



# ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕКОНОМІЧНА БЕЗПЕКА

УДК 330.4:519

Якимова Л.П.,  
*к.е.н., доцент кафедри економічної кібернетики  
та інформаційних технологій*  
Мотченко Д.С.  
*Донбаський державний технічний університет, м. Алчевськ*

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПОШИРЕННЯ ІННОВАЦІЙНИХ ПРОДУКТІВ ТА ПОСЛУГ

Yakymova L.P.,  
*can.d.sc.(econ.), assistant professor of the department  
of economic cybernetics and information technologies*  
Motchenko D.S.  
*Donbass State Technical University, Alchevs'k*

## MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF THE INNOVATIVE PRODUCTS AND SERVICES

**Постановка проблеми.** Згідно Закону України «Про інноваційну діяльність» [1], головною метою державної інноваційної політики є створення соціально-економічних, організаційних і правових умов для ефективного відтворення, розвитку й використання науково-технічного потенціалу країни, забезпечення впровадження сучасних екологічно чистих, безпечних, енерго- та ресурсозберігаючих технологій, виробництва та реалізації нових видів конкурентоздатної продукції. Без істотних інновацій Україна не зможе забезпечити високий рівень життя населення і стійке економічне зростання. Тільки інноваційний розвиток дозволить підвищити конкурентоспроможність економіки, здійснити прогресивні структурні зрушення в країні, оновити реальний сектор економіки, забезпечити сталий соціально економічний розвиток держави. Однак на сьогодні інноваційний розвиток не став основою зростання національної економіки України. Тому зусилля фахівців необхідно зосередити на дослідженні процесу поширення інновацій, визначенні чинників його прискорення, виявленні оптимальних дій щодо зміни інноваційної стратегії.

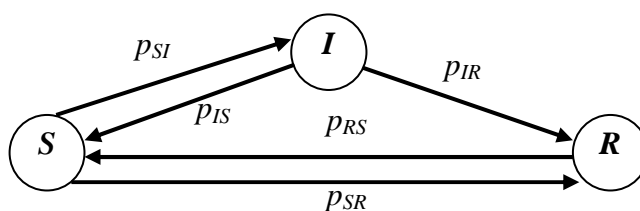
**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Найбільш відомі теорії поширення інновацій – дифузні моделі Е. Роджерса і Ф. Басса. В основі моделі Е. Роджерса [2] лежить сегментація потенційних споживачів інновації за ознакою індивідуальної схильності до прийняття інновації. Ф. Басс [3] на основі роботи Е. Роджерса розробив математичну модель розповсюдження нових продуктів в умовах припущення: ймовірність здійснення покупки нового продукту споживачем є лінійною функцією від числа попередніх покупців. Разом з тим модель Ф. Басса визначає динаміку лише кількості осіб, що прийняли новацію, інші потенційні споживачі інновації не враховуються. У цьому випадку вважається за доцільне використовувати моделі епідемії, які дозволили б усунути цей недолік. Вперше класична модель епідемії, так звана, SIR-модель, була запропонована британськими вченими В. Кермаком і А. МакКендриком [4] для дослідження розповсюдження соціально значущих хвороб. Подальшого та найбільш повного розвитку такі моделі дістали в [5], де сформульована і викладена теорія лавиноподібних соціально-економічних процесів (паніки,

ажіотажу зокрема). Подібними моделями описують поширення інформації у соціальній мережі [6], поведінку інвесторів [7], колективну соціальну динаміку індивідуальних пожертвувань [8], розповсюдження недержавного пенсійного забезпечення [9], поширення шкідливих програм в комп'ютерних мережах [10] тощо. Моделі зараження, навіювання та наслідування, як головних механізмів соціально-психологічного впливу, представляють собою ефективний засіб вивчення поширення інновацій.

**Постановка завдання.** Метою статті є розробка математичних моделей динаміки поширення інноваційних продуктів і послуг як лавиноподібного процесу, що дозволяють досліджувати та прогнозувати динаміку споживання.

**Виклад основного матеріалу досліджень.** Відповідно до теорії дифузії інновацій [11], будь-яка інновація (наприклад, нова ідея, методика, технологія, продукт) дифундує, тобто поширюється в суспільстві за певною передбачуваною моделлю. Деякі люди приймають інновацію відразу ж, щойно почувши про неї. Іншим людям потрібно більше часу, щоб спробувати що-небудь нове, у третіх цей процес проходить ще довше. Спираючись на ці постулати та визначення SIR-моделі епідемії [4], моделі лавиноподібних процесів [5], моделі поширення недержавного пенсійного забезпечення [9] введемо наступні гіпотези. Населення регіону, де поширюється інновація, чисельністю  $N(t)$  у момент  $t$  можна розбити на три групи. Перша група поєднує осіб, які позитивно ставляться до нововведень, вони є можливими споживачами інноваційного продукту чи послуги (новації). Назвемо їх потенційними новаторами, а їх кількість у момент  $t$  позначатимемо через  $S(t)$ . Друга група поєднує осіб, які вже є споживачами новації – це дійсні новатори, розповсюджувачі новаторських ідей, агенти. Їх кількість у момент  $t$  позначатимемо через  $I(t)$ . Нарешті, третя група – це особи, які діють за звичкою, негативно відносяться до всяких нововведень та змін. Назвемо їх консерваторами або рутинерами (рутинер – (фр., від routine) людина відстала, що діє за звичкою, боїться всяких нововведень [12]), а їх кількість у момент  $t$  позначатимемо через  $R(t)$ . Отже, загальна чисельність населення регіону у момент  $t$  дорівнює сумі  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ .

Оцінимо динаміку визначених груп. Скорочення кількості потенційних новаторів  $S(t)$  відбувається за рахунок вступу до споживачів новаторського продукту  $\Delta_I S(t)$  та переходу до сукупності тих хто не сприймає новаторський продукт, або тих хто розчарувався в новаторському продукті  $\Delta_R S(t)$ , а приріст – за рахунок виходу із спільноти новаторів  $\Delta_S I(t)$  за різних причин, та за рахунок переконання рутинерів  $\Delta_S R(t)$ . Визначення приростів здійснюється на підставі підходу, запропонованому у [5] та [9].



**Рис. 1. Схема процесу поширення інноваційного продукту**

Джерело: розробка авторів

Нехай індивіди усіх типів розподілені у соціумі рівномірно. Нехай далі кожний індивідуум, що не є новатором, контактує з  $r$  індивідуумами в одиницю часу, серед яких

частка новаторів дорівнює  $\frac{I(t)}{N(t)-1}$  (адже сам індивід не бере участі у визначенні частки).

Отже, на індивідуума впливають  $r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}$  новаторів. Залучити до інновації можна лише

потенційного споживача, рутинери спочатку змінюють свою «ідеологію», тобто спочатку стають потенційними, а вже потім дійсними новаторами. Ймовірність залучення однієї особи до споживача новаторського продукту при одноразовому контакті дорівнює  $p_{S1}$ , а ймовірність переконання одного рутинера  $p_{R1}$ . Далі, приймаючи гіпотезу про незалежний вплив декількох агентів, отримуємо ймовірність того, що особа буде залучена до споживачів інноваційного продукту хоча б одним агентом:

$$p_S = 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}}. \quad (1)$$

Звідси скорочення кількості потенційних новаторів за рахунок залучення до спільноти споживачів інноваційного продукту за період  $\Delta t$  дорівнює:

$$\Delta_I S(t) = S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Подібним чином визначається й приріст за період  $\Delta t$  кількості потенційних новаторів за рахунок приєднання до новаторської ідеї рутинерів:

$$\Delta_S R(t) = R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Що стосується скорочення за період  $\Delta t$  кількості потенційних новаторів за рахунок переходу до сукупності рутинерів та приросту за рахунок виходу із спільноти новаторів, але неостаточної відмови від новаторського продукту, то є підстави вважати їх пропорційними чисельності цих груп, тобто

$$\Delta_R S(t) = p_{SR} \cdot S(t) \cdot \Delta t, \quad (4)$$

$$\Delta_S I(t) = p_{IS} \cdot I(t) \cdot \Delta t, \quad (5)$$

де  $p_{SR}$  – коефіцієнт (інтенсивність) остаточної відмови від новаторського продукту для потенційних новаторів в одиницю часу;  $p_{IS}$  – коефіцієнт вибуття із новаторської спільноти, але неостаточної відмови від новаторського продукту, в одиницю часу.

Отже, загальний приріст сукупності потенційних новаторів за період  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta S(t) = & -S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} + p_{SR} \right] \Delta t + p_{IS} I(t) \Delta t + \\ & + R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічні міркування проводяться для визначення зміни кількості дійсних прихильників новаторського продукту, приріст відбувається за рахунок вступу до спільноти новаторів  $\Delta_I S(t)$ , а скорочення – за рахунок виходу із новаторської спільноти й остаточної відмови від цього продукту  $\Delta_R I(t)$  або відмови лише на деякий час, тобто переходу до сукупності потенційних новаторів  $\Delta_S I(t)$ :

$$\Delta I(t) = S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t - (p_{IS} + p_{IR}) \cdot I(t) \cdot \Delta t, \quad (7)$$

де  $p_{IR}$  – коефіцієнт (інтенсивність) остаточної відмови від новаторського продукту для новаторів в одиницю часу.

Розділивши рівняння (6-7) на  $\Delta t$  та переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримуємо модель динаміки поширення новаторського продукту у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} + p_{SR} \right] + I(t) \cdot p_{IS} + \\ &+ R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right]; \\ \frac{dI(t)}{dt} &= S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] - I(t) \cdot [p_{IS} + p_{IR}]; \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \frac{dN(t)}{dt} - \frac{dS(t)}{dt} - \frac{dI(t)}{dt}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Для однозначного визначення розв'язання системи, необхідно задати початкові умови. У якості нульового моменту часу  $t_0$  природно обрати момент появи нового продукту чи послуги. Початкова кількість новаторів дорівнює  $I(t_0) = I_0$ , рутинерів –  $R(t_0) = R_0$ , а початкова кількість потенційних новаторів обчислюється як різниця  $S(t_0) = S_0 = N_0 - R_0 - I_0$ .

Для визначення кількості новаторів і рутинерів скористаємося моделлю Е. Роджерса [2], згідно якої новатори складають 2,5%, вони більш зорієнтовані зовні, ніж члени інших категорій. Відстаючі (рутинери) складають 16%, вони підозріло ставляться до всього нового. Потенційних новаторів Е. Роджерс розбиває на три категорії: ранні послідовники, рання більшість, пізня більшість. Спираючись на модель Е. Роджерса, приймемо  $I_0 = 2,5\%$ ,  $R_0 = 16\%$  та  $S_0 = 81,5\%$ .

Однак більш інформативним є опис динаміки поширення інноваційних продуктів у частках визначених груп соціуму  $k_S(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$ ,  $k_I(t) = \frac{I(t)}{N(t)}$ ,  $k_R(t) = \frac{R(t)}{N(t)}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dk_S(t)}{dt} &= -k_S(t) \cdot \left[ \frac{d \ln N(t)}{dt} + \left( 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot k_I(t)} \right) + p_{SR} \right] + \\ &+ k_I(t) \cdot p_{IS} + k_R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot k_I(t)} \right]; \\ \frac{dk_I(t)}{dt} &= k_S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot k_I(t)} \right] - k_I(t) \cdot \left[ \frac{d \ln N(t)}{dt} + p_{IS} + p_{IR} \right]; \\ \frac{dk_R(t)}{dt} &= -\frac{dk_S(t)}{dt} - \frac{dk_I(t)}{dt}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

за початкових умов:  $k_I(t_0) = k_{I0}$ ,  $k_R(t_0) = k_{R0}$ ,  $k_S(t_0) = k_{S0} = 1 - k_{I0} - k_{R0}$ .

Разом з тим, для опису процесу поширення інноваційних продуктів більш природною є дискретна модель (10), оскільки сам процес є дискретним, у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t \cdot \left[ (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_{t-1}}} - p_{SR} \right] + I_t \cdot p_{IS} + R_t \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_{t-1}}} \right]; \\ I_{t+1} = S_t \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_{t-1}}} \right] + I_t \cdot [1 - p_{IS} - p_{IR}]; \\ R_{t+1} = N_{t+1} - S_{t+1} - I_{t+1}, \end{cases} \quad (10)$$

де  $S_0, I_0, R_0, N_0$  – відомі початкові значення.

**Висновки та подальші дослідження.** Отримані моделі (8-10) є базовими, оскільки дозволяють аналізувати та прогнозувати лише загальні тенденції поширення інноваційних продуктів або послуг, як динаміки чисельності визначених трьох груп споживачів. Необхідність врахування сегментації потенційних споживачів нового продукту за ознакою індивідуальної схильності до сприйняття інновації за Е. Роджерсом (п'ять сегментів), а також неоднорідності соціуму за віковим, соціальним, психологічним, рольовим складом та нестаціонарності імовірнісних характеристик визначає напрямок подальших досліджень авторів.

### Література

1. Закон України «Про інноваційну діяльність» від 04.07.2002 №40-IV [Електронний ресурс]: Відомості Верховної Ради України. – 2002. – №36. (Із змінами, внесеними згідно із Законами України 2002 – 2012 рр.: Редакція від 05.12.2012) // Верховна Рада України: Законодавство України. – Режим доступу: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/40-15>
2. Rogers E. M. A History of Communication Theory. An Introduction to Planned Communication / E. M. Rogers. – London etc., 1992. – 62 p.
3. Bass Frank M. New Product Growth Model for Consumer Durables / Frank M. Bass // Management science. – 2004. – № 15. – pp. 215-227.
4. Kermack W.O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W.O. Kermack A.G. McKendrick // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol. 115. – 1927. – pp. 700-721.
5. Данич В.Н. Моделирование быстрых социально-экономических процессов: монография / В.Н. Данич. – Луганск: Изд-во Восточноукраинского национального университета им. В. Даля, 2004. – 304 с.
6. Губанов Д.А. Модели влияния в социальных сетях / Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 27. – С. 205–281.
7. Shive S. An Epidemic Model of Investor Behavior / S. Shive // [Електронний ресурс]: Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 2010. – № 45. – Pp. 169-198. – Режим доступу: <http://journals.cambridge.org>
8. Schweitzer F. The Epidemics of Donations: Logistic Growth and Power-Laws / F. Schweitzer, R. Mach // [Електронний ресурс]: PLoS ONE. – 2008. – №3(1). – Режим доступу: <http://www.plosone.org/article>
9. Даніч В.М. Моделі динаміки розповсюдження недержавного пенсійного забезпечення / В.М. Даніч, Л.П. Якимова // Вісник СНУ ім. Володимира Даля. – Луганськ, 2011. – № 2 (156). Ч. 1. – С. 65-70.
10. Новиков С.В. Эпидемиологические модели прогнозирования вирусных атак / С.В. Новиков // Теория и технология программирования и защиты информации: Мат. X международной научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 18 мая 2006 г. – Санкт-Петербург, 2006. – С. 35-36.
11. Rogers E.M. Diffusion of innovations / E.M. Rogers. – New York: Free Press, 1995. – 519 p.
12. Словарь иностранных слов, вошедших в состав русского языка / Под ред. А. Н. Чудинова. – Изд. 3-е, исправ. и доп. – СПб.: Издание В. И. Губинского, 1910. – 582 с.

## References

1. Zakon Ukrainy Pro innovatsiynu diyalnist [Law of Ukraine «On innovation activity»] vid 04.07.2002 №40-IV, Vidomosti Verkhovnoi Rady Ukrainy, 2002, no. 36. (Iz zminamy, vnesenymy zhidno iz Zakonamy Ukrainy 2002–2012 yy., Redakziia vid 05.12.2012) // Verkhovna Rada Ukrainy: Zakonodavstvo Ukrainy. available at: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/40-15>
2. Rogers, E.M. (1992), *A History of Communication Theory. An Introduction to Planned Communication*, London etc., 62p.
3. Frank, M. Bass (2004), “New Product Growth Model for Consumer Durables”, *Management science*, no. 15, pp. 215-227.
4. Kermack, W.O., McKendrick, A.G. (1927), “A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 115, pp. 700-721.
5. Danich, V.N. (2004), *Modelirovanie bystrykh sotsialno-ekonomicheskikh protsesov: monografiya* [Modeling of rapid socio-economic processes], monograph, Lugansk: Izd-vo Vostochnoukrainskogo natsionalnogo universiteta im. V. Dalya, Lugansk, Ukraine, 304 p.
6. Gubanov, D.A., Novikov, D.A., Chkhartysvili, A.G. (2009), “Models of influence in social networks”, *Upravlenie bolshimi sistemami*, Vol. 27, pp. 205–281.
7. Shive, S. (2010), “An Epidemic Model of Investor Behavior”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, no. 45, pp. 169-198, available at: <http://journals.cambridge.org>
8. Schweitzer, F., Mach, R. (2008), *The Epidemics of Donations: Logistic Growth and Power-Laws*, no. 3 (1), available at: <http://www.plosone.org/article>
9. Danich, V.M., Yakimova, L.P. (2011), “Modeling the dynamics of distribution of the non-state pension provision”, *Visnyk SNU im. Volodymyra Dalia*, no. 2 (156), part 1, pp. 65-70.
10. Novikov, S.V. (2006), *Epidemiologicheskie modeli prognozirovaniya virusnykh atak* [Epidemic models of forecasting viral attacks] // *Teoriya i tekhnologiya programirovaniya i zachity informazii: Mat. X mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Sankt-Peterburg*, 18 may 2006, St. Petersburg, Russia, pp. 35-36.
11. Rogers, E.M. (1995), *Diffusion of innovations*, New York: Free Press, 519 p.
12. Chudinov, A.N. (1910), *Slovar inostrannykh slov, voshedshikh v sostav russkogo yazyka* [The dictionary of foreign words, that have been included and implemented into Russian language], Izd. 3-e, isprav. I dop, SPb. : Izdanie V I. Gubinskogo, 582 p.