

## ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ЭВОЛЮЦИЮ ПРОФИЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ПОДЗОЛА (МОДЕЛЬ УИП-5)

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия

<sup>2</sup>Московский инженерно-физический институт, Россия

<sup>3</sup>Институт ядерного синтеза РНЦ «Курчатовский Институт», Россия

<sup>4</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия

Продолжено исследование свойств математических моделей «идеального подзола» (ИП) типа УИП-5 и УИП-6. С этой целью рассчитаны решения с переменными во времени граничными условиями (модель сезонных вариаций), а также затронут вопрос о влиянии нелинейности коэффициента диффузии влаги на эволюцию профиля ИП.

*Ключевые слова:* математическая модель, идеальный подзол, граничные условия.

Л. О. Карпачевський<sup>1</sup>, І. І. Долманова<sup>2</sup>, А. І. Морозов<sup>3</sup>, В. В. Савельєв<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Московський державний університет ім. М. В. Ломоносова, Росія

<sup>2</sup>Московський інженерно-фізичний інститут, Росія

<sup>3</sup>Інститут ядерного синтезу РНЦ «Курчатовський Інститут», Росія

<sup>4</sup>Інститут прикладної математики ім. М. В. Келдыша РАН, Росія

## ВПЛИВ ХАРАКТЕРУ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЕВОЛЮЦІЮ ПРОФІЛЮ ІДЕАЛЬНОГО ПІДЗОЛУ (МОДЕЛЬ РІП)

Продовжено дослідження властивостей математичних моделей «ідеального підзолу» (ІП) типу РІП-5 та РІП-6. З цією метою розраховано рішення зі змінними в часі граничними умовами (модель сезонних варіацій), а також розглядається питання про вплив нелінійності коефіцієнту дифузії вологи на еволюцію профілю ІП.

*Ключові слова:* математична модель, ідеальний підзол, граничні умови.

L. O. Karpachevskiy<sup>1</sup>, I. I. Dolmanova<sup>2</sup>, A. I. Morozov<sup>3</sup>, V. V. Savelyev<sup>4</sup>

<sup>1</sup>M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia

<sup>2</sup>Moscow Physics-Engineering Institute, Russia

<sup>3</sup>Nuclear fusion institute RSC «Kurchatov Institute», Russia

<sup>4</sup>M. V. Keldysh Applied Mathematics Institute of RAS, Russia

## THE IMPACT OF THE BOUNDARY CONDITIONS ON THE EVOLUTION OF IDEAL PODZOLE PROFILE (Model EIP-5)

The research of properties of mathematical models of the «ideal podzol» (IP) such as EIP-5 and EIP-6 has been continued. To this end the solutions have been designed with time-variable boundary conditions (model of seasonal variations). It has been also touched upon the issue of the impact of nonlinearity of moisture diffusion coefficient on the evolution of the IP profile.

*Keywords:* mathematical model, ideal podzol, boundary conditions.

В статтях (Морозов, 1988а, 1988б, 1998, 2007) були сформулировані системи «уравнень ідеального підзола» (ИП), котрі дозволяють розрахувати модельні профілі підзолів. Для виконання таких расчётов учасуючі в почвенних процесах компоненти групуються в «связки» близьких по своїм функціональним свойствам субстанцій и, благодаря цьому, необозримое множество разных компонент превращается в систему небольшого числа связок. Так система УИП-5 содержит всего 5 связок, а система УИП-6 содержит 6 связок. Вот эти связки: «влага» ( $w$ ) – объединяет все формы влаги, «фульво» ( $f$ ) – это совокупность агрессивных кислот, растворимые «фульваты» ( $c$ ), выпавшие в осадок «фульваты» ( $F$ ), «материнская порода» ( $\mu$ ), нерастворимая часть разрушаемой материнской породы – «кремнёвка» ( $\mu^*$ ).

Но мало выделить связки. Для расчёта профиля почвы необходимо знать ещё много характеристик их поведения (скорости перемещения, времени жизни, скорости реакции и др.). Все эти параметры ниже называются «кинетическими

коэффициентами». К сожалению, сегодня эти коэффициенты мало изучены. Поэтому сегодня расчёты профиля необходимо делать многократно, варьируя значения указанных коэффициентов, стремясь получить согласие с натурой.

В работе Л. О. Карпачевского и др. (2009) были опубликованы результаты расчётов модели «идеального подзола» УИП-6. В этих расчётах предполагались постоянными граничные условия, а перенос влаги подчиняющимся линейному закону Дарси

$$v_w w = -D_w \text{grad } w$$

то есть с постоянным коэффициентом диффузии ( $D_w$ ). Расчёты проводились при различных значениях кинетических коэффициентов ( $D_w$ , интенсивности поглощения влаги корнями и т.п.). Эти расчёты, не претендуют на то, чтобы быть базой для построения систематики возможных типов профилей «идеального подзола», поскольку для этого необходимо провести несравнимо большее число расчётов. Цель опубликованных результатов – наглядно продемонстрировать возможности построения профилей подзола при разных кинетических параметрах. То есть это «проба пера» в отношении моделей УИП-6.

В данной статье продолжен анализ систем УИП-5 и УИП-6. Здесь приводятся результаты расчёта эволюции профиля ИП при переменных условиях на верхней границе почвенного слоя. Эти расчёты выполнены в упрощённой системе УИП-5

Выбор модели УИП-5 для анализа нестационарного решения, объясняется тем, что сегодня не очень ясно как ведут себя выпавшие в осадок соединения в условиях «промывки» их фульвокислотами «зимой» при движении почвенного раствора из глубины к поверхности почвы.

Вторая группа расчётов выполнена на модели УИП-6 в стационарных условиях, но с переменным коэффициентом диффузии, зависящим от влажности по формуле, близкой к формуле Аверьянова. Этот расчёт показывает, что характер почвенного профиля сравнительно слабо зависит от вида  $D(w)$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения, использованные в данной работе, полностью аналогичны соответствующим уравнениям в работах А. И. Морозова (1988б) и Л. О. Карпачевского и др. (2009). Однако для удобства чтения статьи выпишем их здесь целиком.

УИП-5 в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_w w) = -q_w w; \quad v_w w = -D_w \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_w f) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_f \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \beta_f \mu f \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_w c) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_c \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \beta_c \mu f \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\beta_\mu \mu f \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial t} = \beta_{\mu^*} \mu f \quad (5)$$

Здесь использованы принятые ранее обозначения:  $w$  – «влага»,  $f$  – «фульво»,  $c$  – «растворённые фульваты»,  $\mu$  – «материнская порода»,  $\mu^*$  – нерастворимый продукт разрушения материнской породы («кремнезём»).

В этой модели учитывается выпадение нерастворимого осадка, концентрацию которого обозначим буквой  $F$ . Выпадение осадка начинается, когда концентрация растворимых фульватов  $s = \frac{c}{w}$  станет равной или превысит некоторую величину  $s^*$ .

В целом предполагается следующая структура расчётной области (рис. 1). Глубина –  $L = 1$  м. Координата  $x$  направлена от поверхности земли ( $x=0$ ) вглубь. На поверхность выпадают влага ( $w_0$ ), фульво ( $f_0$ ), растворимые фульваты ( $c_0$ ). При  $x=L$  ставим условия протекания влаги в форме  $\frac{\partial w}{\partial x} = -K_w$ . Скорость перемещения  $f$  и  $c$  определяем переносом этих субстанций влагой и диффузией относительно влаги:

$$v_f = v_w - D_f \text{ grad } f \quad (6)$$

$$v_c = v_w - D_c \text{ grad } c \quad (7)$$

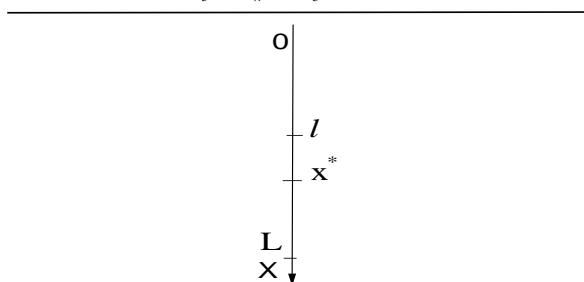


Рис. 1. Общая схема расчётной области

На рис. 1 изображена граница  $x = l$ , где оканчиваются корни, и координата  $x^*$  где концентрация фульватов достигает критического значения  $s^*$  и далее происходит их выпадение в осадок. Выше этой границы процессы описываются фактически системой УИП-5. Однако ниже система уравнений изменяется, хотя уравнения для  $w$ ,  $f$ ,  $\mu$  и  $\mu^*$  остаются прежними.

Для наглядности выпишем всю систему при  $x > x^*$ .

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_w \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -q_w w \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_f f) = \frac{f}{\tau_f} - \beta_f \mu f \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\beta_\mu \mu f \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial t} = \beta_{\mu^*} \mu f \quad (11)$$

Однако для фульватов в растворе и в осадке должны быть иные уравнения. Прежде всего, считаем, что концентрация фульватов в растворе всё время находится на уровне критической  $c = w s^*$ .

Концентрация выпадающих в осадок фульватов определяется из закона сохранения массы фульватов. Тогда, как показано в работе Л. О. Карпачевского и др. (2009)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = c^* w \left( q_w - \frac{1}{\tau_c} \right) + c^* \frac{\partial}{\partial x} \left( D_c \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{F}{\tau_F} + \beta_F \mu f \quad (12)$$

Здесь  $q_w$  – интенсивность поглощения влаги корнями. Площадь корней считается постоянной при  $x \leq l$  и равной нулю при  $x > l$ . Численное решение уравнений УИП-6М проведено разностными методами. Применялась прогнупотоковая явная аппроксимация конвективных членов и симметричная аппроксимация вторых пространственных производных с верхнего временного слоя.

Системы трехдиагональных уравнений решаются стандартным методом прогонки (Калиткин, 1978).

### ЭВОЛЮЦИЯ ПОЧВЕННОГО ПРОФИЛЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ

В предыдущих публикациях всегда условия на границе предполагались постоянными. То есть предполагалось, что непрерывно накапливает постоянный по интенсивности дождь. Поступающая влага увлекает вглубь почвы фульваты и фульво, образующиеся непрерывно на поверхности. Разумеется, это сильное допущение. Поэтому естественно провести сравнение профилей идеального подзола при наличии постоянных и сезонно изменяющихся граничных условий на поверхности земли. Разумеется, сохраним общее количество поступающих влаги и фульво за сезон.

Уточним постановку задачи. Аппроксимируем периодичность выпадения  $w$  и  $f$  зависимостью

$$w(0,t) = w_0(1 - 0,9 \cos 2\pi \frac{t}{T}) \quad (13)$$

$$f(0,t) = f_0(1 - 0,9 \cos 2\pi \frac{t}{T}) \quad (14)$$

Здесь  $T$  – «год», который мы принимаем равным  $T=365$  суток. В начальный момент ( $t=0$ ). На поверхности  $w(0,0) = 0,1w_0$  и  $f(0,0) = 0,1f_0$ . Этот момент времени сопоставим с серединой зимы, условно с 1 января. Через полгода предполагаются сильные дожди и количество влаги и фульво возрастёт.

Очевидно влага и фульво, выпадающие по закону  $w(0,t) = w_0$  и  $f(0,t) = f_0$  соответствуют постоянному поступлению  $w_0$  и  $f_0$ .

Расчёты проводились при следующих параметрах:  $w_0 = 6 \cdot 10^5$  г/м,  $f_0 = 300$  г/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 30$  г/м<sup>3</sup>,  $D_w = 0,01$  м<sup>2</sup>/сут,  $D_f = D_c = 0,0001$  м<sup>2</sup>/сут,  $q = 0,1$  1/сут,  $K = 0,1$  1/м,  $\tau_f = 30$  сут,  $\tau_c = \tau_F = 60$  сут,  $\beta_\mu = 1,5 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>/г\*сут. Остальные  $\beta$  того же порядка. Критическое значение концентрации  $s^* = 2,5 \cdot 10^{-3}$ .

Результаты проведённых расчётов представлены на рис. 2, 3, 4.

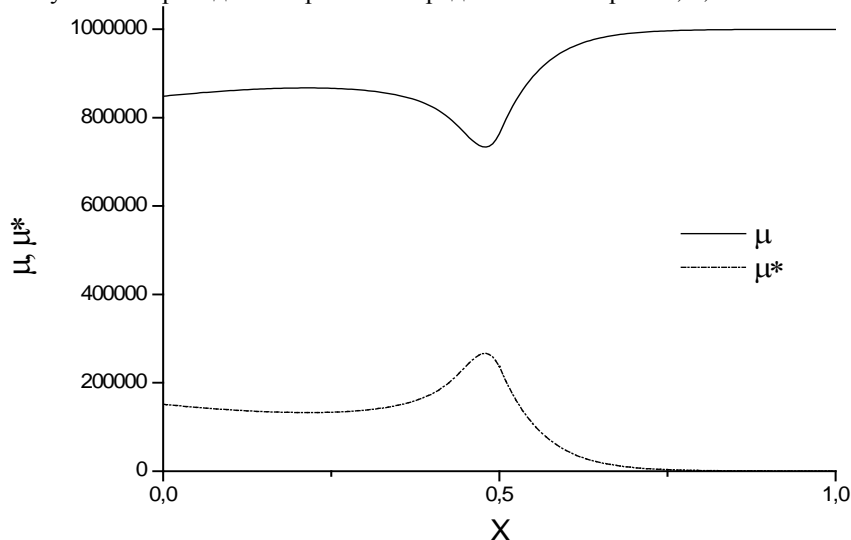


Рис. 2. Профили распределения плотности материнской породы и кремнезёма для постоянных граничных условий

На рис. 2 изображено распределение  $\mu(x)$  и  $\mu^*(x)$  через 100 лет для стационарного режима.

На рис. 3 те же зависимости  $\mu(x)$  и  $\mu^*(x)$  представлены для периодического режима. Видно, что распределения весьма близки. Другое дело, если рассматривать распределения параметров в течение одного сезона. На рис. 4 и 5 даны распределения для разных моментов времени. Здесь наблюдаются своеобразные «волны» концентрации влаги (рис. 4) и фульво (рис. 5). Аналогично фульво ведут себя и фульваты.

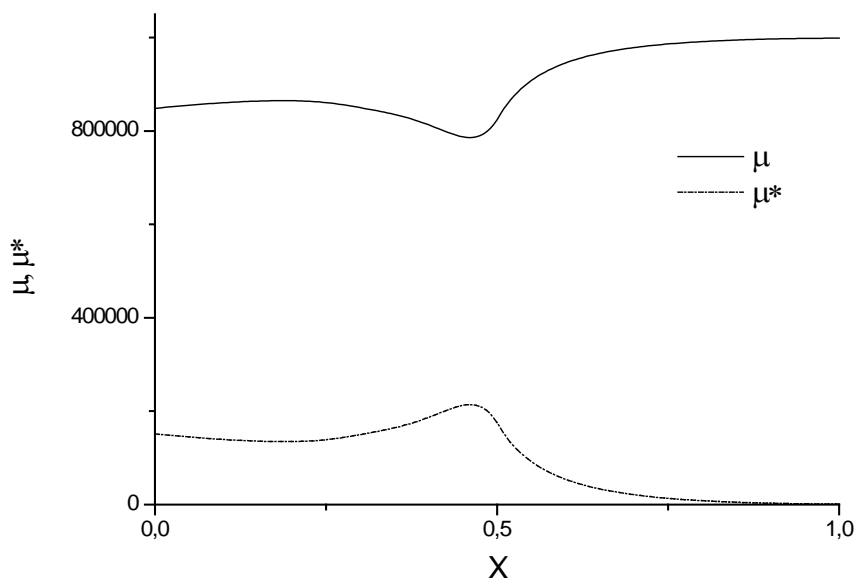


Рис. 3. Профили распределения плотности материнской породы и кремнезёма при периодических граничных условиях

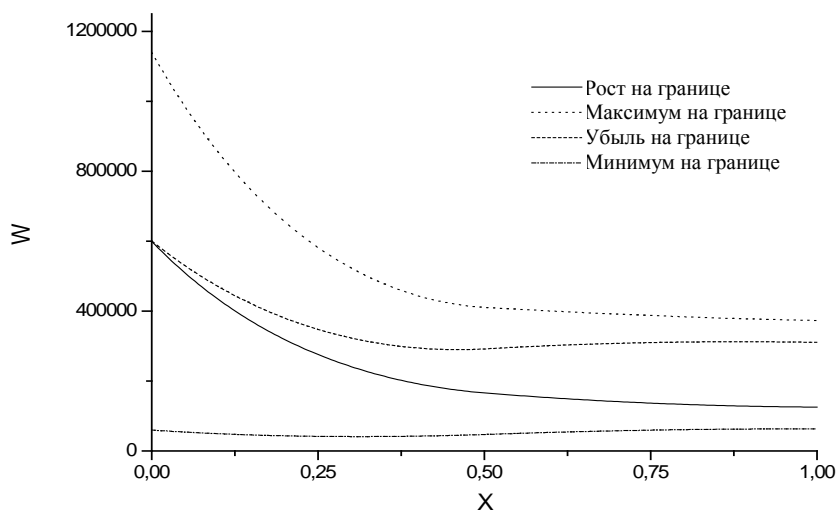


Рис. 4. Профили распределения плотности влаги для различных моментов времени

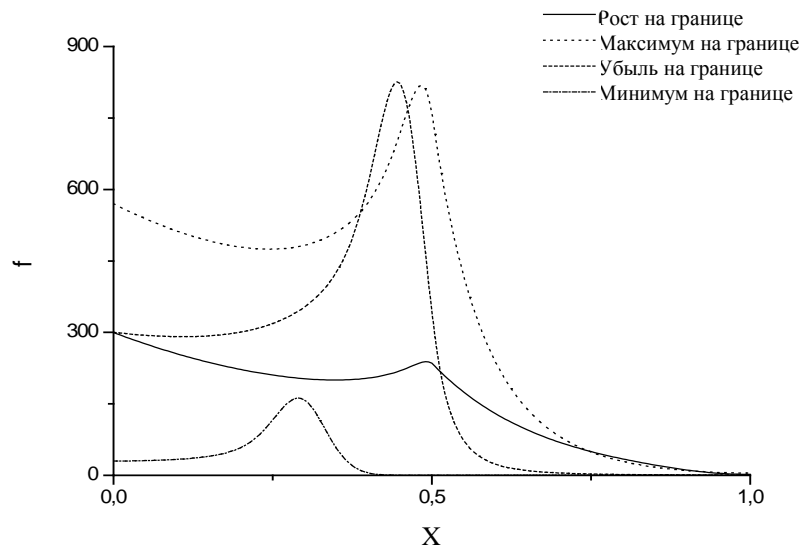


Рис. 5. Профили распределения плотности фульво для различных моментов времени

### ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДИФФУЗИИ ВЛАГИ НА ПРОФИЛИ

В реальных условиях перенос влаги в почве носит, как правило, диффузионный характер. Но при этом коэффициент диффузии является весьма сложной функцией плотности влаги  $w$ . Для того, чтобы хотя бы почувствовать влияние зависимости  $D_w$  от  $w$  на формирование профиля ИП, был выполнен ряд расчётов с коэффициентами диффузии вида

$$D_w = D_1 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{w}{w_0} \right)^p \right].$$

Здесь  $D_1, \alpha, p$  – постоянные. Расчёты проводились при  $D_1 = 0,005 \text{ м}^2 / \text{сут}$ ;  $0,01 \text{ м}^2 / \text{сут}$  и  $D_1 = 0,0025 \text{ м}^2 / \text{сут}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $p = 2; 3,5; 5$ . Остальные параметры оставались такими же, как в пункте 3. Результаты расчётов представлены на рис. 6, 7, 8.

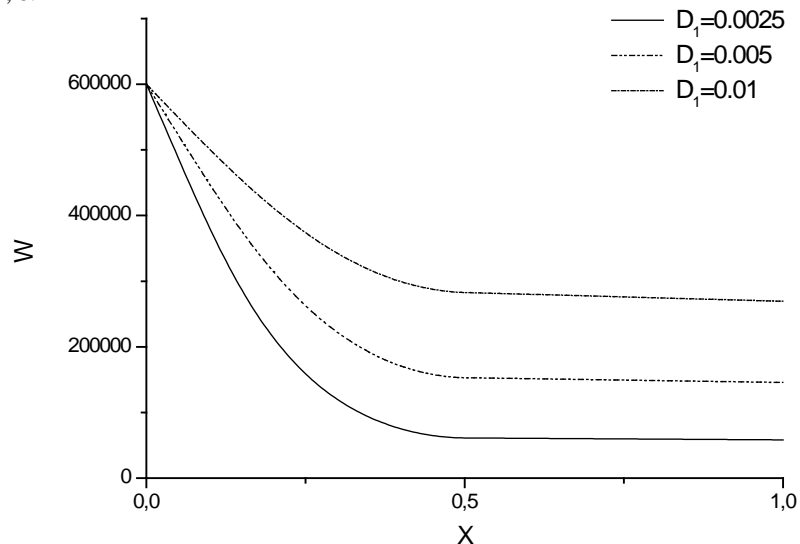


Рис. 6. Профили распределения плотности влаги при различных коэффициентах диффузии влаги при различных значениях  $D_1$  и  $p = 3.5$

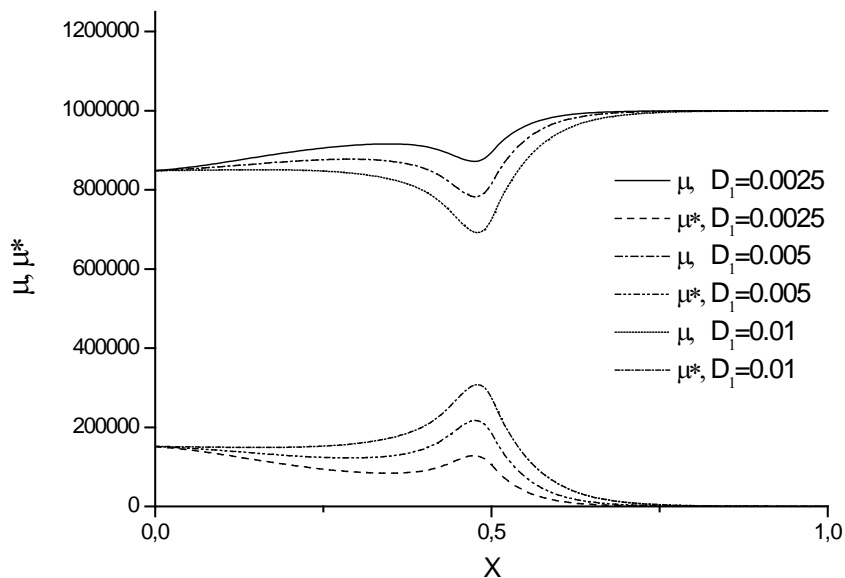


Рис. 7. Профили распределения плотности материнской породы и кремнезёма при различных коэффициентах диффузии влаги  $D_1$

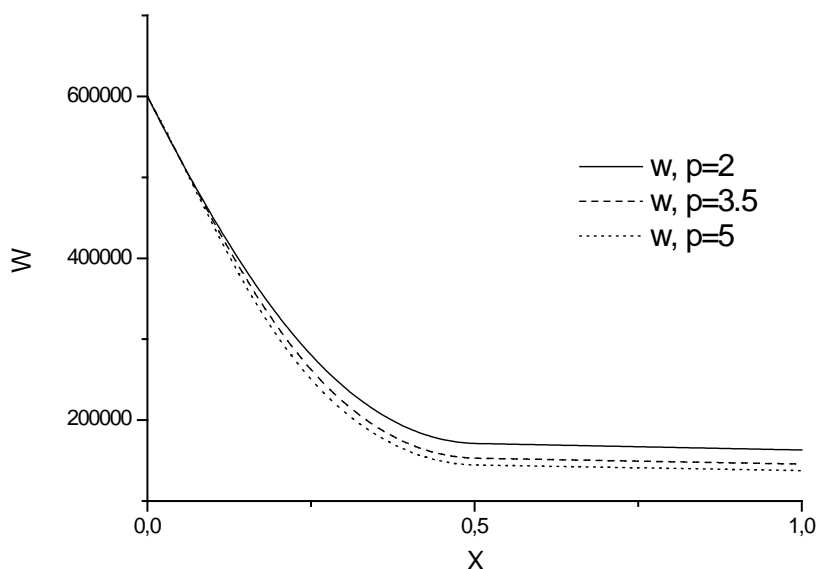


Рис. 8. Профили распределения плотности влаги при различных коэффициентах диффузии влаги  $p$

Распределение влаги при разных значениях  $D_1$  и  $p = 3.5$  изображены на рис. 6. Различия кривых  $w(x)$  объясняется эффективным усилением роли поглощения влаги корнями. На рис. 7 представлено состояние профилей материнской породы  $\mu(x)$  и кремнезёма  $\mu^*(x)$  после 100 лет эрозии при разных значениях  $D_1$ . Результат естественен, чем больше коэффициент диффузии  $D_w$ , тем эрозия идёт интенсивней.

Наконец, несколько неожиданными явились результаты расчётов распределения влаги спустя 100 лет  $w(x, 100)$  при разных показателях  $p$ , приведённые на рис. 8.

Соответственно этому получились и профили эрозии почвы за 100 лет (рис. 9). Эти результаты вызваны сравнительно большим значением  $D_1$  и сильной зависимостью  $D_w$  от  $w$  при выбранных величинах  $p$ .

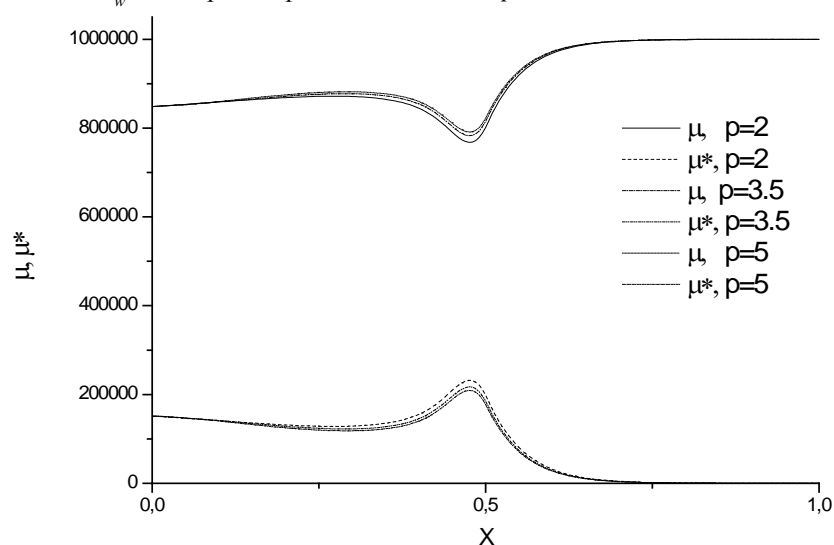


Рис. 9. Профили распределения плотности материнской породы и кремнезёма при различных коэффициентах диффузии влаги  $p$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые в первой части статьи результаты расчёта формирования профиля идеального подзола (ИП) при периодических и эквивалентном стационарном граничных условиях показали хорошие соответствия  $\mu_{\text{период}}(t)$  и  $\mu_{\text{стац}}(t)$ , если средние значения потоков на дневную поверхность влаги ( $\langle w \rangle$ ) и фульво ( $\langle f \rangle$ ) одинаковы

$$\langle w_T \rangle_{\text{пер}} = (w_T)_{\text{стац}}$$

$$\langle f_T \rangle_{\text{пер}} = (f_T)_{\text{стац}}$$

Иными словами, процессы формирования профиля являются, в общем, сильным усредняющим фактором. Однако тонкая структура профиля, которая здесь не анализируется, вполне может являться памятью об изменении граничных условий, как об этом говорил В. О. Таргульян. Этот вопрос требует специального моделирования. Что касается влияния зависимости коэффициента диффузии влаги от её концентрации, то здесь также, как показывают проведённые расчёты, наблюдается зависимость от величины этого коэффициента, а не от деталей его функциональной зависимости от  $w$ . Но в целом вопрос нуждается в более полном исследовании.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин // М. : Наука, 1978.  
 Карпачевский Л. О. Модель горизонта В в профиле подзола / Л. О. Карпачевский, Е. В. Кравченко, А. И. Морозов и др. // Грунтознавство. – 2009. – Т. 10, № 1-2. – С. 31-37.  
 Морозов А. И. Замкнутая математическая модель идеального подзола / А. И. Морозов // ДАН СССР. – 1988а. – Т. 302, № 2.  
 Морозов А. И. Модель эволюции «идеального подзола» в стационарных условиях / А. И. Морозов, В. В. Савельев, Е. М. Самойлова и др. // Вестник МГУ. – 1998. – № 3. – С. 17.  
 Морозов А. И. О почве и почвоведении. Взгляд со стороны / А. И. Морозов // М. : Геос, 2007.  
 Морозов А. И. О природе почвы / А. И. Морозов // Информационные проблемы изучения биосферы. – М. : Наука, 1988б.

Надійшла до редколегії 15.11.11