6. Шоман О.В. Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів. Монографія [Текст] / О.В. Шоман. – Харків: НТУ «ХП», 2007. – 288 с.
7. Хэлси, Н.Д. Использование конформных отображений при построении сеток для расчета обтекания трехмерных аэродинамических компоновок сложной формы [Текст] / Н.Д. Хэлси. – АКТ, 1988. – № 11. – С. 11-18.
8. Ryskin, G. Orthogonal mapping [Text] / G. Ryskin, L.G. Leal // J. of Comp. Phys. – 1983. – Vol. 50, № 1. – P. 71-100.
9. Шоман, О.В. Застосування конформних відображень в геометричному моделюванні процесів електрохімічної обробки поверхонь [Текст] / О.В. Шоман, А.Г. Журило // Праці Таврійського держ. агротехнол. ун-ту. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 44. – С. 38-46.

*Volodymyr DANYLENKO, Olga SHOMAN*  
Kharkiv

#### COMPUTATIONAL GRIDS AS A RESULT OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

*The use of certain types of computational grids obtained using geometric transformations is considered. Examples are given. The results of conformal mesh modeling are shown for some implementations.*

**Keywords:** *geometric modeling, geometric transformations, projections, computational grids, conformal mappings.*

*Владимир ДАНИЛЕНКО, Ольга ШОМАН*  
Харьков

#### РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ КАК РЕЗУЛЬТАТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*Рассмотрено применение некоторых видов расчетных сеток, полученных при помощи геометрических преобразований. Приведены примеры. Показаны результаты моделирования конформных сеток для некоторых внедрений.*

**Ключевые слова:** *геометрическое моделирование, геометрические преобразования, проекции, расчетные сетки, конформные отображения.*

Стаття надійшла до редколегії 17.10.2018