УДК 532.54.013.2

Р.М. Гнатів, канд. техн. наук,
М.Й. Микитин, канд. фіз.-мат. наук
Національний університет “Львівська політехніка”

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ВИВЕДЕННЯ ДИСИПАТИВНОЇ МОДЕЛІ НЕУСТАЛЕНОГО ПОТОКУ РІДИНИ

Проведен анализ научных работ по решению задач о нестационарном движении жидкости в цилиндрических трубах. Предложен асимптотический метод исследования диссипативной модели неустановившегося движения потока жидкости.

The analysis of the advanced studies is conducted in decision of tasks about unstationary motion of liquid in cylindrical pipes. The asymptotic method of research of dissepative model of the unset motion of stream of liquid is offered.

Постановка проблеми

При розв’язку задач неусталених рухів рідини в трубах виникає необхідність визначення швидкостей рідини в перерізах труби як в осьовому так і радіальному напрямках. Класичні методи вирішення цієї задачі не дають задовільних результатів.

Аналіз відомих методів досліджень

Працями [1–3], отримала розвиток модель, що дозволяє розглядати двохмірний неусталений рух у трубі і визначати складові швидкості, як у поздовжньому (осьовому), так і в радіальному напрямках. Пізніше модель отримала назву “дисипативної”. Згідно неї механічна енергія рідини знижується по течії за рахунок роботи сил тертя.

У цих роботах дисипативна модель виводиться методом порівняння порядку окремих складових в рівняннях Нав’є – Стокса, нерозривності потоку і рівняння стану.

Мета роботи – удосконалити методику розрахунку структур неусталених потоків рідин у круглих трубопроводах.

Методика дослідження

Пропонується метод виведення дисипативної моделі, який полягає в асимптотичному дослідженні часткових розв’язків рівнянь Нав’є – Стокса, нерозривності потоку і рівняння стану.

У циліндричній системі координат для осесиметричної течії введемо безрозмірні координати:

$$\xi' = \frac{z}{R},\ \eta = \frac{r}{R},\ \tau' = \frac{c}{R}t$$

і безрозмірні змінні

$$u'_\xi = \frac{V_Z}{U_H}, U_\eta = \frac{V_r}{U_H}, \nu = \frac{R\theta}{U}, q = \frac{1}{c\rho U_H}p, \qquad (1)$$

де R — радіус труби, U_H — нормуюча швидкість, η — безрозмірна координата в радіальному напрямку; τ — безрозмірний час, ξ — безрозмірна повздовжня координата; q – безрозмірний тиск.

В нових змінних вони матимуть вигляд:

$$\beta\frac{\partial u_{\xi'}}{\partial_{\tau'}} = -\beta\frac{\partial q}{\partial \xi'} + \tilde{\nabla}^2 u'_\xi + \frac{1}{3}\frac{\partial \nu}{\partial \xi'}, \qquad (2)$$

$$\beta\frac{\partial u_\eta}{\partial_{\tau'}} = -\beta\frac{\partial q}{\partial \eta} + \tilde{\nabla}^2 u'_\eta - \frac{u_\eta}{\eta^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial \nu}{\partial_\eta}, \qquad (3)$$

$$\nu + \frac{\partial q}{\partial \tau'} = 0, \qquad (4)$$

і $$\nu = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\eta}{\eta} + \frac{\partial u_{\xi'}}{\partial_{\xi'}}, \qquad (5)$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi'^2}, \qquad (6)$$

$$\beta = \frac{CR}{\nu},\ \nu = \frac{\mu}{\rho}. \qquad (7)$$

Розглянемо часткові розв’язки системи рівнянь (2–4) :

$$u_\xi = U_{\xi'}(\eta)\, e^{i(\omega\tau' - k\xi')},\ u_\eta = U_\eta(\eta)\, e^{i(\omega\tau' - k\xi')}, \qquad (8)$$

$$\nu = \theta(\eta)\, e^{i(\omega\tau' - k\xi')},\ q = Q(\eta)\, e^{i(\omega\tau' - k\xi')}.$$

Підставляючи вираз (7) у рівняння (2–4) , отримаємо для визначення функцій U_ξ , U_η , θ , Q систему рівнянь:

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - i\omega\beta)U_\xi + ik\beta Q - \frac{1}{3}ik\theta = 0, \qquad (9)$$

$$\tilde{\tilde{\nabla}}^2 U_\eta - (\frac{1}{\eta^2} + i\omega\beta)U_\eta - \beta\frac{dQ}{d\eta} + \frac{1}{3}\frac{d\theta}{d\eta} = 0, \qquad (10)$$

$$\theta + i\omega Q = 0, \qquad (11)$$

$$\theta = \frac{dU_\eta}{d\eta} + \frac{1}{\eta}U_\eta - ikU_{\xi'}, \qquad (12)$$

Введено позначення:

$$\tilde{\tilde{\nabla}}^2 = \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - k^2 . \tag{13}$$

Якщо із системи (9–12) виключити функції Q і θ отримаємо:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} + D^2\right)U_{\xi'} + E^2\left(\frac{d}{d\eta} + \frac{1}{\eta}\right)U_\eta = 0 , \tag{14}$$

$$F^2\frac{dU_{\xi'}}{d\eta} + \left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \frac{1}{\eta^2} + G^2\right)U_\eta = 0 , \tag{15}$$

де

$$D^2 = -k^2\left(\frac{4}{3} - i\frac{\beta}{\omega}\right) - i\omega\beta , \tag{16}$$

$$E^2 = -ik\left(\frac{1}{3} - i\frac{\beta}{\omega}\right) , \tag{17}$$

$$F^2 = \frac{ik\left(\frac{1}{3} - i\frac{\beta}{\omega}\right)}{\frac{4}{3} - i\frac{\beta}{\omega}} , \tag{18}$$

$$G^2 = -\frac{k^2 + i\omega\beta}{\frac{4}{3} - i\frac{\beta}{\omega}} . \tag{19}$$

З рівнянь (14), (15) будемо мати:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} + C_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} + C_2^2\right)U_{\xi'} = 0 , \tag{20}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \frac{1}{\eta^2} + C_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \frac{1}{\eta^2} + C_2^2\right)U_\eta = 0 \tag{21}$$

де

$$C_1^2 + C_2^2 = D^2 + G^2 - E^2 F^2 , \tag{22}$$

$$C_1^2 C_2^2 = D^2 G^2 , \tag{23}$$

Розв’язуючи рівняння (20), (23) при $\eta = 0$, отримаємо:

$$U_{\xi'} = A_1 J_0(C_1\eta) + A_2 J_0(C_2\eta) , \tag{24}$$

$$U_\eta = B_1 J_1(C_1\eta) + B_2 J_1(C_2\eta) . \tag{25}$$

Підставляючи розв’язки (24), (25) в систему рівнянь (20), (21) отримаємо:

$$B_1 = m_1 A_1 , B_2 = m_2 A_2 ; \tag{26}$$

де

$$m_1 = \frac{C_1 F^2}{G^2 - C_1^2} , m_2 = \frac{C_2 F^2}{G^2 - C_2^2} . \tag{27}$$

Із граничних умов при $\eta = 1$

$$U_{\xi'} = 0 , U_\eta = 0 \tag{28}$$

випливає,що

$$A_1 J_0(C_1) + A_2 J_0(C_2) = 0 , \tag{29}$$

$$m_2 A_1 J_1(C_1) + m_2 A_2 J_1(C_2) = 0 . \tag{30}$$

Для того, щоб система (29), (30) мала єдиний розв’язок , повинно задовольнятись характеристичне рівняння:

$$m_1 J_0(C_2) J_1(C_1) - m_2 J_0(C_1) J_1(C_2) = 0 . \tag{31}$$

Це характеристичне рівняння пов’язує між собою хвильове число k і частоту ω. Рівняння (31) має нескінченне число розв’язків $k(\omega)$, кожному з яких відповідає певна форма розповсюдження збурення – мода.

Характеристичне рівняння (31) і відповідні моди руху добре вивчено [4]. У низці праць досліджені і спрощені варіанти характеристичного рівняння (31), причому обмежуються тільки першою основною модою [1–5]. У роботі [6] дано огляд порівняння і наявних наближених методів для першої моди розподілу збурення. Також розглядаються і так звані низькочастотні розв’язки, що описуються за допомогою дисипативної моделі.

Розглянемо низькочастотні розв’язки рівняння Нав’є–Стокса для стискуваної рідини.

Введемо припущення

$$\left|\frac{\beta}{\omega}\right| \geq 1 \text{ або } |\beta| \geq |\omega| \tag{32}$$

і

$$|\omega\beta| \geq |k^2| . \tag{33}$$

Розглянемо тільки такі часткові розв’язки (8) рівнянь (2–4), при яких частоти ω і хвильове число k задовільняють умови (32), (33). Для таких низькочастотних часткових розв’язків співвідношення (16–19) матимуть вигляд:

$$D^2 = \frac{ik^2\beta}{\omega} - i\omega\beta , \tag{34}$$

$$E^2 = k\frac{\beta}{\omega} , \tag{35}$$

$$F^2 = -ik , \tag{36}$$

$$G^2 = \omega^2 . \tag{37}$$

Відповідно із рівнянь (22), (23) отримаємо, що

$$C_1^2 = -i\omega\beta , \tag{38}$$

$$C_2^2 = \omega^2 - k^2 . \tag{39}$$

Враховуючи оцінки (32), (33) можемо зробити висновок, що

$$C_2^2 \leq C_1^2 . \tag{40}$$

Використовуючи асимптотичні розклади для функції Бесселя при малих аргументах і обмежуючись першими членами в цих розкладах, отримаємо:

$$J_0\left(C_2\eta\right)=1\,, \tag{41}$$

$$J_1\left(C_2\eta\right)=\frac{C_2\eta}{2}\,. \tag{42}$$

Відповідно розв'язки (24–25) приймають вигляд

$$U_{\xi'}=A_1J_0\left(C_1\eta\right)+A_2\,, \tag{43}$$

$$U_\eta=B_1J_1\left(C_1\eta\right)+\frac{1}{2}B_2C_2\eta\,, \tag{44}$$

За формулами (27), (34–37) і рівнянням (29) матимемо:

$$m_1=\frac{ik}{C_1}\,,m_2=-\frac{i\sqrt{\omega^2-k^2}}{k}\,, \tag{45}$$

$$A_2=-A_1J_0\left(C_1\right) \tag{46}$$

Враховуючи співвідношення (2), (45), (46), розв'язки (43), (44) набувають вигляду:

$$U_{\xi'}=A_1\left[J_0\left(C_1\eta\right)-J_0\left(C_1\right)\eta\right], \tag{47}$$

$$U_\eta=i\,A_1\left[\frac{k}{C_1}J_1\left(C_1\eta\right)+\frac{\omega^2-k^2}{2k}J_0\left(C_1\right)\eta\right]. \tag{48}$$

Відповідне характеристичне рівняння, що отримується з рівняння (31) за допомогою співвідношень (41), (42), (45), (46), матиме вигляд:

$$\frac{2k^2}{C_1}J_1\left(C_1\right)+(\omega^2-k^2)\,J_0\left(C_1\right)=0\,, \tag{49}$$

або

$$k^2=-\frac{\omega^2J_0\left(C_1\right)}{J_2\left(C_1\right)}\,. \tag{50}$$

За допомогою рівності (49) швидкість U_η запишеться:

$$U_\eta=\frac{ik}{C_1}A_1\left[J_1\left(C_1\eta\right)-J_1\left(C_1\right)\eta\right] \tag{51}$$

Знайдемо величини $\theta(\eta)$ і $Q(\eta)$. За допомогою співвідношень (2), (4), (47), (51) отримаємо:

$$\theta=-\frac{2kiA_1}{C_1}J_1\left(C_1\right), \tag{52}$$

$$Q=\frac{2kA_1}{\omega C_1}J_1\left(C_1\right). \tag{53}$$

З останнього співвідношення видно, що тиск q не залежить від координати η .

Аналогічна методика дослідження руху рідини використана в роботі [7]. Але в ній при асимптотичному аналізі не включено суттєвих членів, що призводить при формулюванні кінцевих результатів до введення штучних прийомів, не пов'язаних з розглянутою асимптотикою.

Якщо враховувати оцінки (32), (33) і порядки величин $U_{\xi'}$, U_η, θ, Q, отриманих із співвідношень (47), (51), (53), то рівняння ($9\div12$) можуть бути спрощені наступним чином:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}-i\omega\beta\right)U_{\xi'}+ik\beta Q=0\,, \tag{54}$$

$$\frac{dQ}{d\eta}=0\,, \tag{55}$$

$$\left(\frac{d}{d\eta}+\frac{1}{\eta}\right)U_\eta-ikU_{\xi'}-i\omega Q=0\,. \tag{56}$$

Відповідні вихідні рівняння співпадають з рівняннями дисипативної моделі і мають вигляд:

$$\frac{\partial^2u_{\xi'}}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_{\xi'}}{\partial\eta}-\beta\frac{\partial u_{\xi'}}{\partial\tau'}-\beta\frac{\partial q}{\partial\xi'}=0\,, \tag{57}$$

$$\frac{\partial q}{\partial\eta}=0\,, \tag{58}$$

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}+\frac{1}{\eta}u_\eta+\frac{\partial u_{\xi'}}{\partial\xi'}-\frac{\partial q}{\partial\tau'}=0\,. \tag{59}$$

Із наведених міркувань випливає, що рівняння (57–59) отримуються із рівнянь Нав'є–Стокса і неперервності (2–4) за допомогою двох припущень (32), (33) відносно частоти ω і хвильового числа k , які враховуючи співвідношення (8), можуть бути представлені у вигляді:

$$\frac{cR}{v}\ge|\omega|, \tag{60}$$

і

$$\frac{cR}{v}|\omega|\ge|k|^2, \tag{61}$$

або

$$\frac{cR}{v}\ge|\omega|\ge\frac{v|k|^2}{cR}\,. \tag{62}$$

У розмірних величинах

$$\omega_1=\frac{\omega c}{R}\,,k_1=\frac{k}{R}\,, \tag{63}$$

умови (62) мають вигляд:

$$\frac{c^2}{v}\ge|\omega_1|\ge v|k_1|^2\,. \tag{64}$$

Важливо відзначити, що при виведенні дисипативної моделі немає потреби вводити жодних припущень відносно порядку величини компонентів швидкості u_η або зміни тиску q, як це зроблено в [1–3], [7–10]

Введемо нові безрозмірні координати і коефіцієнти по формулах

$$\xi=\varepsilon\xi'\,;\ \tau=\varepsilon\tau'\,;\alpha=\frac{1}{\varepsilon\beta}\,;\varepsilon=\frac{R}{L}\,;\ u_{\xi'}=u_\xi\,, \tag{65}$$

де L — довжина труби.

Рівняння дисипативної моделі (57–59) можна тепер переписати для використання у більш зручному вигляді:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau}-\alpha\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial q}{\partial \xi}=0\,, \qquad (66)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \eta}=0\,, \qquad (67)$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta}u_\eta+\frac{\partial q}{\partial \tau}=0\,\cdot \qquad (68)$$

Систему (66–68) можна вивести більш формально варіаційним методом із функціоналу

$$I=\int_0^L\int_0^R\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\times v_z+\frac{\partial v_r}{\partial t}\times v_r-\frac{1}{c^2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial t}p\right)\theta-\\ \frac{1}{3}\mu\theta\times\theta+\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\times\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}v_r\times v_r+\frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\\ +\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\times\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{2}\rho\\ \left[v_z(z,r,0)v_z(z,r,t)+v_r(z,r,0)v_r(z,r,t)\right]-\\ \frac{1}{c^2\rho^2}p(z,r,0)p(z,r,t)-\rho\left[v_z^0(z,r)v_z(z,r,t)+v_r^0(z,r)v_r(z,r,t)\right]+\\ \frac{2}{c^2\rho^2}\rho^0(z,r)p(z,r,t)\end{array}\right\} rdrdz+\int_0^R\left[\begin{array}{l}\sigma_z^*(r,t)\times v_z(0,r,t)-\sigma_z^{**}(r,t)\times\\ v_z(L,r,t)+\tau_{rz}^*(r,t)\times v_r(0,r,t)-\\ \tau_{rz}^*(r,t)\times v_r(L,r,t)\end{array}\right] rdr\,. \qquad (69)$$

для цього в функціоналі (69) слід перейти до безрозмірних змінних по формулах (1). Вважаємо, що

$$z=L\xi\,,\; r=R\eta\,,\; t=\frac{L}{c}\tau \qquad (70)$$

і

$$v_z=U_H u_\xi\,,\; v_r=\varepsilon\, U_H u_\eta\,,\; p=c\rho\, U_H\, q\,. \qquad (71)$$

Відповідно рахуємо, що задані початкові швидкості, тиски, а також напруження мають вигляд

$$v_z^0=U_H u_\xi^0\,,\; v_z^0=\varepsilon\, U_H u_\eta^0\,,\;\; \rho^0=c\rho\, U_H\, q^0\,, \qquad (72)$$

$$\sigma_z^*=c\rho\, U_H s^*\,, \qquad \tau_{rz}^*=\varepsilon c\rho\, U_H t_{rz}^*\,,$$

$$\sigma_z^{**}=c\rho\, U_H s^{**}\,,\;\; \tau_{rz}^{**}=\varepsilon c\rho\, U_H t_{rz}^{**}\,. \qquad (73)$$

Для виведення спрощеної теорії розглядаємо ε як малий параметр і використовуємо варіаційний метод [11,12]. Якщо перейти в функціоналі (69) до нових безрозмірних змінних і констант за співвідношеннями (1), (70–73), то функціонал *I* може бути представлений у вигляді суми:

$$I=\sum_{k=0}^{4}\varepsilon^{k-1}I_k\,, \qquad (74)$$

де перший член в сумі має вигляд:

$$I_0=\frac{1}{2}\rho R^3U_H^2\left\{\int_0^1\int_0^1\left[\begin{array}{l}\frac{\partial u\xi}{\partial \tau}\times u_\xi-\frac{\partial q}{\partial \tau}\times q-2q\times\\ \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta}u_\eta+\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}\right)+\\ \alpha\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\times\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}+u_\xi(\xi,\eta,0)\\ u_\xi(\xi,\eta,\tau)-2q(\xi,\eta,0)q\\ (\xi,\eta,\tau)-2u_\xi^0u_\xi(\xi,\eta,\tau)+\\ 4q^0q(\xi,\eta,\tau)\end{array}\right]\eta d\eta d\xi+2\int_0^1\left[\begin{array}{l}s_z^*(\eta,\tau)\times\\ u_\xi(0,\eta,\tau)-\\ s_z^{**}(\eta,\tau)\times\\ u_\xi(1,\eta,\tau)\end{array}\right]\eta d\eta\right\}, \qquad (75)$$

Тут інтеграли-згортки взято по безрозмірному часу τ і мають вигляд:

$$g\times f=\int_0^\tau g(\xi,\eta,\tau_1)f(\xi,\eta,\tau-\tau_1)d\tau_1\,. \qquad (76)$$

Якщо використовувати метод малого параметра і в сумі (74) зберігати тільки перший член, то в першому наближенні функціонал (69) замінюється функціоналом (75).

Утворюючи першу варіацію функціоналу (75) при умовах (28), знайдемо:

$$\delta I_0=\rho R^3U_H^2\int_0^1\int_0^1\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial u_\xi}{\partial \tau}-\alpha\left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial q}{\partial \xi}\right]\\ \times\delta u_\xi+\frac{\partial q}{\partial \eta}\times\delta u_\eta-\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}+\frac{u_\eta}{\eta}+\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)\times\\ \delta q+\left[u_\xi(\xi,\eta,0)-u_\xi^0\right]\delta u_\xi(\xi,\eta,\tau)-\\ 2\left[q(\xi,\eta,0)-q^0\right]\delta q(\xi,\eta,\tau)\end{array}\right\}\times\eta d\eta d\xi-\int_0^1\left[\begin{array}{l}\left[q(0,\eta,\tau)-s_z^*(\eta,\tau)\right]\times\\ \delta u_\xi(0,\eta,\tau)-\\ q(1,\eta,\tau)-s_z^{**}(\eta,\tau)\times\\ \partial u_\xi(1,\eta,\tau)\end{array}\right]\eta d\eta\,. \qquad (77)$$

Із співвідношення (77) видно, що умовами стаціонарності функціоналу (75) за попередніх умов:

$$u_\xi = 0\,,\; u_\eta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \tag{78}$$

є диференціальні рівняння (66–68) з граничними умовами:

$$q - s_z^* = 0 \;\text{ при }\; \xi = 0\,; \tag{79}$$

$$q - s_z^{**} = 0 \;\text{ при }\; \xi = 1\,;$$

і початковими:

$$u_\xi^0 = u_\xi^0\,,\; q = q^0 \;\text{ при }\; \tau = 0\,. \tag{80}$$

Отже, отримано варіаційне формулювання дисипативної моделі. Виключаючи із функціоналу (75) варійовану функцію u_η, використовуючи граничні умови (78) і ту обставину, що функція q не залежить від координати η при застосування позначення

$$s_z^* = q^*(\tau)\,,\; s_z^{**} = q^{**}(\tau) \tag{81}$$

функціонал (75) набуде вигляду:

$$I_0 = \frac{1}{2}\rho R^3 U_H^2 \left\langle \begin{matrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_\xi}{\partial \tau}\times u_\xi - 2q\times\dfrac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \\ \alpha\dfrac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\times\dfrac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + u_\xi(\xi,\eta,0) \\ u_\xi(\xi,\eta,\tau) \\ \; \end{bmatrix} \\ \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \qquad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial \tau}\times q + \\ \begin{bmatrix} q(\xi,0) - \\ 2q_0 \end{bmatrix} \\ \times q(\xi,\tau) \end{Bmatrix} \\ \eta d\eta d\xi - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 d\xi - \\ 2\displaystyle\int_0^1 \begin{bmatrix} q^*(\tau)\times \\ u_\xi(0,\eta,\tau) \\ -q^{**}(\tau)\times \\ u_\xi(1,\eta,\tau) \end{bmatrix} \\ \eta d\eta \end{matrix} \right\rangle \tag{82}$$

Відповідно початкову крайову задачу (66–68), (78–80) можна сформулювати у вигляді варіаційного принципу:

$$\delta I_0 = 0\,, \tag{83}$$

де функціонал I_0 задається виразом (82).

Висновки

Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків рідини на основі дисипативної моделі. Вона дозволяє зробити висновок про асимптотичний характер прийнятої моделі.

Література

1. Iberall A.S. Attennation of oscillatory pressures in instrument lines. J. Res. Nat. Bar. Stand, 1950,45, p. 85—108.

2. Д'Суза, Олденбургер. Динамическая характеристика гидравлических трубопроводов. Теор. осн. инж. расч., Изд."Мир", 1964.—№3.—С. 196—205.

3. Холмбоу, Руло. Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линях. Теор. осн. инж. расч. — М.: Мир,1967. — С. 202—209.

4. Scarton R.A., Rouleau W.T. Axisymmetric waves in compressible Newtonian liquids contained in rigid tubes: Steady—periodic mode shapes and dispersion by the method of eigenvalleys. J. Fluid Mech., 1973, 58, part. 3, p. 595—621.

5. Rubinov S.I., Keller J.B. Wave propagation in a fluid filled tube. J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 50, No. 1, part 2, p. 198—223.

6. Tchen C.M. On the spectrum of energy in a turbulent shear flow. J. Res. Nat. Stand., 1953, v. 50, p. 51.

7. Tijdeman H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. J. Sound Vibr., 1975, 39, No. 1, p. 1—54.

8. Джаясингхе, Лойтхойзер. Гидравлический удар при условии ламинарного течения // Теор. осн. инж. расч. — М.: Мир — С. 229—236.

9. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975.— С. 296.

10. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. — М.: Машиностр., 1977. — С. 185—249.

11. Бондаренко Ю.А. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы / Ю.А. Бондаренко, В.В. Башуров, Ю.В. Янилкин. — М. 2003. — (Препринт/ РФЯЦ ВНИИЭФ; №88—2003).

12. Белоцерковский О.М. Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу/ О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин. — 2 изд., доп. — М.: Наука, 2001. — 223 С.

Надійшла 02.11.2011 р.