ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

УДК 514.18
DOI: 10.33310/2524-0978-2019-1-7-55-62

Євген ПУГАЧОВ
evgenpugachov@rambler.ru
ORCID: 0000-0003-4771-0942
м. Рівне

Віталій ЧЕРНЯК
cvi71@ukr.net
ORCID: 0000-0002-1186-8089
Тернопільська обл.

ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ДИСКРЕТНОГО НЕВПОРЯДКОВАНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Робота присвячена розробленню методу визначення координат особливих точок дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в двовимірному просторі. Наявні методи дозволяють визначати координати особливих точок тільки для континуально заданих векторних полів. Розроблений метод дозволяє визначати особливі точки для векторних полів, заданих дискретно на нерівномірній сітці. Виконано порівняння результатів використання даного методу з координатами особливих точок, знайдених аналітично.

Ключові слова*: векторне поле, особлива точка, тріангуляція Делоне.*

Постановка проблеми

Нехай векторне поле $\boldsymbol{A}$ задане континуально і неперервне в усіх точках плоскої ділянки, окрім деяких. Ті точки області, в яких поле невизначене чи розривне, а також точки, в яких вектори поля дорівнюють нулю, називаються *особливими* точками поля $\boldsymbol{A}$ [1]**.** Особлива точка називається *ізольованою*, якщо в деякому її околі немає інших ізольованих точок. Будь-яку неперервну криву, на якій поле або невизначене, або розривне, або на якій вектори поля дорівнюють нулю, називатимемо *особливою кривою*.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Визначення особливих точок континуально заданого векторного поля передбачає розв’язок рівнянь, якими воно задано. Диференціальні рівняння на площині вивчені відносно непогано, хоча точне розв’язання конкретного рівняння може становити складну (або навіть нерозв’язну) задачу. Перехід до багатовимірних просторів ускладнює розв’язання нелінійних рівнянь (навіть вже у тривимірному просторі). Однак лінійні системи в будь-якій розмірності аналізуються порівняно нескладно [2, 3].

Постановка завдання

В роботі поставлено мету – розробити метод визначення координат особливих точок дискретно представленого на нерівномірній сітці векторного поля в двовимірному просторі і оцінити його точність на прикладі різних векторних полів, заданих континуально.

Виклад основного матеріалу

Пропонується три способи визначення особливих точок, з яких третій є продовженням двох попередніх.

Спочатку впорядковуємо множину точок – виконуємо тріангуляцію Делоне, в результаті чого розбиваємо множину на елементарні комірки (трикутники) та встановлюємо суміжні вершини множини точок. Після цього визначаємо особливі точки. В першому і другому способі визначаємо їх як точки, в яких координати векторів поля ($\boldsymbol{A_X}$, $\boldsymbol{A_Y}$) наближаються до нуля. В третьому особливі точки визначаємо як точки сторін трикутників, в околі яких всі

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

координати векторів поля змінюють знаки на протилежні.

1 спосіб.

1.1 Тріангулюємо дану множину точок, в результаті чого отримаємо множину трикутників ***TR***.

1.2 В тривимірному просторі через вершини кожного трикутника проводимо площини $A_X(x,y)$ та $A_Y(x,y)$ та площину нульового рівня $0(x,y)$, і визначаємо точку $Cz(x,y)$ перетину цих площин в тривимірному просторі. Наприклад, для трикутника ***1-2-3*** на рис. 1 площиною A_X буде трикутник $1_X2_X3_X$, площиною A_Y буде трикутник $1_Y2_Y3_Y$, площиною нульового рівня буде трикутник $1_02_03_0$. Точка ***Cz*** є точкою перетину цих трьох площин, а особливою буде точка ***C*** – проекція точки ***Cz*** на площину трикутника ***1-2-3.***

1.3 Якщо точка ***C*** знаходиться всередині даного трикутника або на його стороні, то ця точка є особливою тому що в цій точці координати вектора поля рівні нулю (на рисунках 4-9 ці точки позначені колами). Даний трикутник видаляється з множини ***TR*** для того, щоб його повторно не перевіряти наступними способами.

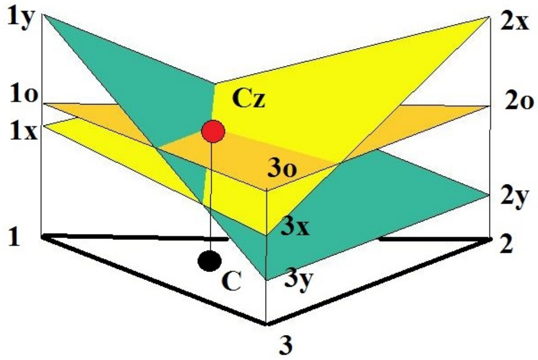

Рис. 1. Визначення особливої точки за першим способом

Якщо точка *C* знаходиться поза трикутником, то вона видаляється з розрахунку, і ми переходимо до наступного трикутника множини ***TR.*** Інакше отримаємо множину особливих точок із згущенням в околі одного трикутника (рис. 2).

2 спосіб.

2.1 Тріангулюємо дану множину точок – отримаємо множину трикутників ***TR***.

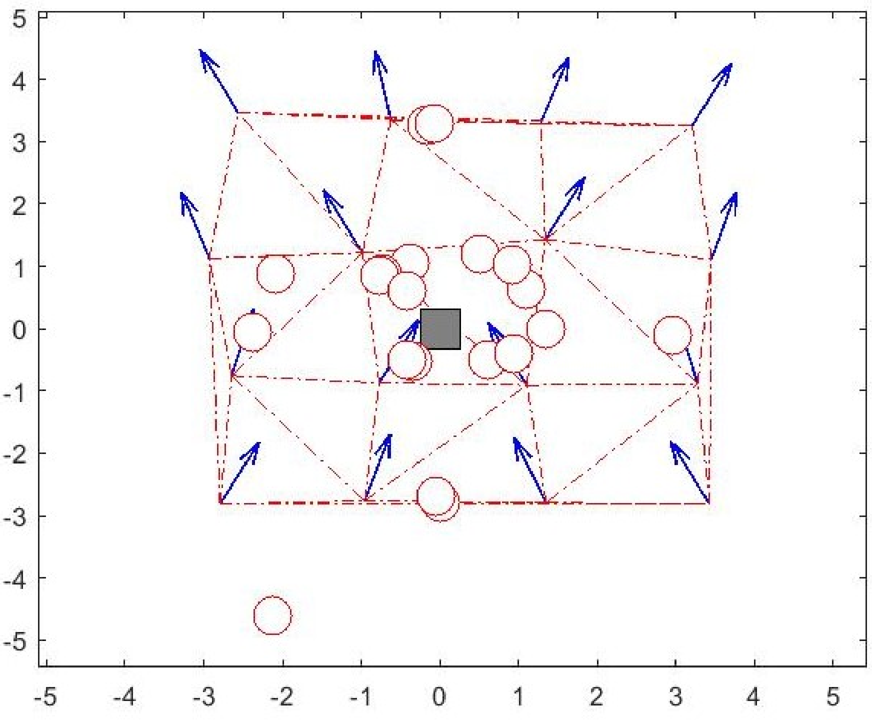

Рис. 2. Фрагмент поля ***A***={***xy***, ***x***^{2}+***y***^{2}} із згущенням особливих точок. Чорним квадратом відмічено особливу точку, визначену аналітично

2.2 Через вершини кожного трикутника множини ***TR*** та вершини суміжних трикутників проводимо поверхні другого порядку $\boldsymbol{B_X}(x,y)$, $\boldsymbol{B_Y}(x,y)$ та площину нульового рівня *0(x,y),* і визначаємо точку *C(x,y)* перетину цих поверхонь в тривимірному просторі.

2.3 Якщо точка *C* знаходиться всередині даного трикутника або на його стороні, то ця точка є особливою (на рисунках 4-9 ці точки позначені трикутниками). Даний трикутник видаляється з множини ***TR***.

Якщо точка *C* знаходиться поза трикутником, то вона видаляється з розрахунку, і ми переходимо до наступного трикутника множини ***TR.***

3 спосіб, як продовження двох попередніх. З множини трикутників ***TR*** формуємо масив ребер (сторін трикутників), в яких на вершинах відповідні координати векторів поля мають протилежні знаки (рис. 3). Особлива точка визначається як точка поблизу ребра, для якої координати векторів поля максимально наближаються до нуля (на рис. 4-9 ці точки – чорні зірочки), за формулами

$$k_X = \frac{a1_X}{a2_X - a1_X};\ Xc = r1_X - k_X(r2_X - r1_X);$$

$$k_Y = \frac{a1_Y}{a2_Y - a1_Y};\ Yc = r1_Y - k_Y(r2_Y - r1_Y),$$

де r1, r2 – координати вершин ребра; a1, a2 – координати векторного поля у відповідних вершинах ребра.

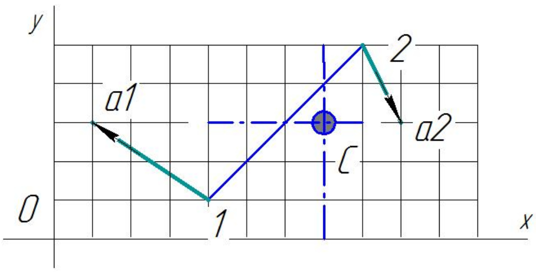

Рис. 3. Визначення особливих точок за третім способом.

Наприклад, на вершинах ребра 1-2 (рис. 3) є такі вектори поля a1(-3, 2) та a2(1, –2), координати особливої точки C будуть

$$k_X = \frac{a1_X}{a2_X - a1_X} = \frac{-3}{1-(-3)} = -\frac{3}{4};$$

$$Xc = r1_X - k_X(r2_X - r1_X) =$$
$$= 4 - (-\frac{3}{4})(8-4) = 7;$$

$$k_Y = \frac{a1_Y}{a2_Y - a1_Y} = \frac{2}{-2-2} = -\frac{1}{2};$$

$$Yc = r1_Y - k_Y(r2_Y - r1_Y) =$$
$$= 1 - (-\frac{1}{2})(5-1) = 3.$$

Протестуємо авторські способи визначення особливих точок. Для цього векторні поля задавались аналітично на нерівномірній сітці, а отримані за трьома способами значення порівнювались із координатами точок, одержаними аналітично. На рис. 4-9 тріангульована множина точок показана червоними штрих пунктирними лініями (трикутниками), вектори поля на точках множини були пронормовані для наочності (всі мають одиничну довжину) та показані синіми стрілками. Особливі точки та криві, визначені аналітично – чорні квадрати та чорні криві, відповідно. Якщо на рисунку збігаються зображення чорного квадрату, кола, трикутника та зірочки, то це означає, що координати особливої точки, визначені аналітично (чорний квадрат) збігаються з координатами, які визначені за першим способом (коло), другим (трикутник) та третім (зірочка).

В табл. 1 наведено результати застосування розроблених способів і координати особливих точок, визначених аналітично.

При тестуванні цих способів було виявлені такі недоліки

1. За допомогою першого і третього способів не можна визначити коректно особливі точки в тих випадках, коли будь-яка з координат векторів поля хоч і приймає нульові значення, але не змінює своїх знаків (нульова площина є дотичною до поверхні однієї з координат векторного поля – рис. 5).

2. Використання другого способу дає коректно визначені координати ізольованих особливих точок, але є дуже громіздким в обчисленнях.

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

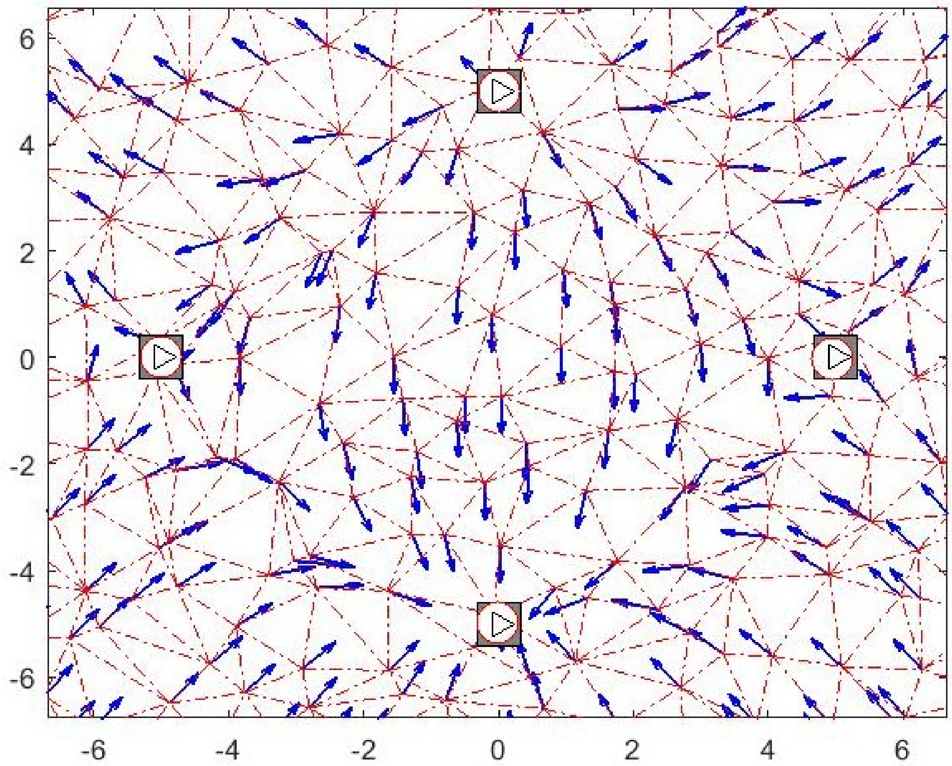

Рис. 4. Фрагмент поля $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{xy},\ \boldsymbol{x^2+y^2-25}\}$ з особливими точками, визначеними авторськими способами та аналітично.

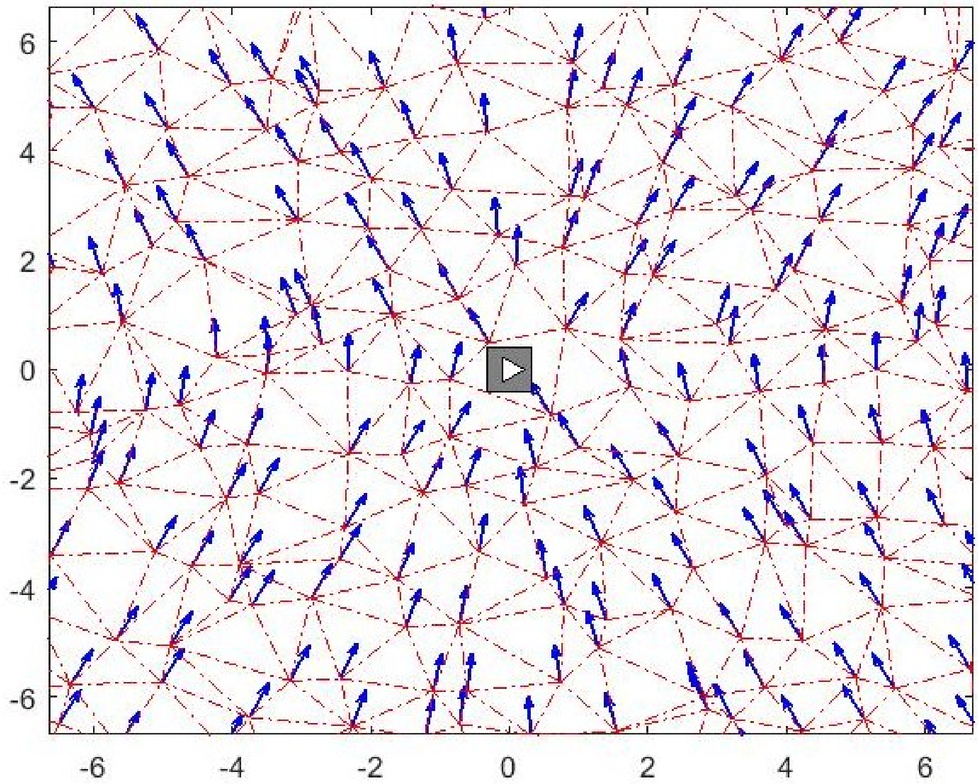

Рис. 5. Фрагмент поля $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{xy},\ \boldsymbol{x^2+y^2}\}$ з особливими точками, визначеними авторськими способами та аналітично.

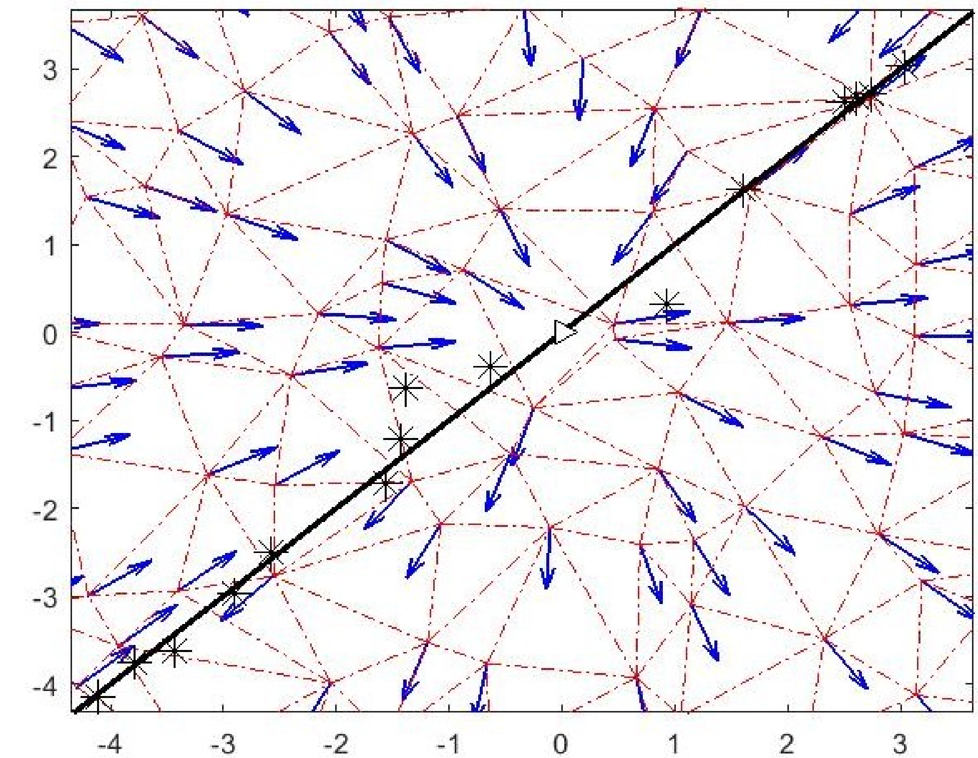

Рис. 6. Фрагмент поля $\boldsymbol{A}=\{x(\boldsymbol{x-y}), \boldsymbol{y(x-y)}\}$ з особливими точками, визначеними авторськими способами, та аналітично визначеною особливою кривою.

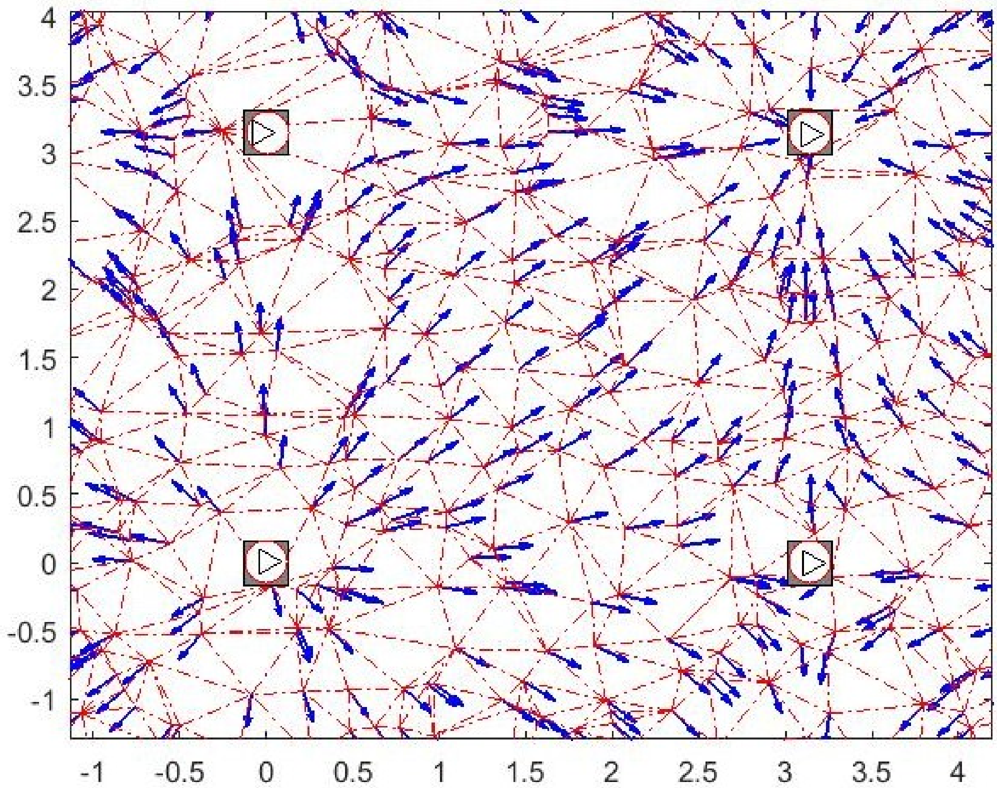

Рис. 7. Фрагмент поля $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{sin(x), sin(y)}\}$ з особливими точками, визначеними авторськими способами та аналітично.

Табл. 1. Координати особливих точок, які визначені розробленими способами та аналітично.

Номер рисунка	Дійсні координати особливих точок		Координати особливих точок, які визначені розробленими способами					
			1 спосіб		2 спосіб		3 спосіб	
4	0	5	0,0450	4,9039	–0,0000	5,0000	–	
	0	–5	–0,0015	–4,9886	0,0000	–5,0000		
	5	0	4,9424	–0,0087	5,0000	–0,0000		
	–5	0	–4,9807	0,0126	–5,0000	–0,0000		
5	0	0	–		0,0055	0,0059	–	
6	Особлива лінія *y*=*x*		–		–0,0070	–0,0005	–1,3789	–0,6216
							–4,1163	–4,1364
							0,9303	0,3175
							2,4999	2,6173
							–3,7869	–3,7512
							–2,5845	–2,5040
							–3,4316	–3,6256
							–2,8966	–2,9602
							–1,4308	–1,2117
							–1,5616	–1,7087
							1,6071	1,6329
							2,6058	2,6774
							2,7330	2,7132
							3,9679	3,9038
							3,0313	3,0245
7	0	0	–0,0003	0,0022	0,0003	0,0016	–	
	0	π	0,0072	3,1411	–0,0366	3,1435		
	π	0	3,1406	0,0004	3,1400	–0,0001		
	π	π	3,1449	3,1414	3,1354	3,1384		

3. За допомогою першого і другого способу не завжди можна визначити неізольовані особливі точки.

4. Використання третього способу дає визначені координати неізольованих особливих точок, які можна апроксимувати в лінію чи криву тим чи іншим способом.

Враховуючи наведені недоліки, пропонується всі три способи почергово виконувати один за одним, а з другого способу видалити пункт 2.1 для того, щоб повторно не перевіряти ті трикутники множини, в яких вже визначені особливі точки. Результати застосування цього методу показані на рис. 8.

Загальний метод визначення особливих точок дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в двовимірному просторі буде таким.

1. Тріангулюємо дану множину точок – отримаємо множину трикутників ***TR.***

2. Всі трикутники множини ***TR*** перевіряються **першим** способом на наявність в них особливих точок. Визначені за допомогою першого способу особливі точки позначаються колами, а відповідні їм трикутники видаляються з множини ***TR***

3. Всі трикутники множини ***TR*** перевіряються **другим** способом на наявність в них особливих точок. Визначені за допомогою другого способу точки позначаються трикутниками, а відповідні їм трикутники видаляються з множини ***TR.***

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

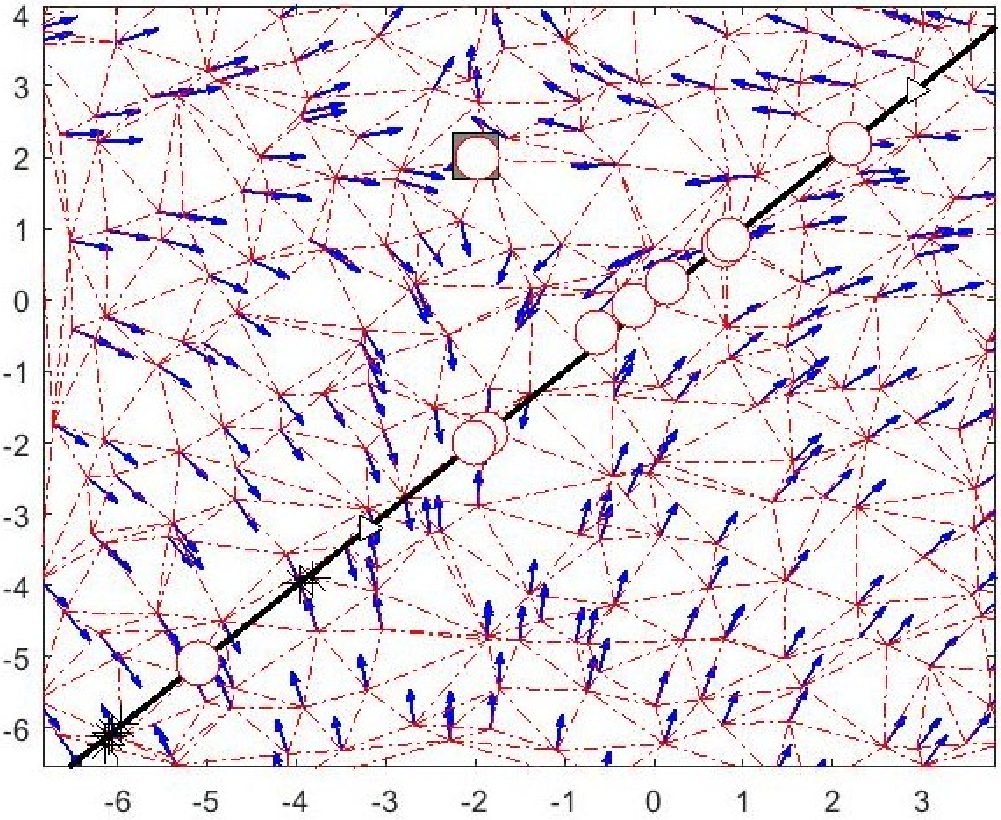

Рис. 8. Фрагмент поля ***A***={(x+2)***(x-y), (y-x)(y-2)***}, з особливими точками, визначеними авторськими способами, та аналітично визначеною особливою кривою.

4. З множини трикутників ***TR*** формуємо масив ребер (сторін трикутників) ***BR***.

5. З масиву ***BR*** вибираємо ті ребра, в яких на вершинах відповідні координати векторів поля мають протилежні знаки, для цих ребер визначаємо особливі точки за **третім** способом.

Висновки і перспективи досліджень

Розроблений спосіб дозволяє визначати координати особливих точок дискретно представленого невпорядкованого векторного поля в двовимірному просторі. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмів визначення особливих точок дискретно представленого векторних полів в тривимірному і багатовимірному просторах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Красносельский М.А. и др. Векторные поля на плоскости. Москва: Физматгиз, 1963. 248 с.
2. Медведева Н.Б. Особые точки векторных полей на плоскости. *Соросовский образовательный журнал*. 1999. № 5. С. 121-127. URL: http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9905_121.pdf (дата звернення 12.03.2019).
3. Илья Щуров. Обыкновенные дифференциальные уравнения (Интерактивный учебник). URL: http://math-info.hse.ru/odebook/chapter/label/chap:10prim:linearization/ (дата звернення 12.03.2019).

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

Yevhen PUGACHOV
Rivne
Vitalii CHERNYAK
Ternopil region

DETERMINATION OF SINGULAR POINTS OF A DISCRETE DISORDERED VECTOR FIELD IN A TWO-DIMENSIONAL SPACE

The work is devoted to the development of a method for determining the coordinates of singular points of a discretely presented disordered vector field in a two-dimensional space. The available methods allow you to determine the coordinates of singular points only for continually defined vector fields. The developed method allows us to determine singular points for vector fields given discretely on a non-uniform grid. A comparison of the results of using this method with the coordinates of special points, found analytically.
Keywords: *vector field, singular point, triangle Delaunay.*

Евгений ПУГАЧЕВ
Ровно
Виталий ЧЕРНЯК
Тернопольская обл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИСКРЕТНОГО НЕУПОРЯДОЧЕННОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Работа посвящена разработке метода определения координат особых точек дискретно представленного неупорядоченного векторного поля в двумерном пространстве. Имеющиеся методы позволяют определять координаты особых точек только для континуально заданных векторных полей. Разработанный метод позволяет определять особые точки для векторных полей, заданных дискретно на неравномерной сетке. Выполнено сравнение результатов использования данного метода с координатами особых точек, найденных аналитически.
Ключевые слова: *векторное поле, особая точка, триангуляция Делоне.*

Стаття надійшла до редколегії 12.03.2019