

$$(1-C_p)V = \frac{1}{F} \int_F (1-\bar{c}) \bar{v}_w dF, \quad (7)$$

где C, C_p — средние по сечению объемная и расходная концентрации; V — средняя скорость движения гидросмеси. Уравнения (3) и (4) относятся к одномерному потоку гидросмеси.

Складывая почленно уравнения (3) и (4), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) вытекает, что независимо от закона изменения концентраций C и C_p по t и x , средняя скорость движения гидросмеси V , равно как и расход $Q = VF$, не зависит от x . Эти параметры могут быть либо постоянными, либо зависящими от t величинами. Независимость параметров V и Q от x обусловлена несжимаемостью жидкой и твердой фаз и гидросмеси в целом.

Выразим в уравнении (3) расходную концентрацию C_p через C . Для этого используем уравнение, связывающее концентрации C_p и C друг с другом при установившемся процессе гидротранспортирования сыпучих материалов по горизонтальным трубам [5]:

$$C_{p,0} = C_0 \left[1 - f_p \left(1 - \frac{C_0}{C_m} \right)^{2,16} \left(\frac{V_{kp}}{V} \right)^{1,66} \right], \quad (9)$$

$$f_p = 0,45 \left[1 + \operatorname{sign} f \cdot \operatorname{th}(0,967 |f^{0.6}|) \right], \quad (10)$$

$$f = \lg \operatorname{Re}_s - 0,88; \quad (11)$$

$$V \geq V_{kp}, \quad (12)$$

где $C_{p,0}$, C_0 и C_m — расходная, объемная и предельно возможная концентрации гидросмеси при стационарном процессе гидротранспортирования; V_{kp} — критическая скорость гидротранспортирования, соответствующая началу образования осадка твердых частиц на нижней стенке трубы; Re_s — число Рейнольдса для частиц твердого материала; $\operatorname{Re}_s = w_s d_s / v_w$; w_s, d_s — гидравлическая крупность и средний диаметр твердых частиц, v_w — кинематическая вязкость несущей жидкости.

Будем полагать, что уравнение (9) является правомочным в случае возмущения объемной концентрации, т.е. когда

$$C = C_0 + C', \quad (13)$$

где $C' = C'(t, x)$ — пульсационная составляющая концентрации. Тогда уравнение (9) следует переписать в виде

$$C_p = C \left[1 - f_p \left(1 - \frac{C}{C_m} \right)^{2,16} \left(\frac{V_{kp}}{V} \right)^{1,66} \right]. \quad (14)$$

Удельный перепад пьезометрического напора

Для решения задачи об удельном (на единице длины трубы) перепаде пьезометрического напора при гидротранспортировании сыпучих материалов в случае, когда объемная концентрация твердых частиц в потоке изменяется по закону (20), используем уравнение Бернулли для неустановившегося напорного движения гидросмеси. Это уравнение, представленное в форме напоров, имеет вид [4]

$$\frac{\rho}{\rho_w} \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho_w g} + \frac{\rho_p}{\rho_w} z + h_{TP} + h_u = const \quad (21)$$

(вдоль потока),

$$h_u = \int \left[\alpha_1 \frac{\rho_s}{\rho_w} \frac{1}{g} C_p \frac{\partial V_s}{\partial t} + \alpha_2 \frac{1}{g} (1 - C_p) \frac{\partial V_w}{\partial t} + \right. \\ \left. + \alpha_3 \left(\frac{\rho_s}{\rho_w} \frac{V_s^2}{2g} - \frac{V_w^2}{2g} + \left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right) z \right) \frac{1}{V} \frac{\partial C}{\partial t} + \right. \\ \left. + \alpha_4 \frac{1}{z} C \frac{1}{V} \frac{\partial (V_w - V_s)^2}{\partial t} \right] dx, \quad (22)$$

$$\rho = \rho_s \alpha_s \frac{C_p^3}{C^2} + \rho_w \alpha_w \frac{(1 - C_p)^3}{(1 - C)^2} \quad (23)$$

$$\rho_p = C_p \rho_s + (1 - C_p) \rho_w. \quad (24)$$

В уравнении (21) обозначены: ρ_w , ρ_s — плотность несущей жидкости и твердых частиц; ρ , ρ_p — эффективная расходная плотность гидросмеси; g — ускорение свободного падения; P — давление; z — геометрическая высота центра живого сечения относительно выбранной горизонтальной плоскости сравнения; h_{TP} и h_u — потери гидродинамического напора, связанные с работой внутренних и внешних сил трения в потоке и, соответственно, с работой локальной составляющей силы инерции гидросмеси в данный момент времени. Величина h_u называется инерционным напором для потока гидросмеси. Поправочные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ в (22), а также коэффициенты α_s и α_w , входящие в (23) и представляющие собой коэффициенты кинетической энергии для твердой и жидкой фаз (аналог коэффициента Кориолиса для потока однородной жидкости), учитывают неравномерность распределения осредненных скоростей и концентраций твердых частиц и несущей среды в живом сечении. Здесь попутно отметим, что в настоящее время значения коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ вообще не изучены. Что касается коэффициентов α_s и α_w , то, как установлено в [6], при сравнительно больших скоростях движения гидросмеси $V > V_{sp}$ значения этих коэффициентов близки друг к другу и приблизительно равняются коэффициенту Кориолиса для соответствующего потока однородной жидкости. Поскольку в инженерных гидравлических расчетах значение коэффициента Кориолиса часто принимают равным единице, ниже, при пользовании уравнением (21), значения всех коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, и α_s и α_w тоже будем принимать равными единице.

Уравнение (21) относится к некоторому определенному моменту времени. Поэтому все члены этого уравнения должны вычисляться для одного и того же момента времени.

Пусть движение гидросмеси совершается в горизонтальной прямой трубе. Выбрав плоскость сравнения на уровне геометрической оси трубы и наметив вдоль потока произвольно два живые сечения 1-1 и 2-2, находящиеся на расстоянии L друг от друга, можно написать вместо (21)

$$\frac{\rho_1}{\rho_w} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho_w g} = \frac{\rho_2}{\rho_w} \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho_w g} + h_{TP} + h_u. \quad (25)$$

Принимая во внимание, что в данном случае $V_1 = V_2 = V$, после преобразования уравнения (25) получим

$$\frac{P_1}{\rho_w g} - \frac{P_2}{\rho_w g} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_w} \frac{V^2}{2g} + h_{TP} + h_u. \quad (26)$$

Левая часть уравнения (26) выражает перепад пьезометрического напора при переходе от сечения 1-1 к сечению 2-2, а первое слагаемое правой части этого уравнения — разность скоростных напоров в соответствующих сечениях. Перепад пьезометрического напора обозначим через ΔH , а разность скоростных напоров — через ΔH_V :

$$\Delta H = \frac{P_1}{\rho_w g} - \frac{P_2}{\rho_w g};$$

$$\Delta H_V = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_w} \frac{V^2}{2g}. \quad (27)$$

С учетом этих обозначений уравнение (26) принимает упрощенный вид:

$$\Delta H = \Delta H_V + h_{TP} + h_u. \quad (28)$$

Выразим каждое из слагаемых правой части уравнения (28) через пульсацию концентраций C' . Рассматривая первое из этих слагаемых, отметим, что оно вообще не равняется нулю, поскольку эффективная плотность гидросмеси ρ может принимать в данный момент времени разные значения на концах расчетного участка трубы, находящегося между сечениями 1-1 и 2-2. Величину ΔH_V выразим через C' следующим образом. Разделим уравнение (23) на ρ_w , затем подставим вместо расходной концентрации C_p ее выражение (15), а вместо концентрации C — выражение (19). В результате последующих элементарных преобразований получим выражение

для $\frac{\rho}{\rho_w}$ в виде так называемой сложной функции аргумента $C'(t, x)$:

$$\frac{\rho}{\rho_w} = \frac{(N_1 - BC')^3}{(N_2 - C')^2} + aC' + b. \quad (29)$$

$$N_1 = 1 - BC_0, \quad N_2 = 1 - C_0; \quad a = \frac{\rho_s}{\rho_w} B^3; \quad b = \frac{\rho_s}{\rho_w} B^3 C_0.$$

При этом функция $C'(t, x)$ должна определяться согласно (19). Если отсчитывать переменную x от начального сечения расчетного участка трубы, то

$$\frac{\rho_1}{\rho_w} = \frac{\rho[C'(t, 0)]}{\rho_w} \quad \text{при } x = 0;$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_w} = \frac{\rho[C'(t, L)]}{\rho_w} \quad \text{при } x = L.$$

Тогда выражение (27) принимает вид:

$$\Delta H_V = \frac{1}{\rho_w} (\rho[C'(t, L)] - \rho[C'(t, 0)]) \frac{V^2}{2g}. \quad (30)$$

Что касается второго слагаемого правой части уравнения (28), то его можно определить следующим образом. Экспериментально установлено, что в случае установившегося напорного течения гидросмеси с неизменной во времени средней концентрацией C_0 , удельные потери на трение i_0 в большинстве случаев линейно зависят, при прочих равных условиях, от C_0 . Эта зависимость может быть описана аппроксимирующей функцией типа:

$$i_0 = i_w + \alpha C_0, \quad (31)$$

где i_w — удельная потеря напора на трение в соответствующем потоке однородной жидкости, определяемая по обычным формулам гидравлики; α — эмпирический коэффициент, определяемый в каждом конкретном случае на основе экспериментальных данных по измерению удельных потерь на трение при гидротранспорте. В зависимости от условий гидротранспортирования величина α может либо зависеть от средней скорости потока, диаметра трубы, характеристик твердого материала и прочих параметров, либо быть постоянной.

В случае стационарно пульсирующей концентрации при постоянном расходе гидросмеси, когда удельные потери напора на трение, как и сама концентрация, переменны вдоль потока, величина h_{TP} должна определяться интегрально с учетом потерь на трение по всей длине расчетного участка трубы. В этом случае имеем, учитывая (13) и аппроксимацию (31),

$$h_{TP} = \int_0^L (i_w + \alpha C_0) dx + \int_0^L C' dx,$$

или

$$h_{TP} = i_0 L + h'_{TP}, \quad (32)$$

$$h'_{TP} = * \int_0^L C' dx, \quad (33)$$

где h'_{TP} — дополнительные потери на трение, обусловленные возмущением концентрации.

Чтобы определить третье слагаемое правой части уравнения (28), достаточно заменить в (22) неопределенный интеграл на определенный с пределами интегрирования от 0 до L и, кроме того, принять значение $z = 0$. В таком случае будем иметь

$$h_u = \int_0^L \left[\frac{\rho_s}{\rho_w} C_p \frac{1}{g} \frac{\partial V_s}{\partial t} + (1 - C_p) \frac{1}{g} \frac{\partial V_w}{\partial t} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\rho_s}{\rho_w} \frac{V_s^2}{2g} - \frac{V_w^2}{2g} \right) \frac{1}{V} \frac{\partial C}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4g} C \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} (V_w - V_s)^2 \right] dx. \quad (34)$$

Выразим входящие в (34) величины V_w и C_p через пульсацию концентрации C' :

$$V_w = \frac{N_1 - C'}{N_2 - C'} V, \quad (35)$$

$$C_p = B(C_0 + C'). \quad (36)$$

Подставим выражения (13), (35) и (36), а также выражение $V_s = BV$ в уравнение (34), после чего вычислим интеграл в (34). Для этого интеграла первообразная сложная функция аргумента $C'(t, x)$, которую обозначим символом $\phi(C')$, имеет вид:

$$\phi(C') = -\frac{V}{2g} \cdot \frac{\omega}{k} \phi(C'), \quad (37)$$

$$\phi(C') = A_1 + A_2 C' + \frac{A_3 N_2}{2(N_2 - C')^2}, \quad (38)$$

$$A_1 = B^2 - (2B - 1)C_0,$$

$$A_2 = B^2 \left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right),$$

$$A_3 = (1 - B)^2.$$

Следовательно, вычисление определенного интеграла в (34) дает:

$$h_u = -\frac{V}{2g} \frac{\omega}{k} (\bar{\phi}[C'(t, L)] - \bar{\phi}[C'(t, 0)])$$

или, учитывая, что $\frac{\omega}{k} = BV$,

$$h_u = -B \frac{V^2}{2g} (\bar{\varphi}[C'(t, L)] - \bar{\varphi}[C'(t, 0)]). \quad (39)$$

Подставив в (28) выражение (32), затем разделив полученное уравнение на L , получим, введя обозначение

$$i = \frac{\Delta H}{L};$$

$$i = i_0 + \frac{1}{L} (\Delta H_V + h'_{TP} + h_u),$$

или

$$i = i_0 + \frac{1}{L} H', \quad (40)$$

где

$$H' = (\Delta H_V + h'_{TP} + h_u).$$

Величины ΔH_V , h'_{TP} , h_u , а следовательно и H' , зависят от времени t и параметра L и эти зависимости носят синусоидальный характер. Поэтому уравнение (40) позволяет сделать вывод, что в любой заданный момент времени влияние пульсаций концентрации на величину удельных потерь пьезометрического напора при гидротранспорте может быть ощущим лишь в случае сравнительно коротких труб, длина L которых не превышает длину бегущей волны λ . Для более длинных труб это влияние ослабевает и в случае, когда $L \gg \lambda$, величина i практически равняется i_0 .

Степень влияния возмущения концентрации на величину i при различных значениях продемонстрируем на двух примерах.

Рассмотрим случай, когда по горизонтальной трубе диаметром $D = 103$ мм стабильно гидротранспортируется с невозмущенной объемной концентрацией C_0 песок крупностью $d_s = 0,4$ мм и относительной плотнос-

тью $\frac{\rho_s}{\rho_w} = 2,65$. Кривые зависимости удельных потерь на трение i_0 от средней скорости гидросмеси V при различных концентрациях C_0 , построенные по экспериментальным данным [7], показаны на рис. 1. Эти кривые вполне удовлетворительно описываются аппроксимирующей функцией типа (31):

$$i_0 = i_w + \alpha C_0, \quad (41)$$

$$\alpha = 1,09 \left(\frac{\sqrt{gD}}{V} \right)^{0.86}.$$

Начальными точками сплошных кривых 2–4 на рис. 1 соответствуют критические режимы гидротранспортирования.

Выберем для примера стационарный режим гидротранспортирования, которому соответствуют: $C_0 = 0,121$, $V_{kp} = 2,35$ м/с, $V = 3$ м/с, $i_w = 0,065$, $i_0 = 0,111$. В данном случае $\alpha = 0,4256$, $B = 0,7273$.

Пусть на заданную концентрацию накладывается гармоническое возмущение C' , определяемое по формуле

(19). Будем полагать, что амплитуда возмущения $A = 0,5C_0 = 0,0605$, круговая частота $\omega = 1,256$ с⁻¹, волновое число $k = 0,575$ м⁻¹, а соответствующий ему пространственный масштаб волны $\lambda = 10,9$ м. Требуется определить для заданных условий гидротранспортирования величину i и сопоставить ее с i_0 для различных длин трубы L .

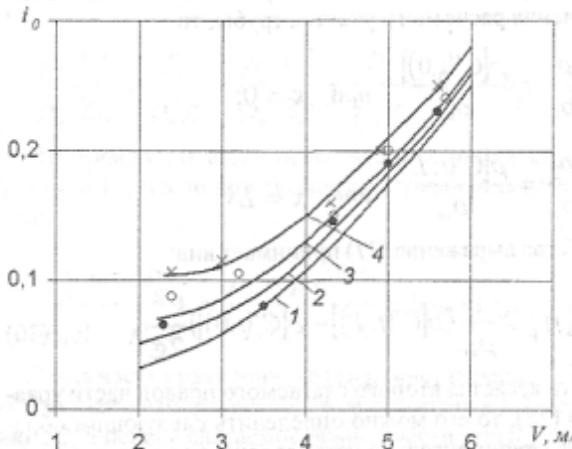


Рис. 1. Зависимость i_0 от V при гидротранспорте песка:

1 — $C_0 = 0$; 2 — $C_0 = 0,03$; 3 — $C_0 = 0,06$;
4 — $C_0 = 0,121$; точки — экспериментальные
сплошные линии 1 — экспериментальные
данные [7];
сплошные линии 2—4 — расчет по формуле
(41).

Величины ΔH_V , h'_{TP} , h_u и H' определялись по соответствующим формулам (30), (33), (39) и (41) при $L = 1$, что упрощало вычисление этих величин. Расчетные кривые зависимости рассматриваемых величин от времени t показаны на рис. 2. Как видно на рис. 2б, максимальное абсолютное значение величины равняется 0,028 м. Для найденного значения H' определялись по формуле (40) значения i , а затем и i/i_0 для различных длин L . Установлено, в частности, что для $L = 10$, 100 и 1000 м отношение i/i_0 равняется 1,025; 1,0025 и 1,00025 соответственно. Таким образом, если при $L = 10$ м $\approx \lambda$ максимальное относительное отклонение величины i от i_0 равняется 2,5%, то при $L = 100$ м оно составляет 0,25%, а при $L = 1000$ м — 0,025%. Так что при $L \gg \lambda$ отклонение i от i_0 становится ничтожно малым, и в пределе, когда $L \rightarrow \infty$, оно стремится к нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда по горизонтальной трубе диаметром $D = 106$ мм гидротранспортируется с невозмущенной концентрацией C_0 гравий крупностью

$d_s = 14$ мм и относительной плотностью $\frac{\rho_s}{\rho_w} = 2,65$. Результаты экспериментальных исследований зависимости i_0 от V при различных значениях приведены на рис. 3, заимствованном из [8], и описываются аппроксимирующей функцией (31) при $\alpha = 0,74 = \text{const}$, так что

$$i_0 = i_w + 0,74C_0 \quad (42)$$

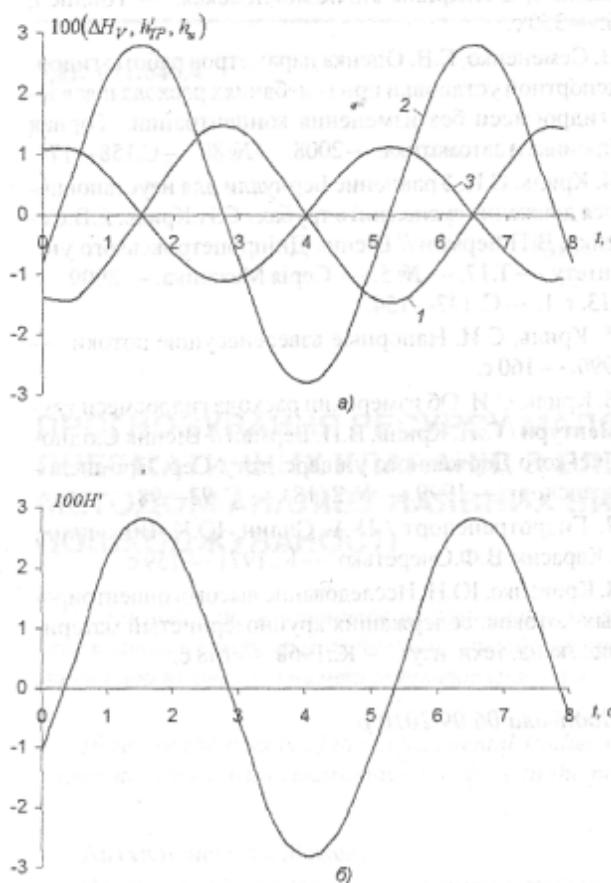


Рис. 2. а) залежність $\Delta H_V, h'_TP, h_u$ від t :
1 — ΔH_V ; 2 — h'_TP ; 3 — h_u ;
б) залежність H' від t .

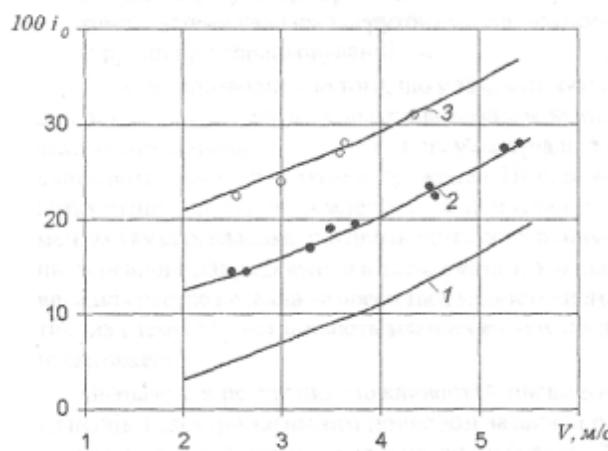


Рис. 3. Залежність i_0 від V
при гідротранспорте гравію:
1 — $C_0 = 0$; 2 — $C_0 = 0,121$; 3 — $C_0 = 0,242$;
точки 1 — експериментальні
дані [8]; сплошні лінії 2 і 3 — розрахунок
за формулою (42).

Выберем стационарный режим гидротранспортирования, которому соответствуют: $C_0 = 0,121$, $V_{kp} = 2 \text{ м}/\text{с}$, $V = 3 \text{ м}/\text{с}$, $i_w = 0,07$; $i_0 = 0,16$; при этом $B = 0,7249$. Амплитуду и круговую частоту возмущения концентрации примем такими же, как и в предыдущем примере. Тогда $k = 0,5775 \text{ м}^{-1}$, $\lambda = 10,87 \text{ м}$.

Расчетные кривые зависимости величин ΔH_V , h'_TP , h_u и H' от t , полученные для рассматриваемых условий гидротранспортирования, изображены на рис. 4.

Согласно рис. 4б, максимальное абсолютное значение $H' = 0,042 \text{ м}$. В данном случае величина i/i_0 равняется 1,026, 1,0026 и 1,00026 для $L = 10, 100$ и 1000 м соответственно. Сопоставляя полученные результаты расчетов i/i_0 с результатами предыдущего примера, убеждаемся, что они практически одинаковы.

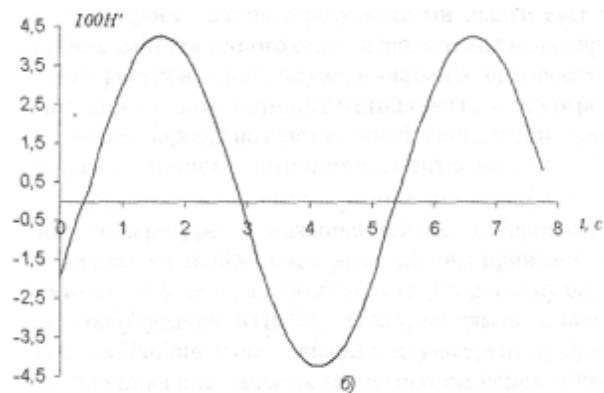
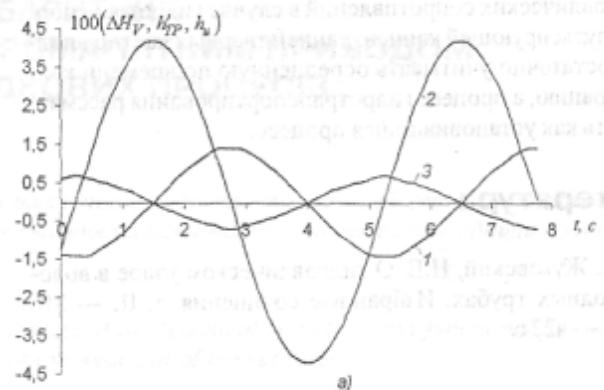


Рис. 4. а) залежність $\Delta H_V, h'_TP, h_u$ від t :
1 — ΔH_V ; 2 — h'_TP ; 3 — h_u ;
б) залежність H' від t .

Выводы

В данной работе исследована удельная потеря напора при трубопроводном гидротранспорте твердых дисперсных материалов в случае, когда на входе в трубу объемная концентрация твердых частиц подвергается конечному гармоническому возмущению при постоянном расходе гидросмеси. В данном случае процесс гидротранспортирования является нестационарным в том смысле, что средняя по сечению трубы концентрация, а следова-

тельно, и средние скорости движения жидкой и твердой фаз гидросмеси переменны по времени и длине потока.

Основная цель работы — установить степень влияния возмущения концентрации в потоке гидросмеси на удельную потерю напора.

Для решения нестационарной задачи о возмущении концентрации в трубе используется осредненное дифференциальное уравнение неразрывности твердой фазы, а для исследования удельной потери напора — уравнение Бернулли для неустановившегося движения гидросмесей в трубах, учитывающее инерционный напор.

В результате установлено, что распространение возмущения концентрации вдоль трубы происходит при помощи простой бегущей волны, а влияние этого возмущения на удельную потерю напора ничтожно мало для труб длиной $L \gg \lambda$. Следовательно, в инженерных расчетах гидравлических сопротивлений в случае гидротранспорта с пульсирующей концентрацией твердых частиц вполне достаточно учитывать осредненную по времени концентрацию, а процесс гидротранспортирования рассматривать как установившийся процесс.

Литература

1. Жуковский, Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Избранные сочинения, т. II. — М., 1948. — 422 с.

2. Махарадзе, Л.И. Трубопроводный гидротранспорт твердых сыпучих материалов / Л.И. Махарадзе, Т.Ш. Гочиташвили, С.И.Криль, Л.А.Смойловская. — Тбилиси, 2006. — 350 с.
 3. Семененко, Е.В. Оценка параметров работы гидротранспортной установки при колебаниях расхода и давления гидросмеси без изменения концентрации// Горная электроника и автоматика. — 2008. — № 80. — С.158—174.
 4. Криль, С.И. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения суспензий в трубах / С.И.Криль, Е.В.Семененко, В.П.Берман // Вісник Дніпропетровського університету. — Т.17. — № 5. — Серія Механіка. — 2009. — Вип.13, т. 1. — С. 147—154.
 5. Криль, С.И. Напорные взвесенесущие потоки. — К., 1990. — 160 с.
 6. Криль, С.И. Об измерении расхода гидросмеси трубой Вентури / С.И. Криль, В.П. Берман // Вісник Східноукраїнського Державного університету. Сер. Промисловий транспорт. — 1999. — № 2 (18). — С. 93—98.
 7. Гидротранспорт / Н.А. Силин, Ю.К. Витошкин, В.М. Карасик, В.Ф.Очеретько. — К.,1971 — 159 с.
 8. Кривенко, Ю.Н. Исследование высококонцентрированных потоков, содержащих крупнозернистый материал: дис... канд. техн. наук. — К.,1968. — 108 с.

Надійшла 06.09.2010 р.