УДК 532.54.013.2

Р.М. Гнатів, канд. техн. наук,
М.Й. Микитин, канд. фіз.-мат. наук
Стрийський коледж Львівського національного аграрного університету

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ НЕУСТАЛЕНИХ РУХІВ ОПЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ НА ОСНОВІ ДИСИПАТИВНОЇ МОДЕЛІ

Проведен анализ научных работ по решению задач о нестационарном движении жидкости в трубах. Предложен операционный метод решения этих задач на основании диссипативной модели.

The analysis of the advanced studies is conducted in decision of tasks about unstationary motion|movement| of liquid in pipes. The operating|operation| method of decision of these tasks is offered on the basis of dissepative| model.

Постановка проблеми

Перші роботи з вирішення задач неусталеного руху рідини у циліндричній трубі було отримано з використанням моделі нестискуваної рідини.

Розв'язок задач неусталених рухів рідини в трубах і визначення розподілу швидкостей рідини в перерізах труби на базі дисипативної моделі має значні математичні складності. Класичний метод розділення змінних у даному випадку є неприйнятним.

Аналіз відомих методів досліджень

У загальній постановці для будь-якого закону зміни тиску за часом задачу було досліджено у роботі [1] ще у 1882 році. Пізніше різні випадки цієї задачі було розглянуто у працях [2—6].

Питання про втрати напору на тертя рідини в трубопроводах розглянуто в роботах [7—9].

Виведено рівняння для визначення дотичного опору на стінці труби в залежності від зміни середньої швидкості руху рідини в трубі. Методом передаточних функцій досліджено вплив нестаціонарності потоку на гідравлічний опір труби. Для дослідження неусталеної течії використовували метод малого параметру, причому в якості нульового наближення приймали усталений рух [10—13].

Виходячи із рівнянь нерозривності, кількості руху і енергії, записаних в інтегральній формі, і припущення про подібність розподілу швидкостей у пограничному шарі, було досліджено розгінний рух рідини на вході в трубу [15].

На основі розв'язків рівняння Нав'є–Стокса, що є подібними відносно повздовжньої координати, було досліджено неусталені рухи нестискуваної в'язкої рідини в напівнескінченній трубі, радіус якої змінюється з часом [16].

Питанням розв'язку задач про нестаціонарні рухи рідин і газів приділена значна увага в працях [17, 18].

Мета роботи — удосконалити методику розрахунку структур неусталених потоків рідин у круглих трубопроводах.

Запропонована методика

Розвинутий ізотермічний неусталений рух в'язкої стискуваної рідини описується наступними рівняннями:

- рівняння Нав'є–Стокса

$$\rho\frac{d\overline{v}}{dt} = -grad\ p + \mu\Delta\overline{v} + \frac{\mu}{3}\ grad\ div\ \overline{v}; \tag{1}$$

- рівняння нерозривності

$$\frac{\partial\rho}{dt} + div\ \rho\overline{v} = 0; \tag{2}$$

- рівняння стану

$$p = p\,(\rho). \tag{3}$$

Інтегрування нелінійних рівнянь (1)–(3) пов'язано з математичними складностями, тому для аналізу проблем неусталених рухів рідини майже виняткова використовуються лінеаризовані варіанти рівнянь (1)–(3), які мають вигляд:

$$\rho\frac{\partial\overline{v}}{\partial t} = -grad\ p + \mu\Delta\overline{v} + \frac{\mu}{3}\ grad\ div\ \overline{v}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\rho}{dt} + c^2\rho div\overline{v} = 0. \tag{5}$$

У циліндричній системі координат для осесиметричної течії замість (4), (5) маємо

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2}\right) + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial r}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2\rho\theta = 0, \tag{8}$$

де
$$\theta = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}, \tag{9}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{10}$$

v_z, v_r — складові швидкості у напрямку осей z, r; p — тиск; ρ — густина рідини; μ — коефіцієнт в'язкості; c — швидкість звуку в рідині; t — час.

Одним із основних методів розв'язку змішаних задач для диференціальних рівнянь дисипативної моделі:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} - \chi\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta}u_\eta + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \qquad (13)$$

є операційний метод. У рівняннях (11)–(13) u_ξ — безрозмірна швидкість у повздовжньому напрямку труби; u_η — безрозмірна швидкість у радіальному напрямку труби; ξ — безрозмірна повздовжня координата; η — безрозмірна координата у радіальному напрямку; τ — безрозмірний час; q — безрозмірний тиск; $\chi = \frac{\mu L}{Rc\xi}$ — безрозмірний параметр; L — довжина трубопроводу; R — радіус труби; μ — коефіцієнт динамічної в'язкості; c — швидкість звуку в рідині; ρ — густина.

При використанні операційного методу легко знайти трансформанту розв'язку задачі, але складності виникають при відшуканні оригіналу.

Розглянемо систему рівнянь (11)–(13) за граничних умов:

$u_\xi = 0,\ u_\eta = 0$ при $\eta = 1$, (14)

$q - S^*_z = 0$ при $\xi = 0$, (15)

$q - S^{**}_z = 0$ при $\xi = 1$ (16)

та початкових умов:

$u_\xi = 0,\ q = q_0$ при $\tau = 0$; (17)

де $S^*_z = q^*(\tau), S^{**}_z = q^{**}(\tau)$

Середня швидкість у перерізі

$$U = \frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R v_z r dr, \qquad (18)$$

виражається за допомогою безрозмірних величин у вигляді

$U = U_н W$, (19)

де $U_н$ — нормуюча швидкість; W — безрозмірна середня швидкість.

$$W = 2\int_0^1 u_\xi\, \eta d\eta. \qquad (20)$$

Якщо рівняння (13) помножити на η і проінтегрувати по координаті η, то отримаємо рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0\,. \qquad (21)$$

Якщо прийняти позначення

$$\overline{f}(\xi, \eta, S) = \int_0^\infty f(\xi, \eta, \tau)e^{-s\tau}d\tau, \qquad (22)$$

то трансформанти Лапласа (11), (12), (21) за початкових умов (17) мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \overline{u_\xi}}{\partial \eta} - \frac{S}{\chi}\left(\overline{u} + \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}\right) = 0, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial \eta} = 0\,, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \xi} - s\overline{q} - q_0 = 0. \qquad (25)$$

Введемо функцію

$$\overline{\phi} = \overline{u}_\xi + \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}. \qquad (26)$$

Із рівняння (23), враховуючи (24), маємо

$$\frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \eta} - \frac{S}{\chi}\overline{\phi} = 0. \qquad (27)$$

Загальний розв'язок цього рівняння, яке є обмеженим при $\eta = 0$, має вигляд

$$\overline{\phi} = c(\xi, S)I_0\left(\eta\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right), \qquad (28)$$

де I_0 — функція Бесселя нульового порядку від уявного аргументу, $c_i(\xi, S)$ — довільна функція.

Із співвідношення (26) і (28) отримаємо

$$\overline{u}_\xi = c(\xi, S)I_0\left(\eta\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right) - \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}. \qquad (29)$$

Використовуючи граничну умову (14), можна віднайти, що

$$c(\xi, S) = \frac{\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}}{SI_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}. \qquad (30)$$

Відповідно

$$\overline{u}_\xi = \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}\frac{I_0\left(\eta\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}{SI_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}. \qquad (31)$$

За формулами (20), (27) знаходимо

$$\overline{W} = -\frac{I_2\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}{SI_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi}. \qquad (32)$$

Рівняння (25), (32) утворюють систему для визначення функцій $\overline{W}$ і $\overline{q}$. Виключаючи із цієї системи функцію $\overline{W}$, отримаємо для трансформанти $\overline{q}$

$$\frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial \xi^2} + \gamma^2(S)\overline{q} - \frac{1}{s}q_0 = 0, \qquad (33)$$

де

$$\gamma^2(S) = \frac{S^2 I_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}{I_2\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}. \qquad (34)$$

Розв'язок рівняння (33) за граничних умов

$\overline{q} = \overline{q}^*$ при $\xi = 0$; (35)

$\overline{q} = \overline{q}^{**}$ при $\xi = 0$, (36)

має вигляд:

$$\overline{q} = \frac{1}{sh\gamma(S)}\left[\left(\overline{q}^* - \frac{1}{s}q_0\right)sh\gamma(S)(1-\xi) + \left(\overline{q}^{**} - \frac{1}{s}q_0\right)sh\gamma(S)\xi\right] + \frac{1}{s}q_0\,. \qquad (37)$$

Із співвідношень (32), (34) отримуємо

$$\overline{W} = \frac{S}{\gamma(S)sh\gamma(S)}\left[\left(\overline{q} * \frac{1}{s}q_0\right)ch\gamma(S)(1-\xi) - \left(\overline{q}^{**} - \frac{1}{s}q_0\right)ch\gamma(S)\xi\right], \qquad (38)$$

а із співвідношень (31), (37) отримуємо

$$\overline{u}_{\xi}=\frac{I_0\left(\eta\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)-I_0\left(\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)}{SI_0\left(\eta\sqrt{\frac{S}{\chi}}\right)sh\gamma(S)}\left[\left(\overline{q}^{*}-\frac{1}{s}q_0\right)ch\gamma(S)(1-\right.$$

$$\left.-\xi)-\left(\overline{q}^{**}-\frac{1}{s}q_0\right)ch\gamma(S)\xi\right]. \quad (39)$$

На рис. 1 показано графік зміни середньої швидкості визначений числовим розрахунком за залежністю (39).

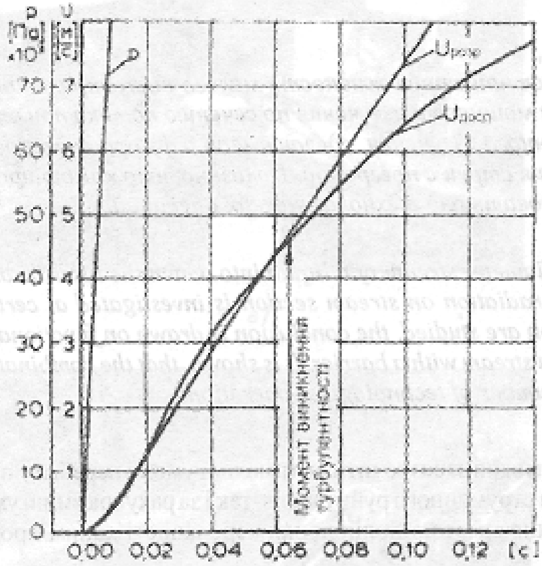

Рис. 1. Порівняння результатів числового розрахунку швидкості U нестискуваної моделі з експериментальними даними.

Висновки

Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків рідини в круглих трубопроводах операційним методом.

Література

1. Громека, И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах: Уч. зап. Казанского ун-та, 1882. — М.: Изд. АН СССР, 1952. — С. 149—171.

2. Szymanski, P. Quelques solution exactes des equations de l'hydrodynamique de fluide visqueux dans un tube cylindrique // J. de Mathem. — 1932. — 11. — P. 67—107.

3. Лямбоси, П. Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жесткой горизонтальной трубе // Сб. «Механика». — 1953. — Вып. 3. — С. 67—77.

4. Слезкин, Н.А. Свойства потоков жидкости, пульсирующей по трубам // Хим. и нефт. машиностр. — 1969. — № 9. — С. 14—17.

5. Дейвис, Вебер. Исследование влияния зависящей от давления вязкости на характеристики течения жидкости в круглой трубе // Ракетн. техн. и космонавт. — 1973. — №7 (11). — С. 13—19.

6. Панчурин, Н.А., Ройзман, Д.Х. Нестационарное периодическое течение жидкости в круглых трубах // Труды Ленингр. ин-та водн. трансп. — 1975. — Вип. 151. — С. 8—16.

7. Панчурин, Н.А. Потери на трение при нестационарном ламинарном течении в трубах // Труды Ленингр. ин-та водн. трансп. — 1964. — Вып. 77. — С. 38—43.

8. Мелконян, Г.И. О потерях напора на трение в нестационарном движении жидкости в трубопроводе // Труды Ленингр. ин-та водн. трансп. — 1969. — Вып. 122. — С. 68—73.

9. Барсегян, М. Г. Гидравлические потери при ламинарном режиме неустановившегося ускоренного движения жидкости // Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. н. — 22, №2. — С. 34—38

10. Попов, Д.Н. Обобщенное уравнение для определения касательного напряжения на стенке трубы при неустановившемся движении вязкой жидкости // Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение. — 1967. — №5. — С. 52—57

11. Попов, Д.Н. О влиянии нестационарности профиля местных скоростей на динамические характеристики длинного трубопровода // Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение. — 1968. — №1. — С. 84—88.

12. Попов, Д.Н. О потерях в трубопроводе при неустановившемся движении жидкости // Вестн. машиностр. — 1969. — № 6. — С. 19—20.

13. Попов, Д.Н., Кравченко, В.Г. Исследование неустановившегося движения жидкости при переходных процессах в короткой трубе // Вестн. машиностр. — 1974. — № 6. — С. 7—10.

14. Белоцерковский, П.М. Ламинарное почти установившееся течение несжимаемой жидкости в длинном цилиндрическом канале // Научн. тр. ин-та автоматики. — 1975. — Вып. 7. — С. 69—74.

15. Nobless, F., Farrel, C. Unsteady nonuniform flow in the entrance of a pipe // Trans. ASME. — 1975. — E40. — No. 3. — P. 672—678.

16. Uchida, S., Aoki, H. Unsteady flows in a semiinfinite contrasting on expending pipe // J. Fluid Mech. — 1977. — 82, part 2. — P. 371—387.

17. Белоцерковский, О.М. Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу / О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин. — 2-е изд., доп. — М.: Наука, 2001. — 223 с.

18. Бондаренко, Ю.А. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы / Ю.А. Бондаренко, В.В. Башуров, Ю.В. Янилкин. — М. 2003.

Надійшла 20.05.2011 р.