УДК 929:51(091)

Крюков М.М., Клецька Т.С.

З ІСТОРІЇ НЕСКІНЧЕННИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

У статті розглядаються деякі аспекти історії розвитку нескінченних числових рядів.
Ключові слова: *числові ряди, збіжність, ознаки збіжності.*

Існує дуже обширна література з питань загальної історії математики. Серед них треба в першу чергу відзначити такі фундаментальні роботи [1-3, 5-8, 10, 12, 13]. Чимало з неї присвячено окремим її розділам, зокрема нескінченним рядам. В той же час дуже важко відокремити певні питання, щоб мати про них цілісну картину.

В даній статті зроблена спроба розглянути один з аспектів збіжності нескінченних додатних числових рядів.

Будь яку границю $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ можна записати у вигляді нескінченного ряду. Для цього достатньо покласти $s_n = s_{n-1} + a_n$ при $n > 1$ і $s_1 = a_1$. Тоді $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, а значення S є границею суми s_n, що складається з n доданків. Цей факт виражається наступними словами: S є «*сумою нескінченного ряду*» $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

Нескінченний ряд є своєрідний спосіб вивчення границі, для якої кожне наступне наближення значення отримується з попереднього шляхом додавання ще одного члена. Наприклад, принцип зображення числа у вигляді десяткового дробу є не що інше як зображення числа a у вигляді нескінченного ряду [9]:

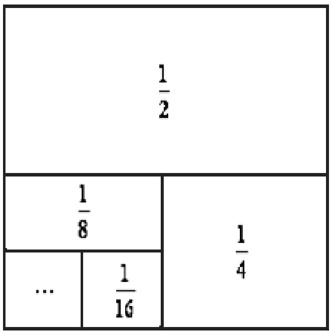
$$a = a_1 + a_2 + a_3 + ...,$$

при цьому, якщо $0 \le a \le 1$, то $a_n = \alpha_n \cdot 10^{-n}$, а α_n означає одне з цілих чисел від 0 до 9. Оскільки кожну границю можна представити у вигляді нескінченного ряду, то, на перший погляд, можливо немає потреби у особливому вивченні рядів. Але в багатьох випадках границі виникають у вигляді нескінченних рядів і при цьому отримуються дуже прості закономірності. Зрозуміло, що не кожне розкладання в ряд виявляє прості закономірності. Наприклад, число π можна представити у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, і ми не можемо вказати довільну цифру цього розкладання. Але якщо відмовитись від представлення π у вигляді десяткового дробу і використати для цього, наприклад, ряд Лейбніца, то отримаємо вираз з надзвичайно простим загальним способом утворення.

Як видно, тут ми маємо справу з математичною нескінченністю. Математична нескінченність, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з’явилася в давньогрецькій або елінській культурі в VIII – VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення. Нескінченні ряди використовували в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми $a_1 + a_2 + ... + a_n$, замість $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$.

Дати відповідь на питання, коли вперше з’явилися ряди в математиці неможливо. Вже вавилонські математики вміли сумувати арифметичну і геометричну прогресії.

Італійський математик П’єтро Менголі (Pietro Mengoli ((1625-1668)) наглядно продемонстрував за допомогою геометричного розкладання, що ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=1$ [1]. Квадрат зі стороною 1 має площу 1. Він ділить площу пополам, потім одну з половин знову ділить пополам і т.д., і отримує нескінченну кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію.



Довгий час питання збіжністі числових рядів не виникало. Тому з виразу для суми нескінченної геометричної прогресії $a+aq+aq^2+...=\frac{a}{1-q}$ у 1754 р. Ейлер «доводив», що $1-1+1-1+...=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$, при цьому, навіть Фур’є спочатку приймав цей результат.

Поняття збіжності числових рядів, мабуть, вперше зявилось у листі Й. Бернуллі до Г. Лейбніца від 7 квітня 1713 р., де він використав вираз «розбіжний ряд» (series divergens). У відповідь у листі від 28 червня Лейбніц використав вираз «збіжний ряд» (series advergens) майже у сучасному сенсі.

У подальшому в обіг увійшов термін convergens (в тому ж сенсі що і advergens), який у 1677 р. застосував для послідовностей Дж. Грегорі, а потім Ньютон [3]. Таким чином, вже Лейбніц явно сформулював означення збіжного ряду і його суми, яке в термінах теорії границь сформулював у 1821 р. Коші.

Треба відзначити, що П’єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ в 50-х роках XVII ст. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668 р. математик Броункер. Свою назву гармонічний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів. Нагадамо, що число c є середнім гармонічним чисел a і b, якщо $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.

Для цього він застосовує нерівність

$$\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}>\frac{1}{k}.$$

Спочатку з $k=1$ він знаходить, що $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$, потім він бере 3^2 членів з $\frac{1}{5}$ по $\frac{1}{13}$, групує їх по три, і показує їх сума також більше 1, далі дається оцінка суми наступних 3^3 членів і т.п. В результаті отримує нескінченну кількість груп з сумами більше 1.

Ці результати він отримав незалежно від француззского математика Орема (Nicolas Oresme (до1330-1382)). В 1350 р. Орем показав розбіжність гармонічного ряду. Його доведення дійшло до нашого часу і використовується в сучасних підручниках. Він групує члени ряду наступним чином:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \;>$$

$$> \;1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$$

Подвоюючи число членів, зібраних в послідовні групи, отримує нескінченну кількість груп з сумами більше $\frac{1}{2}$.

Необхідність сформулювати достатні умови збіжності усвідомлювали великі математики. Для додатних числових рядів (А) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ було сформульовано багато ознак збіжності. Ці ознаки збіжності базуються на порівнянні ряду (А) з різними стандартними рядами.

Так у 1768 р. Ж. Даламбер сформулював таку ознаку на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо при достатньо великому n ($n>N$) виконується нерівність $D_n \le \mathrm{q}$, де q – стале число меньше одиниці, то ряд збігається, а при $D_n \ge 1$ – розбігається.

В роботі [7] відзначається, що сучасний термін «ознака збіжності Даламбера» історично не є коректним. Даламбер розглядав питання про збіжність додатного ряду, вивчаючи розклад $(1+\mu)^m$ при довільному m в «Математичних творах» (1768). при цьому він довів, що ряд дає правильні результати при $-1<\mu<1$. Англійський математик Едуард Варінг (1734-1798) в «Аналітичних роздумах» (1776) цілком коректно сформулював цю ознаку так: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається (збігається), якщо відношення $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ при великих n менше (більше) одиниці. Формулювання цієї ознаки в термінах теорії границь належить Коші (1821р.).

У 1821р. французький математик Огюстен Луі Коші (1789-1857) в своєму курсі « Алгебраїчний аналіз» сформулював ознаку також на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $E_n = \sqrt[n]{a_n}$. Якщо при достатньо великому n ($n>N$) виконується нерівність $E_n \le \mathrm{q}$, де q – стале число менше одиниці, то ряд збігається, а при $E_n \ge 1$ – розбігається.

У подальшому з'ясувалося, що ознака Коші сильніше ознаки Даламбера. В усіх випадках, коли ознака Даламбера дає відповідь на поведінку ряду, цю відповідь дає і ознака Коші, а навпаки це невірно, хоча застосування ознаки Даламбера простіше.

У 1832 р. швейцарський математик Жозеф Раабе (1801-1859) запропонував ознаку збіжності (Z.Phys.Math.), яка базується на порівнянні зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s>1)$ і розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Він будує варіанту $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$. Якщо при достатньо великому n (n>N) виконується нерівність $R_n \ge r$, де r – стале число більше одиниці, то ряд збігається, а при $R_n \le 1$ – розбігається. Ознака Раабе значно сильніше ознаки Даламбера. Так якщо границя $D=\lim D_n$ існує і відмінна від нуля, то для R_n існує границя R рівна $+\infty$, якщо D<1 і рівна – ∞, якщо D>1 .

В 1835 р. німецький математик Ернст Куммер (1810-1893) в статті присвяченій дослідженню збіжності гіпергеометричних рядів (Journal fűr die reine und angewandte Mathematik) запропонував дуже загальну ознаку збіжності. Він будує варіанту $K_n = c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$, де $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ – збіжний додатний ряд. Якщо при достатньо великому n (n>N) виконується нерівність $K_n \ge \delta$, де δ – стале додатне число, то ряд збігається, а при $K_n \le 0$ – розбігається. При $c_n = 1$ ми отримуємо, як частинний випадок, ознаку Даламбера, а при $c_n = n$ – ознаку Раабе.

При $c_n = n\ln n$ виникає нова ознака французького математика Жозефа Бертрана (1822-1900). У 1842р. Бертран встановлює більш тонку логарифмічну ознаку (Journal de Mathematiques Pure et Appliquées). Він будує варіанту $B_n = \ln n\cdot[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] = \ln n\cdot(R_n-1)$. Якщо варіанта B_n має границю (скінченну або ні) $B=\lim B_n$, то при $B_n>1$ ряд збігається, а при $B<1$ – розбігається. Ознака Бертрана більш сильніша ознаки Раабе.

В сучасній математичній літературі вказані ознаки формулюються в граничній формі.

Коли була побудована ця послідовність ознак збіжності додатних рядів, з'ясувалося, що ще у 1812 р. Гаусс довів свою ознаку (Commentationes Gotting), яка випередила на десятиліття дослідження математиків XIX ст. Вона полягала в наступному. Якщо для ряду (A) відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ можна представити у вигляді

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ і μ – сталі, а θ_n – обмежена величина $(|\theta_n| \le L)$, то ряд (A) збігається, якщо $\lambda>1$ або якщо $\lambda=1,\ \mu>1$, і розбігається якщо $\lambda<1$ або $\mu=1,\ \mu\le 1$.

Випадки $\lambda<1$ або $\lambda>1$ приводять до ознаки Даламбера. При $\lambda=1$ і $\mu<1$ або $\mu>1$ - приводять до ознаки Раабе. Якщо $\mu=1$ приходимо до ознаки Бертрана і ряд розбігається.

Ця ознака з'явилася у зв'язку з астрономічними обчисленнями Гаусса, заснованими на розкладанні інтегралів відповідних диференціальних рівнянь в нескінченні ряди, де він зайнявся дослідженням питання про збіжність нескінченних рядів, які він зв'язав з вивченням гіпергеометричного ряду («Про гіпергеометричний ряд», 1812). Тут він вперше називає ряд збіжним, якщо всі його члени, починаючи з деякого місця, необмежено спадають. В сучасному сенсі під збіжним рядом розуміють те що скінченні суми ряду прямують до певної границі. Гаусс перший звернув на це увагу і дав перші критерії збіжності у сучасному змісті [8].

Ці дослідження разом із заснованими на них роботами О. Коші і Нільса Генріка Абеля (1802-1829) привели до прогресу в загальній теорії рядів.

Серед ознак збіжності додатних рядів треба відзначити ознаку, яка базується на порівнянні ряду (A) з невласним інтегралом. Це інтегральна ознака Коші, оприлюднена в тому ж курсі «Алгебраїчний аналіз» (1821р.). Вона полягала в наступному. Нехай ряд (A) можна записати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, де $f(x)$ – неперервна додатна і монотонно спадна функція для $x \geq 1$. Тоді ряд (A) збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

В 1742 р. вийшла робота «Трактат о флюксіях», де видатний англійський математик Колін Маклорен (1698-1746) при визначені поняття суми ряду, застосовував його до виведення цієї інтегральної ознаки геометрично. Він порівняв площу між кривою $y = f(x)$ і її асимптотою з площами вписаної і описаної сходчастих фігур, що дорівнюють сумам ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Цей критерій Маклорен застосував для доведення розбіжності гармонічного ряду і збіжності узагальненого гармонічного ряду при $(s > 1)$. Тому інколи в літературі цю ознаку називають ознакою Коші-Маклорена.

В 1871 р. український професор В.П. Єрмаков (1845-1922) у своїй доповіді на III з'їзді російських природознавців і лікарів зробив доповідь «Признак сходимости знакоположительных рядов», в якій сформулював своєрідну ознаку з тією ж областю застосування, що і інтегральна ознака Коші [4,11]. Формулювання не містить в собі понять інтегрального числення. Вона полягала в наступному.

Нехай виконуються умови, накладені на $f(x)$, так як і для інтегральної ознаки Коші. Тоді якщо для достатньо великих x $(x \geq x_0)$ виконується нерівність

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leq q,$$

то ряд збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Ознака Єрмакова важлива в тому сенсі, що функція e^x, що присутня в ознаці, може бути замінена іншою функцією $\varphi(x)$ додатною неперервною монотонно зростаючою, яка має неперервну першу похідну і задовольняє нерівність $\varphi(x) > x$. Це дозволяє отримувати інші конкретні ознаки збіжності.

Література

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. Изд. 3-е, доп. и испр / Н.В. Александрова. – Москва: Изд. ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер с французкого И.Г. Башмаковой / Н. Бурбаки. - Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 292 с.
3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – Москва: ГИМФЛ, 1960. – 468 с.
4. Добровольський В.А. Василий Петрович Ермаков (1845-1922) / В.А. Добровольский. – Москва: Наука, 1981. – 89 с.
5. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х томах / Под. ред.. А.П. Юшкевича. Т. 1. История математики с древнейших времен до начала нового времени. - Москва: Наука, 1970.–352 с.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х томах / Под. ред. А.П. Юшкевича. Т. 2. Математика XVII столетия. - Москва: Наука, 1970. – 496 с.
7. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х томах под. ред.. А.П. Юшкевича. Т. 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972. – 300 с.
8. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч.1. Пер. с немец. – Москва;Ленинград: ОНТИ, 1937. – 432 с.
9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Р. Курант. - Москва: Наука,1967. – 704 с.
10. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк – Москва: Наука, 1984. – 285 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1966.- Т.2. – 800 с.
12. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. Пер. А.П. Юшкевича с. франц. / Г.Г. Цейтен. – Москва; Ленинград: ГТТИ, 1932. – 230 с.
13. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках. Пер. П. Новикова с немец. / Г.Г. Цейтен. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1938. – 456 с.

Крюков Н.Н., Клецька Т.С. Из истории бесконечных числовых рядов

В статье рассматриваются некоторые аспекты истории развития бесконечных числовых рядов.

Ключевые слова: *числовые ряды, сходимость, признаки сходимости.*

Kryukov N.N., Kletska T.S. From history of infinite numerical series

Some aspects of history of mathematical symbols and concepts of mathematical analysis are examined.

Keywords: *numerical series, convergence, signs of convergence.*