

УДК 621.391.24

**И.П. Панфилов, Ю.В. Флейта**

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова, ул. Кузнечная 1, Одесса, 65020

**СИНТЕЗ ОПОРНОГО СИГНАЛА ДЛЯ КАНАЛА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ И ФЛУКТУАЦИОННОЙ ПОМЕХАМИ***Рассмотрен метод синтеза оптимального опорного сигнала корреляционного приемника при воздействии сосредоточенной и флуктуационной помех.***Ключевые слова:** Опорный сигнал – Сосредоточенная помеха – Флуктуационная помеха.*The method of synthesis of correlation receiver optimal reference signal under the influence of concentrated and fluctuating interference is considered.***Keywords:** Reference signal – Concentrated interference – Fluctuation interference.**I. ВВЕДЕНИЕ**

Для систем передачи информации, работающих в условиях реальных помех, типичной является задача обработки цифровых сигналов, принимаемых при воздействии как флуктуационных, так и сосредоточенных по спектру (квазигармонических) помех [1]. Аналогичная задача имеет место в измерительной технике [2]. В результате обработки сигналов влияние помех должно быть сведено к минимуму.

Рассмотрим задачу оценки амплитуды различных сигналов  $s(t)$  в присутствии сосредоточенной по спектру помехи, описываемой выражением  $\eta(t) = \sin(\omega t + \psi)$ , где  $\omega$ ,  $\psi$  – случайные, независимые друг от друга величины, причем частота  $\omega$  равномерно распределена в интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \infty$ , начальная фаза  $\psi$  равномерно распределена в интервале  $(0, 2\pi)$ .

Предположим, что алгоритм оценивания является линейным, оценка амплитуды  $A$  может быть получена с помощью корреляционной обработки входного сигнала  $x(t)$ , длительность полезного сигнала считается известной

$$A = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\varphi(t)dt, \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  – опорный сигнал коррелятора,  $x(t) = s(t) + \eta(t)$ . Выберем форму опорного сигнала  $\varphi(t)$ , обеспечивающего минимальное значение дисперсии оценки  $A$  при дополнительном ограничении, условии несмещенности оценки

$$\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\varphi(t)dt = 1. \quad (2)$$

Этот минимум нетрудно найти, если соответствующее операторное уравнение имеет единственное решение [3,4]. В нашем случае решение интегрального уравнения не существует, в классе функций  $L_2(-T/2, T/2)$ . Рассмотрим метод, который позволяет найти близкий к оптимальному опорный сигнал коррелятора, используемого для оценки

амплитуды сигналов в присутствии сосредоточенной по спектру и флуктуационной помех.

**II. СИНТЕЗ ОПОРНОГО СИГНАЛА**

Опорный сигнал  $\varphi(t)$  ( $-T/2 \leq t \leq T/2$ ), удовлетворяющий условию ортогональности функций  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  для всех значений частот из интервала  $(\omega_1, \omega_2)$  или, что, то же самое, соотношению

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)e^{-j\omega t} dt = 0, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (3)$$

явился бы идеальным решением поставленной задачи, так как синусоидальное колебание с любой начальной фазой может быть представлено в виде линейной комбинации синусоидального и косинусоидального колебаний с нулевыми начальными фазами, к которым опорный сигнал  $\varphi(t)$  в силу (3) ортогонален.

Свойства идеального опорного сигнала  $\varphi(t)$  сформулируем в терминах его спектра

$$\Phi(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)e^{-j\omega t} dt, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty. \quad (4)$$

Вместо (3) можно записать

$$\Phi(j\omega) = 0, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2. \quad (5)$$

Точное выполнение условия (5), к сожалению невозможно, так как целая аналитическая функция (4), тождественно равная нулю на конечном интервале, равна нулю на всей комплексной плоскости  $\omega$  (3). Как видно, идеального решения поставленной задачи нет. Вместе с тем можно построить опорный сигнал конечной продолжительности  $\varphi(t)$ , спектр которого сколь угодно мало уклоняется в чебышевской метрике в ограниченном интервале частот от произвольно заданной непрерывной функции [5].

Аппроксимация построенной функции с точностью до некоторого  $\varepsilon > 0$  обеспечит выполнение условия (5) с погрешностью, не превышающей  $\varepsilon$ . Следовательно, ошибку от действия помехи  $\eta(t)$

при оценивании по алгоритму (1) можно сделать меньше любого наперед заданного  $\varepsilon$ .

Синтез опорного сигнала  $\varphi(t)$  таким способом требует некоторой осторожности. Как отмечено в [5], повышение точности аппроксимации на ограниченном множестве точек функций, которые не могут быть в точности представлены в виде (4), то есть не являются целыми функциями конечной степени (меньшей либо равной  $T/2$ ), с помощью целых функций представленных в виде (4), приводит к неограниченному возрастанию нормы опорного сигнала  $\varphi(t)$

$$\|\varphi(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} \varphi^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega} \quad (6)$$

и как следствие, неограниченному возрастанию энергии спектра в неконтролируемой области частот  $(0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$ .

Переходя к синтезу опорного сигнала, напомним, что в точности выполнить условие ортогональности сигнала  $\varphi(t)$  всем функциям  $e^{-j\omega t}$ ,  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  (3) невозможно. Поэтому заменим (3) требованием ортогональности  $\varphi(t)$  конечному набору функций  $\{e^{-j\Omega_k t}\}_{k=1}^n$ , где  $\omega_1 \leq \Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n \leq \omega_2$ . При большом  $n$  множество частот  $\{\Omega_k\}_{k=1}^n$  можно располагать достаточно плотно лежащими в интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ , так что для значений  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ , не совпадающих с  $\{\Omega_k\}_{k=1}^n$  условие ортогональности (3) будет выполняться с хорошей точностью. Так как полезные сигналы являются четными, представляют интерес лишь четные опорные сигналы  $\varphi(t)$ . Поэтому требование ортогональности  $\varphi(t)$  функциям  $\{e^{-j\Omega_k t}\}_{k=1}^n$  можно заменить условием

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \cos \Omega_k t dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Это условие в сочетании с равенством (2) и требованием их выполнения при минимально возможной норме опорного сигнала  $\varphi(t)$  (6) является специальным случаем  $L$  – проблемы моментов [6], решение которой, как известно, должно иметь вид линейной комбинации функций, входящих в соотношения (2) и (7). Будем искать опорный сигнал  $\varphi(t)$ , обеспечивающий минимально возможное значение нормы при условиях (2) и (7).

Тогда функционал  $\Phi[\varphi(t)]$  можно записать следующим образом

$$\Phi[\varphi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi^2(t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} [\lambda_0 s(t) \varphi(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(t) \cos \Omega_k t] dt,$$

где  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) - коэффициенты.

Обозначим

$$F[\varphi(t), t] = \varphi^2(t) + \lambda_0 s(t) \varphi(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(t) \cos \Omega_k t.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi(t)} = 2\varphi(t) + \lambda_0 s(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos \Omega_k t = 0.$$

Окончательно получим опорный сигнал

$$\varphi(t) = -\lambda_0 s(t) / 2 + \sum_{k=1}^n -\lambda_k \cos \Omega_k t / 2,$$

то есть

$$\varphi(t) = c_0 s(t) + \sum_{k=1}^n c_k \cos \Omega_k t, \quad (8)$$

причем коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_n$  определяются из системы линейных уравнений

$$a_{00}c_0 + a_{01}c_1 + a_{02}c_2 + \dots + a_{0n}c_n = 1$$

$$a_{10}c_0 + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0$$

$$a_{20}c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n0}c_0 + a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n = 0$$

где

$$a_{00} = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt$$

$$a_{0j} = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos \Omega_j t dt$$

$$a_{i0} = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos \Omega_i t dt$$

$$a_{ij} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos \Omega_i t \cos \Omega_j t dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского нетрудно обосновать, что опорный сигнал минимальной энергии, обеспечивающий выполнение равенства (2), совпадает по форме с  $s(t)$  с точностью до константы  $C$ , которая определяется из равенства

$$\|\varphi(t)\| = 1/\sqrt{T}. \quad (9)$$

Рассмотрим, как возрастает энергия спектра в неконтролируемой области  $(0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$  частот в зависимости от возрастания нормы  $\|\varphi(t)\|$  опорного сигнала, то есть в зависимости от количества  $n$  слагаемых.

Преобразование Фурье для опорного сигнала имеет вид

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)e^{-j\omega t} dt$$

Полная энергия  $W_n$  опорного сигнала определяется соотношением

$$W_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\bar{F}(j\omega)d\omega = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi^2(t)dt, \quad (10)$$

где черта над функцией означает знак комплексного сопряжения.

Рассмотрим фиксированную полосу частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . Частичная энергия опорного сигнала в указанной полосе определяется равенством

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(j\omega)\bar{F}(j\omega)d\omega. \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) находим энергию спектра в неконтролируемой области частот  $(0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$

$$E = W_n - W.$$

Учитывая  $W_n = (\|\varphi(t)\|)^2$  в (10), получим

$$E = (\|\varphi(t)\|)^2 - W, \quad (12)$$

где  $\|\varphi(t)\|$  - норма опорного сигнала, который зависит от  $n$  слагаемых. На рисунке 1а приведено возрастание энергии спектра найденного опорного сигнала в неконтролируемой области частот и на рисунке 1б показано возрастание нормы опорного сигнала  $\|\varphi(t)\|$  в зависимости от количества  $n$  при условии  $s(t)=1$ .

Как видно, повышение точности аппроксимации приводит к неограниченному возрастанию энергии спектра в неконтролируемой области. Но чрезмерное увеличение нормы опорного сигнала приводит, во-первых к возрастанию требований к заданию отсчетов этого сигнала, и, во-вторых, к вытягиванию шумов в неконтролируемой полосе частот. Последнее означает, что увеличивая защищенность коррелятора от сосредоточенной по спектру помехи  $\eta(t)$  понижаем его защищенность от флуктуационной помехи типа белого шума. В связи с этим при синтезе опорного сигнала  $\varphi(t)$  необходимо вводить дополнительное ограничение на его норму и, следовательно, на степень возрастания эффективного значения флуктуационной помехи на выходе коррелятора.

В качестве примера рассмотрим синтез опорного сигнала в присутствии сосредоточенной по спектру помехи для информационного сигнала

прямоугольной формы  $s(t)=1$ . Будем считать допустимым превышение нормы опорного сигнала над ее минимально возможным значением (9) на 3дБ (1,41 раза), что соответствует дополнительному возрастанию дисперсии флуктуационной помехи в два раза.

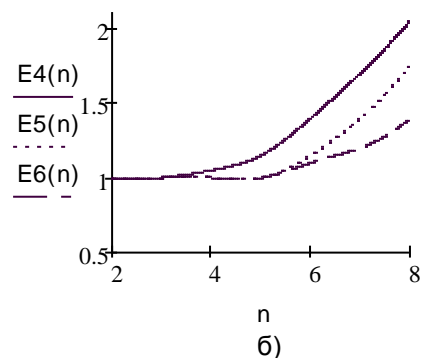
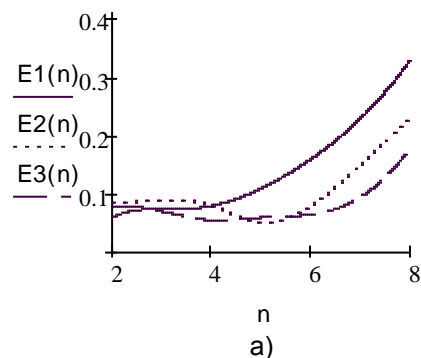
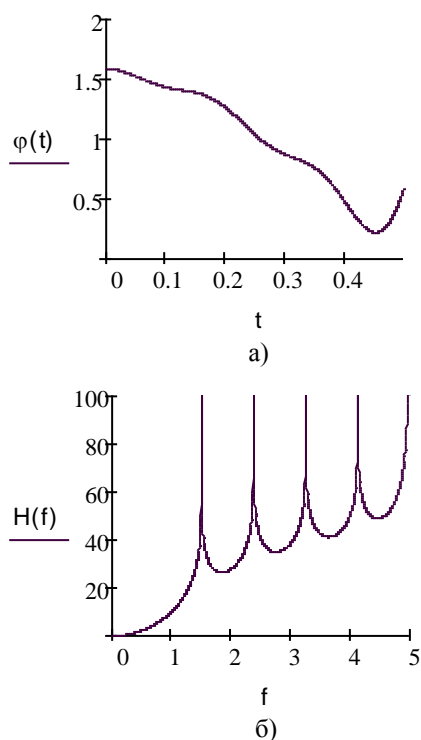


Рисунок 1 – Зависимость энергии опорного сигнала от числа слагаемых  $n$

Примем:  $T=1$  сек.,  $f_1=1,5$  Гц,  $f_2=5$  Гц, где  $f_1$  и  $f_2$  - начальная и конечная частоты, между которыми подавляется сосредоточенная по спектру помеха. Найденная в ходе решения аппроксимационной задачи функция (8) приведена на рисунке 2а, при условии  $n=5$ . Так как опорный сигнал является четным, на графике представлена лишь его половина, соответствующая неотрицательным значениям времени. Норма этого опорного сигнала в 1,06 раза превышает минимально возможное значение (9). На рисунке 2б изображена динамическая частотная характеристика коррелятора с опорным сигналом  $H(f)$ , которая по определению совпадает с функцией  $20 \log |\Phi(f)|$ . Как видно, вносимое коррелятором затухание в диапазоне частот 1,5-5 Гц не меньше 39,6 дБ. Это значение достигается на левом конце диапазона, а в остальной части вносимое затухание существенно больше. Частотную избирательность коррелятора можно было бы повысить, если взять большее число слагаемых  $n$  в формуле (8), но при этом снизилась бы защищенность по отношению к белому шуму из-за возрастания  $\|\varphi(t)\|$ .



**Рисунок 2** – Опорный сигнал (а) и динамическая частотная характеристика коррелятора (б) для сигнала прямоугольной формы, диапазон 1,5-5 Гц

### III. АППРОКСИМАЦИЯ ОПОРНОГО СИГНАЛА ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

В теории синтеза оптимальных устройств обработки сигналов в присутствии помех основополагающую роль играет вопрос нахождения оптимального опорного сигнала. Однако практическая реализация этого сигнала встречает определенные трудности. Поэтому вопрос аппроксимации найденного опорного сигнала представляет интерес.

Как следует из (8), оптимальный опорный сигнал описывается выражением

$$\varphi(t) = c_0 s(t) + \sum_{k=1}^n c_k \cos \Omega_k t .$$

Рассмотрим аппроксимацию опорного сигнала на основе исследования ортогональных многочленов.

Пусть аппроксимирующий сигнал  $f(t)$  имеет вид линейной комбинации многочленов, т.е.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_i(t), \tag{13}$$

где  $\alpha_i$  - решающие коэффициенты,  $P_i(t)$  - многочлены Лежандра степени  $i$ .

Если многочлены  $P_i(t)$  есть ортогональная система функций на промежутке  $[-1,1]$  и функция  $f(t)$  представлена формулой (13), то при заданном  $n$  наименьшая средняя квадратичная ошибка, т.е.

$$D = \int_{-1}^1 (\varphi(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(t))^2 dt$$

будет достигнута.

В нашем случае опорный сигнал определен в интервале  $[-T/2 \leq t \leq T/2]$ . Если система функций  $P_i(t)$  ортогональна на промежутке  $[-1,1]$ , т.е.

$$\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ a_i, & i = j, a_i \neq 0, \end{cases}$$

то система функций  $P_i(2t/T)$  ортогональна на промежутке  $[-T/2, T/2]$  т.е.

$$\int_{-T/2}^{T/2} P_i(2t/T)P_j(2t/T)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ a_i, & i = j, a_i \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда можно записать среднюю квадратичную ошибку

$$D = \int_{-T/2}^{T/2} (\varphi(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(2t/T))^2 dt . \tag{14}$$

Будем искать  $\alpha_i$ , минимизирующие  $D$  в классе функций, являющихся непрерывными вместе со своими первыми производными в интервале  $[-T/2, T/2]$ . Приведем уравнение (14) к виду

$$D = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi^2(t)dt - 2 \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(2t/T)dt + \int_{-T/2}^{T/2} (\alpha_i P_i(2t/T))^2 dt .$$

Отсюда

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = -2 \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)P_i(2t/T)dt + 2\alpha_i \int_{-T/2}^{T/2} P_i^2(2t/T)dt = 0 .$$

Учитывая ортогональность многочленов Лежандра, с весовой функцией  $h(t)=1$ , получим коэффициенты, т.е.

$$\alpha_i = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)P_i(2t/T)dt}{\int_{-T/2}^{T/2} P_i^2(2t/T)dt} .$$

Пологая, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} P_i^2(2t/T)dt = \frac{2}{2i+1},$$

получим

$$\alpha_i = (i+0.5) \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t)P_i(2t/T)dt ,$$

т.е.

$$\alpha_i = (i + 0.5) \left[ c_0 \int_{-T/2}^{T/2} s(t) P_i(2t/T) dt + \sum_{k=1}^n c_k \int_{-T/2}^{T/2} P_i(2t/T) \cos \Omega_k t dt \right],$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

На рисунке 3 изображена структурная схема коррелятора на основе выше найденной аппроксимации опорного сигнала, где  $s(t)$  – входной полезный сигнал,  $\eta(t)$  – сосредоточенная по спектру помеха,  $\varphi(t)$  – опорный сигнал.

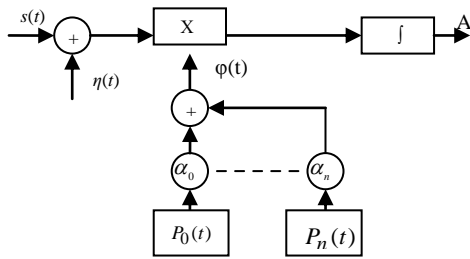


Рисунок 3 – Структурная схема коррелятора

На рисунке 4 приведен аппроксимированный опорный сигнал для сигнала прямоугольной формы, диапазон 1,5-5 Гц, при количестве слагаемых 3,4,5 в формуле (13).

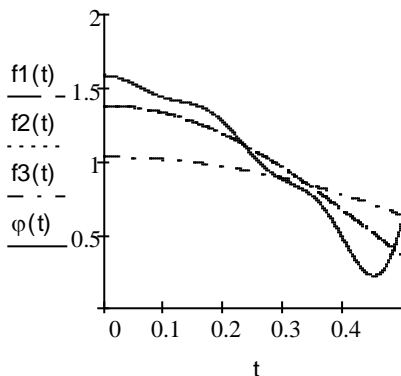


Рисунок 4 – Аппроксимация опорного сигнала

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для того, чтобы оценить предложенный выше метод, рассмотрим зависимость отношения сигнал/шум на выходе коррелятора при найденной аппроксимируемой функции.

С помощью интеграла Дюамеля найдем временной отклик оптимального коррелятора на сигнал. Отклик коррелятора  $S_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}}(t)$  на полезный сигнал будет равен

$$s_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}}(t) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) f_n(t) dt,$$

а отклик коррелятора на помеху

$$\eta_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}}(t) = \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) f_n(t) dt.$$

Тогда отношение сигнал/шум  $q$  на выходе коррелятора будет равно

$$q = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} s(t) f_n(t) dt}{\int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) f_n(t) dt} \quad (15)$$

Как видно из (15), максимально возможное выходное отношение полезного сигнала к помехе при выделении сигнала при помощи коррелятора на фоне сосредоточенной по спектру помехи зависит не только от формы полезного сигнала, но и от найденного опорного сигнала.

На рисунке 5 показана зависимость отношения сигнал/шум в дБ от степени  $n$  многочленов Лежандра.

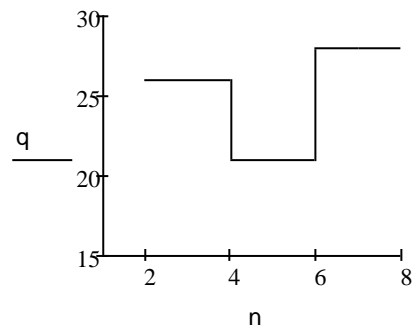


Рисунок 5 – Отношение сигнал/шум на выходе коррелятора

Полученные результаты показывают, что аппроксимация оптимального опорного сигнала с использованием полиномов Лежандра может быть использована при разработке высокоэффективных систем передачи сигналов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Финк, Л.М. Теория передачи дискретных сообщений [Текст] / Л.М. Финк. – М., Советское радио, 1970. – 727 с.
2. Гутников, В.С. Фильтрация измерительных сигналов [Текст] / В.С. Гутников. – Л., Энергоатомиздат, 1990. – 192 с.
3. Михлин, С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала [Текст] / С.Г. Михлин. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. – 216 с.
4. Френкс, Л. Теория сигналов [Текст] / Л. Френкс. – М.: Советское радио, 1974. – 343 с.
5. Хургин, Я. И. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике [Текст] / Я. И. Хургин, В.П. Яковлев. – М.: Физматгиз, 1962. – 220 с.
6. Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи [Текст] / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.