

И. В. Николенко, д-р техн. наук,
А. Н. Рыжаков, канд. физ-мат. наук

Национальная академия природоохранного и курортного строительства, г. Симферополь

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРИВОДАХ НА ОСНОВЕ АКСИАЛЬНО-ПОРШНЕВЫХ ДИСКРЕТНО РЕГУЛИРУЕМЫХ ГИДРОМАШИН

Розроблено математичну модель перехідного процесу в гідроприводі на основі аксіально-поршневих дискретно регульованих гідромашин з похилим блоком циліндрів, що враховує стисливість робочої рідини і хвильові процеси в блоці циліндрів вузла, що качає, і сполучних трубопроводах.

A mathematical model of the transition process in the hydraulic drive on the basis of axial-piston hydraulic machines controlled discretely with an inclined cylinder block, taking into account the compressibility of the fluid and wave processes in the engine block pumping unit and the connecting pipes.

Введение

В большинстве работ, посвященных исследованию динамики гидравлических приводов с регулируемыми силовыми агрегатами, принимается допущение об отсутствии в их элементах волновых процессов и игнорируется наличие в рабочей жидкости нерастворенной газовой фазы. Между тем, поскольку в объемных гидравлических приводах имеют место геометрические и силовые связи через жидкостное звено, адекватное описание работы этих устройств требует учета сжимаемости жидкости, переменности модуля ее упругости и волновых процессов. Основной причиной возникновения волновых процессов в объемных гидравлических приводах на основе аксиально-поршневых гидромашин (АПП) является резкое изменение давления в рабочих камерах блока цилиндров, при переходе из полости всасывания в полость нагнетания и выходе из нее в полость всасывания. Экспериментальные исследования [2] показывают, что в объемных гидравлических приводах активную роль в формировании импульсов давления также играет трубопровод.

Целью предлагаемой работы является разработка математической модели объемного гидропривода на основе АПП с наклонным блоком цилиндров, с учетом возможности возникновения волновых процессов и сжимаемости рабочей жидкости.

Модель рабочей жидкости

Работа современного объемного гидравлического привода основана на перемещении рабочей жидкости с выраженными вязкими и деформационными свойствами под действием высокого переменного давления. Поэтому предлагаемая математическая модель основывается на уравнениях, описывающих течение вязкой сжимаемой жидкости в деформируемых трубопроводах круглого поперечного сечения [1].

$$\begin{cases} -S_L \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial(\rho S_L w)}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta} \cdot \rho S_L w^2 + \frac{\partial}{\partial z} [\alpha \rho S_L w^2] \\ \frac{\partial(\rho \cdot S_L)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot S_L)}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

В (1) $w = \frac{Q}{S_L}$ — средняя скорость рабочей жидкости

в сечении трубы, Q — расход через сечение площадью S_L в данный момент времени; p, ρ — среднее давление и плотность рабочей жидкости в сечении z ; $\delta = \frac{S_L}{\chi}$

— гидравлический радиус сечения со смоченным периметром χ ; λ — коэффициент потерь напора на трение в трубе; α — коэффициент Кориолиса ($1 < \alpha < 2$).

В случае *однофазной сжимаемой жидкости*, зависимость плотности рабочей жидкости и площади поперечного сечения трубы от давления [1] определяется выражениями:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{E_g} \right), \quad E_g = const \quad (2)$$

$$S_L = S_{L0} \left(1 + a \frac{p - p_0}{E_t} \right), \quad E_t = const$$

В (2) ρ_0, S_{L0} — плотность жидкости и площадь сечения трубы при атмосферном давлении p_0 ; E_g — модуль объемного сжатия жидкости; E_t — модуль Юнга

материала трубы; a — безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения и площади стенок трубы. Полагаем, что выполняются условия:

$$\frac{a\Delta p^2}{E_g E_t} \ll \frac{\Delta p}{E_g} \Rightarrow \rho S_L = \rho_0 S_{L0} \left(1 + \Delta p \left(\frac{1}{E_g} + \frac{a}{E_t} \right) \right);$$

$$\rho = \rho_0, S = S_0$$

Найдем производные, приведенные в уравнении (1).

$$\frac{\partial(\rho S_L w)}{\partial t} = \rho_0 S_{L0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{E} \frac{\partial p}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot S_L)}{\partial z} = \rho_0 S_{L0} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{E} \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot S_L)}{\partial t} = \frac{\rho_0 S_{L0}}{E} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad E = \frac{E_g}{1 + aE_g / E_t},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha \rho S_L w^2 \right] = \alpha \rho_0 S_{L0} \left[\frac{w^2}{E} \frac{\partial p}{\partial z} + 2w \frac{\partial w}{\partial z} \right].$$

Уравнения системы (1) можно привести к виду:

$$-\left(1 + \frac{\alpha \rho_0 w^2}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho_0 w}{E} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\lambda \rho_0}{8\delta} \cdot w^2 + 2\alpha \rho_0 w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

Последние выражения можно упростить, полагая

$E = E_g \Rightarrow E / \rho_0 = c^2 \gg w^2$, где c — скорость звука в среде. Тогда:

$$\frac{\alpha \rho_0 w^2}{E} \ll 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha \rho_0 w^2}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\partial p}{\partial z}$$

Процессы изменения давления и скоростей движения среды происходят со скоростью, близкой к скорости звука в среде c . На расстояние Δz эти изменения передаются за время $\Delta t = \Delta z / c$. Тогда получим следующие сравнительные оценки величин производных:

$$\frac{\rho_0 w}{E} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{w}{c} \frac{p}{l} \ll \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p}{l}. \text{ Для второго уравнения:}$$

$$w \frac{\partial p}{\partial z} = w \frac{p}{l} \ll \frac{\partial p}{\partial t} = c \frac{p}{l}. \text{ Таким образом, пренебрегая}$$

членами высших порядков малости, систему (1) запишем в виде:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta} \cdot w^2 + 2\alpha w \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (3)$$

Если в уравнениях (3) пренебречь скоростным напором и силами трения, то получится система уравнений, предложенная в работе [2].

Для описания поведения *двухфазной рабочей жидкости*, которая содержит нерастворенную газовоздушную фазу в виде пузырьков, можно применить подход В.Н. Прокофьева [3]. В рамках этого подхода, модуль объемного сжатия жидкости считается функцией от давления и объемной доли $m_0 = V_z / V_c$ нерастворенного воздуха (V_z — объем газовой смеси; V_c — объем смеси;). Используя закон постоянства массы сжимаемого объема жидкости, получим

$$\rho_c = \rho_{c0} \frac{V_{жс0}}{V_{жс}} \frac{1 + V_{z0} / V_{жс0}}{1 + V_z / V_{жс}} \quad (4)$$

ρ_c — плотность двухфазной жидкости; $V_{жс}$ — объем жидкой фазы: $V_c = V_z + V_{жс}$. Индекс ноль обозначает соответствующий параметр при начальных условиях. Учитывая соотношения [3]:

$$V_z / V_{жс} = \left[m_0 / (1 - m_0) \right] \cdot \left[((p_0 + 1) / (p + 1))^{k_1} / ((A_a p_0 + B_a) / (A_a p + B_a))^{k_2} \right];$$

$$V_{жс0} / V_{жс} = \left((A_a p_0 + B_a) / (A_a p + B_a) \right)^{-1/A_a};$$

$$V_{z0} / V_{жс0} = m_0 / (1 - m_0),$$

получим выражение для зависимости величины плотности смеси от давления.

$$\rho = \rho_{c0} \cdot \chi(p) \quad (5)$$

$$\chi(p) = \left(\left(A_a \sqrt{\frac{A_a p_0 + B_a}{A_a p + B_a}} + \frac{m_0}{1 - m_0} k \sqrt{\frac{p_0 + 1}{p + 1}} \right) (1 - m_0) \right)^{-1}$$

$k \approx 1.4$ — адиабатическая постоянная воздуха;

A_a, B_a — параметры, зависящие от типа и температуры рабочей жидкости.

На рисунке 1 показаны графики зависимостей относительной плотности однофазной (сплошная линия) и двухфазной (штриховая линия) жидкостей от давления при различных значениях m_0 .

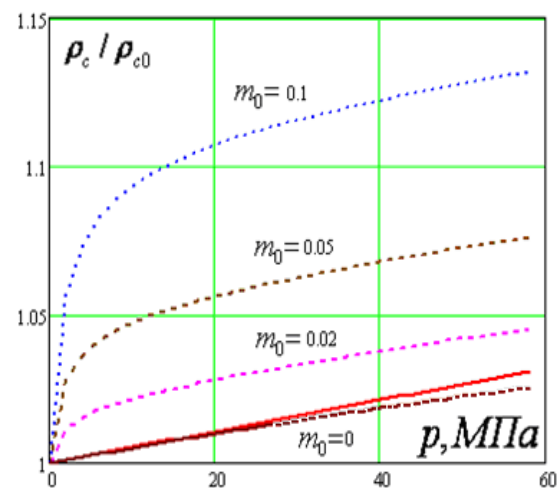


Рисунок 1 — Зависимость относительной плотности однофазной (сплошная линия) и двухфазной (штриховая линия) рабочей жидкости от давления.

Найдем производные системы (1) с учетом зависимости (5)

$$\rho_c \cdot S_L = \rho_{c0} S_{L0} \cdot \chi(p) \left(1 + a \frac{\Delta p}{E_t} \right),$$

$$\frac{\partial(\rho_c S_L w)}{\partial t} = \rho_c S_{L0} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w \rho_c S_{L0}}{E_g} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot W,$$

$$\frac{\partial(\rho_c \cdot w \cdot S_L)}{\partial z} = \rho_c S_{L0} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w \rho_c S_{L0}}{E_g} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot W,$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot S_L)}{\partial t} = \frac{\rho_c S_{L0}}{E_g} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot W,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\alpha \rho_c S_L w^2] = \alpha \rho_c S_{L0} \left[2w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w^2}{E_g} \frac{\partial p}{\partial z} W \right],$$

$$W = \left[\frac{E_g}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial p} \cdot \left(1 + a \frac{\Delta p}{E_t} \right) + \frac{a \cdot E_g}{E_t} \right].$$

Учитывая, что $(1 + a \Delta p / E_t) = 1$ и выражение $(E_g / \chi) \cdot (\partial \chi / \partial p)$ для двухфазной сжимаемой жидкости тождественно равно единице, получим: $W = 1$. Система уравнений (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{w}{E_g} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta} \cdot w^2 + \alpha \left[2w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w^2}{E_g} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -E_g \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (6)$$

Общий вид уравнений системы (6) аналогичен уравнениям системы (3), но плотность жидкости и модуль ее всестороннего сжатия в (6) являются функциями давления. Скорость звука в рабочей жидкости также не является константой: $c(p) = \sqrt{E / \rho}$. Величина $c(p)$ уменьшается с увеличением объемной доли нерастворенной газовой фазы и уменьшением давления. Для рабочей жидкости с характеристиками $A_a = 15,75$; $B_a = 1880 \text{ МПа}$; $\rho_{c0} = 900 \text{ кг/м}^3$, при минимальном давлении $p = 0,1 \text{ МПа}$ и близком к максимальному значению $m_0 = 0,1$, скорость звука равна $c = 130 \text{ м/с}$. Но даже для этого крайнего случая отношение скорости движения жидкости к скорости звука в ней является достаточно малой величиной. По аналогии с преобразованием уравнений системы (3), запишем

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta} \cdot w^2 + 2\alpha w \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -E_g \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (7)$$

Системы (3) и (7) принципиально отличаются только видом зависимости плотности рабочей жидкости от давления и выражениями для модуля объемного сжатия. Вводим обозначения: для однофазной жидкости

$$\rho = \rho_0, E = E_g / \left(1 + a E_g / E_t \right);$$

для двухфазной жидкости

$$\rho = \rho_c; E = E_g.$$

Метод характеристик

Для решения систем (3) и (7) можно использовать численный метод характеристик [4]. Система приводится к стандартному виду

$$L_i = A_i \frac{\partial p}{\partial z} + B_i \frac{\partial p}{\partial t} + C_i \frac{\partial w}{\partial z} + D_i \frac{\partial w}{\partial t} + E_i = 0, \quad (i = \overline{1,2}) \quad (8)$$

где z, t — независимые переменные; p, w — искомые функции времени и координаты; A, B, C, D, E — известные непрерывные функции z, t, p, w .

$$A_1 = 1 / \rho, B_1 = 0, C_1 = 2\alpha w, D_1 = 1, E_1 = \lambda \cdot w^2 / 8\delta,$$

$$A_2 = D_2 = E_2 = 0, B_2 = 1, C_2 = E.$$

Преобразовывая уравнения $L_1 + \lambda L_2 = 0$, можно записать дифференциальное уравнение для независимых переменных

$$k (dt / dz)^2 + q (dt / dz) + r = 0, \quad (9)$$

$$k = A_1 C_2 - A_2 C_1 = E / \rho = c^2,$$

$$r = B_1 D_2 - B_2 D_1 = -1,$$

$$q = A_2 D_1 + B_2 C_1 - A_1 D_2 - B_1 C_2 = 2\alpha w.$$

Решая квадратное уравнение (9), находим уравнения линий характеристик:

$$\frac{dt}{dz} = -\alpha \frac{w}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 w^2 + c^2}{c^4}} = \xi_{\pm} \approx \pm \frac{1}{c} \quad (10)$$

Согласно [4] вдоль линий характеристик удовлетворяются уравнения:

$$F dp + (k \xi_{\pm} - G) dw + (K \xi_{\pm} - H) dz = 0$$

$$F = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 1 / \rho,$$

$$G = B_1 C_2 - B_2 C_1 = -2\alpha w,$$

$$K = A_1 E_2 - A_2 E_1 = 0,$$

$$H = B_1 E_2 - B_2 E_1 = -\lambda \cdot w^2 / 8\delta.$$

После подстановки коэффициентов получим дифференциальные уравнения в характеристической форме:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + (\pm c + 2\alpha w) \frac{dw}{dt} \pm \frac{\lambda c}{8\delta} \cdot w^2 = 0. \quad (11)$$

Для двух любых точек R, S уравнения (10) определяют на плоскости с координатами z, t две линии (рисунок 2), вдоль которых справедливы уравнения (11). В точке пересечения линий P справедливы оба уравнения (11). Для решения (11) они представляются в конечно-разностной форме:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}(p(z_i, t_k) - p(z_{i-1}, t_{k-1})) + (c + 2\alpha w(z_{i-1}, t_{k-1})) \cdot \\ \cdot (w(z_i, t_k) - w(z_{i-1}, t_{k-1})) + \frac{\lambda c w^2}{8\delta} (z_{i-1}, t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1}) = 0 \\ \frac{1}{\rho}(p(z_i, t_k) - p(z_{i+1}, t_{k-1})) + (-c + 2\alpha w(z_{i+1}, t_{k-1})) \cdot \\ \cdot (w(z_i, t_k) - w(z_{i+1}, t_{k-1})) - \frac{\lambda c w^2}{8\delta} (z_{i+1}, t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

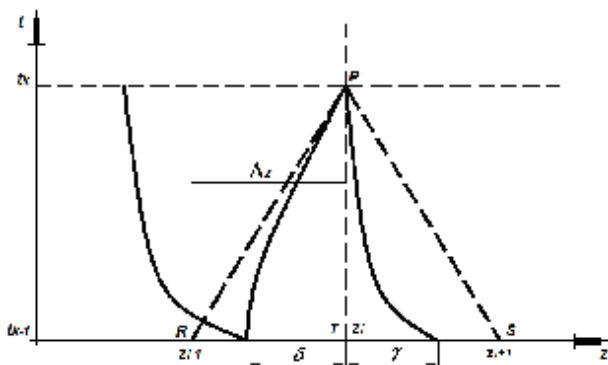


Рисунок 2 — Схема дискретизации волновых уравнений для численного счета.

Решение системы уравнений (12) позволяет найти значения давления $p(z_i, t_k) = p_i^k$ и скорости рабочей жидкости $w(z_i, t_k) = w_i^k$ в точке P , зная величины аналогичных параметров в точках R и S .

$$w_{ik} = \frac{w_{i-1}^{k-1} + w_{i+1}^{k-1} \cdot V + \frac{p_{i-1}^{k-1} - p_{i+1}^{k-1}}{\rho \cdot (c + 2\alpha w_{i-1}^{k-1})} \frac{\lambda c \Delta t \left((w_{i-1}^{k-1})^2 + (w_{i+1}^{k-1})^2 \right)}{8\delta (c + 2\alpha w_{i-1}^{k-1})}}{V + 1}, \quad (13)$$

$$P_{ik} = \frac{P_{i+1}^{k-1} + V P_{i-1}^{k-1} - V \rho \cdot (c + 2\alpha w_{i-1}^{k-1}) \left(w_{i-1}^{k-1} - w_{i+1}^{k-1} \right) + \frac{\rho \lambda c \Delta t \left((w_{i-1}^{k-1})^2 - V (w_{i+1}^{k-1})^2 \right)}{8\delta}}{V + 1}$$

$$V = \frac{(c - 2\alpha w_{i+1}^{k-1})}{(c + 2\alpha w_{i-1}^{k-1})}.$$

Дискретность по пространственной координате Δz связана с дискретностью по времени Δt соотношением $c\Delta t = \Delta z$. Для однофазной жидкости $c = const$, линии характеристик – прямые (штриховые линии, рисунок 2), которые соединяют точки R, S и P . Для полученной равномерной сетки формулы (13) позволяют определять динамику давления и скорости рабочей жидкости в точках трубопровода, не лежащих на его границах.

Для двухфазной жидкости ее скорость зависит от давления и линии характеристик не являются прямыми. Линии характеристик, проходящие через точки R, S , не пересекут точку P . Для сохранения равномерной сетки $c_{max} \Delta t = \Delta z$, необходимо предусмотреть специальную процедуру. Допустим, что в точке P сходятся две характеристики, проходящие в момент времени $t = t_{k-1}$ через точки с координатами $z = z_i - \delta$; $z = z_i + \gamma$ (рисунок 2). Зная давления в точках R, S и T , можно, проводя линейную интерполяцию, определить давление в точках ($z = z_i - \delta$) и ($z = z_i + \gamma$).

$$\begin{cases} p_{i-\delta}^{k-1} = (p_i^{k-1} - p_{i-1}^{k-1}) (\Delta z - \delta) / \Delta z + p_{i-1}^{k-1} \\ p_{i+\gamma}^{k-1} = -(p_i^{k-1} - p_{i+1}^{k-1}) \gamma / \Delta z + p_i^{k-1} \end{cases} \quad (14)$$

В первом приближении можно считать, что

$$\delta = \bar{c}_{\delta i} \cdot \Delta t; \quad \gamma = \bar{c}_{i\gamma} \cdot \Delta t \quad (15)$$

где $\bar{c}_{\delta i} = (c_i + c_{i-\delta}) / 2$ и $\bar{c}_{i\gamma} = (c_i + c_{i+\gamma}) / 2$ — средние скорости продольной волны на соответствующих участках трубопровода. Скорости $c_i, c_{i-\delta}$ и $c_{i+\gamma}$ можно определить по формуле $c(p) = \sqrt{E / \rho}$, с учетом выражений (5, 14) и зависимости [3]. Решая уравнения (15) относительно неизвестных δ и γ методом последовательных приближений, можно, из (14), определить величины давлений в точках, из которых линии характеристик сходятся в точке P .

Аналогичную (14) процедуру линейной интерполяции можно провести для определения скоростей рабочей жидкости. Подставляя найденные скорости и давления в формулы (13), определим аналогичные характеристики в точке P . Описанная процедура неприменима для граничных точек, так как в них приходит только одна характеристика.

Модель гидропривода

Гидропривод (рисунок 3) состоит из силовых гидроагрегатов — насоса (Н) и гидромотора (ГМ), переливного клапана (Кл) прямого действия с нулевым перекрытием. В качестве силовых гидроагрегатов в гидроприводе используются АПГ с наклонным блоком цилиндров. Рабочий объем гидромашин имеет два фиксированных диск-

ретных значения, зависящих от угла наклона θ блока цилиндров к оси блока цилиндров. Дискретное регулирование рабочего объема осуществляется за счет дифференциального подключения гидроцилиндра управления (ГУ) к напорной гидролинии. Движение поршня ГУ изменяет угол наклона θ блока цилиндров. Подача давления управления в полость гидроцилиндра с меньшей площадью поршня обеспечивает максимальный угол θ — максимально возможное значение рабочего объема гидроагрегата, а подача давления управления в обе полости — минимальное значение рабочего объема.

Гидропривод рассматриваем как динамическую систему с распределенными параметрами. Область нагнетания (всасывания) силового гидроагрегата может быть рассмотрена как гидравлическая система, образованная полостями цилиндров и распределителем. При этом полости цилиндров перемещаются относительно оси окон распределителя, а поршни в цилиндрах, совершая возвратно поступательное движение вдоль осей, изменяют объем рабочей камеры и передают импульс давления рабочей жидкости. Полагаем, что переключка распределителя обеспечивает нулевое перекрытие, и движение рабочей жидкости в каналах является адиабатическим.

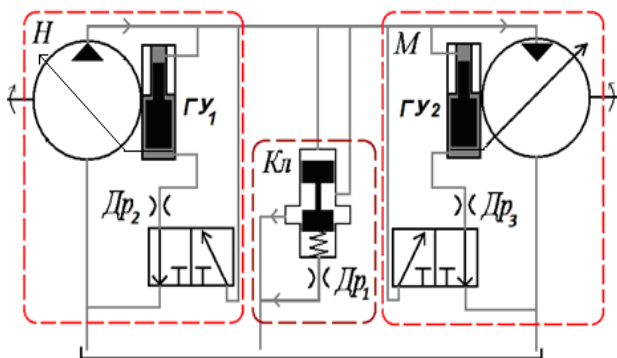


Рисунок 3 — Схема гидропривода.

Н и ГМ содержат нечетное число цилиндров $n^{H,M}$, из которых, в зоне нагнетания может находиться $k^{H,M} = (n^{H,M} \pm 1)/2$ цилиндров. Для каждого цилиндра, связанного с зоной нагнетания (всасывания), неустановившееся движение жидкости может быть описано, в зависимости от модели жидкости, уравнениями (3) или (7).

Для моделирования процессов в рабочем цилиндре введем систему координат с осью OZ (рисунок 4), направленной от окна распределителя, и рассмотрим систему контрольных сечений, в которых будем определять значения основных параметров работы гидроагрегата в данный момент времени t : давление p и расход $Q = wS_L$ рабочей жидкости.

Расстояние между контрольными сечениями при заданном шаге по времени Δt определяется величиной

$$\Delta z = c \cdot \Delta t.$$

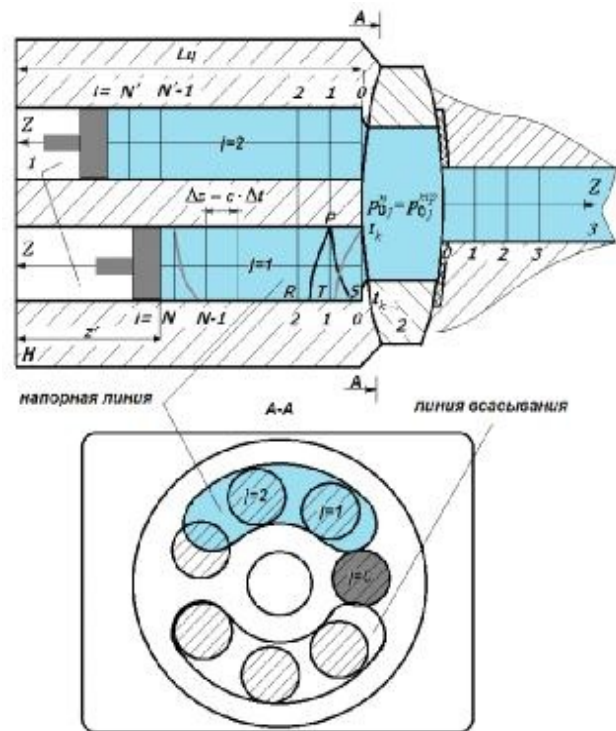


Рисунок 4 — Схема системы контрольных сечений качающего узла.

Примем двойную индексацию контрольных сечений цилиндров: первая цифра $i = \overline{0, N}$ обозначает порядковый номер сечения канала (0 - в начале системы координат, N — на поршне гидроцилиндра). Вторая $j = \overline{0, n^{H,M}}$ — порядковый номер цилиндра ($j = 0$ для цилиндра, который в момент времени $t = 0$ находится на переключке распределителя и будет двигаться в область нагнетания). В напорной линии ось системы координат направим от насоса к мотору и также введем систему контрольных сечений (рисунок 4). Полагаем, что для всех контрольных сечений цилиндров блока и напорного трубопровода в момент времени t_{k-1} известны величины давлений p_{ij}^{k-1} и скоростей жидкости w_{ij}^{k-1} . Вследствие малости линейного размера распределителя, по сравнению с трубопроводом и гидроцилиндрами, полагаем $p_{0j}^H = p_{0j}^{mp}$; $p_{0j}^M = p_{Nj}^{mp}$. Известны исходные положения поршней всех цилиндров силовых гидроагрегатов.

Граничные условия. Насос

Рассмотрим сечения $i = N$. В процессе работы Н величина N изменяется: $N = (L_{ц} - z')/\Delta x$, $L_{ц}$ — рабочая

длина блока цилиндров, z' — смещение поршня. Величина z' находится по кинематическим зависимостям [5], использованным в [6] для описания особенностей переходных процессов в гидроприводах на основе АПГ с наклонным блоком цилиндров. Зная z' , можно найти $w_{Nj}^{k,h} = dz'/dt$. Известные значения скоростей рабочей жидкости в сечении $i=N$ в момент времени $t = t_k$ дают возможность, используя уравнение (12), найти для рассматриваемых сечений значения давлений $p_{Nj}^{k,h}$:

$$p_{Nj}^{k,h} = p_{N-1,j}^{k-1,h} - \rho \left(c + 2\alpha w_{N-1,j}^{k-1,h} \right) \left(w_{Nj}^{k,h} - w_{N-1,j}^{k-1,h} \right) - \frac{\rho \lambda c \left(w_{N-1,j}^{k-1,h} \right)^2 \Delta t}{8\delta}$$

Для нахождения скоростей и давлений в сечении $i = 0$ рассмотрим следующую процедуру. Рассмотрим различные по физическим условиям положения цилиндра относительно окна распределителя. Если окно цилиндра полностью находится в области напорного окна распределителя: $p_{0j}^{k,h} = p_0^{k,mp}$ — давление в нулевом сечении j -го цилиндра совпадает с давлением в распределителе и начальном сечении напорного трубопровода. При переходе j цилиндром перемычки распределителя из области всасывания в область нагнетания граничным условием будет уравнение расхода:

$$w_{0j}^{k,h} = \text{sign} \left(p_0^{k,mp} - p_{0j}^{k,h} \right) \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \left| p_0^{k,mp} - p_{0j}^{k,h} \right|}{\rho_0}} \quad (16)$$

где μ_0 — коэффициент расхода дросселирующей щели.

Таким образом, при известной величине $p_0^{k,mp}$, на границах каждого цилиндра задано либо давление, либо скорость движения рабочей жидкости и можно по формулам (12) определить другой неизвестный параметр. Но давление в напорном окне распределителя зависит от подачи всех цилиндров напорной области и, в то же время, влияет на их подачу. Для нахождения величины $p_0^{k,mp}$ используем уравнение неразрывности для напорного окна распределителя [2].

$$\sum_{j=1}^{k_h} Q_{0j}^{k,h} - Q_0^{k,mp} - Q^{k,def} - Q^{k,кл} - Q^{k,dp} - Q^{k,yn} = 0 \quad (17)$$

В (17) слагаемые $Q_{0j}^{k,h}$ описывают подачу гидроцилиндров, находящихся в области напорного окна, в область распределителя, $Q_0^{k,mp}$ — подача рабочей жидкости в напорную линию гидропривода, $Q^{k,def}$ — деформационные потери в объеме распределителя. $Q^{k,кл}$, $Q^{k,dp}$ и $Q^{k,yn}$ описывают расход рабочей жидкости на работу переливного клапана, встроенного в него дросселя и на обеспечение процесса изменения рабочего объема H соответственно.

Для цилиндра, переходящего в область напорного окна, подача может быть найдена при помощи выражения (16). Формулы, выражающие подачу цилиндров, которые находятся в области напорного окна распределе-

ля $Q_{0j}^{k,h}$ и подачу в напорную линию $Q_0^{k,mp}$ через величину $p_0^{k,mp}$, можно получить из решения уравнения (12).

$$Q_{0j}^{k,h} = w_{0j}^{k,h} \cdot S_{ij} = S_{ij} \cdot \left(w_{1j}^{k-1,h} + \frac{p_0^{k,mp} - p_{1j}^{k-1,h} - \frac{\rho \lambda c \left(w_{1j}^{k-1,h} \right)^2 \Delta t}{8\delta}}{\rho \left(c - 2\alpha w_{1j}^{k-1,h} \right)} \right)$$

$$Q_0^{k,mp} = w_0^{k,mp} \cdot S_{mp} = S_{mp} \cdot \left(w_1^{k-1,mp} + \frac{p_0^{k,mp} - p_1^{k-1,mp} - \frac{\rho \lambda c \left(w_1^{k-1,mp} \right)^2 \Delta t}{8\delta}}{\rho \left(c - 2\alpha w_1^{k-1,mp} \right)} \right)$$

Деформационные потери определим:

$$Q^{k,def} = \frac{V_{pac}}{E_g} \frac{p_0^{k,mp} - p_0^{k-1,mp}}{\Delta t} \quad (18)$$

Если, для определенности, считать, что переливной клапан присоединен к напорной линии в нулевом сечении, то $Q^{k,кл}$, $Q^{k,dp}$ и $Q^{k,yn}$ являются функциями от величины $p_0^{k,mp}$. Уравнения, описывающие эту зависимость, подробно описаны в [7]. Уравнение (17) можно представить в виде $p_0^{k,mp} = f \left(p_0^{k,mp} \right) + p_0^{k,mp}$, где

$f \left(p_0^{k,mp} \right)$ — левая часть выражения (17) и решать методом последовательных приближений. Критерием получения решения можно считать выполнение условия $\left| p_{0,m}^{k,mp} - p_{0,m-1}^{k,mp} / p_{0,m}^{k,mp} \right| \leq \varepsilon$, где m — номер приближения, а ε — заданная точность вычислений [2].

В итоге решения (17) определяется расчетное значение давления в полости напорного окна распределителя $p_0^{k,mp}$, с использованием которого из (12) находятся расходы в нулевых сечениях каналов рабочих цилиндров и напорного трубопровода, которые также используются как граничные условия. Далее, с использованием сетки характеристик определяем значения параметров в промежуточных сечениях рабочих цилиндров и канала напорного трубопровода.

На аналогичных принципах может быть построена процедура определения давления в распределителе M .

Граничные условия. Гидромотор

Для построения граничных условий на поршнях цилиндров ГМ составим уравнение моментов сил, приведенных к его валу.

$$J \frac{d\omega^M}{dt} = M^M \cdot \eta^M \cdot \eta^z - M^c - \beta \cdot \omega^M, \quad (19)$$

где $\eta^{m,c}$ — механический и гидромеханический к.п.д. ГМ; M^c — момент внешних сил на валу ГМ; $\beta \cdot \omega^m$ — момент жидкостного трения. Записывая выражение (18) в дискретной форме, получим:

$$\omega^{k,m} = \omega^{k-1,m} + (\Delta t/J) \cdot (M^{k-1,m} \cdot \eta^m \cdot \eta^c - M^{k-1,c} - \beta \cdot \omega^{k-1,m}). \quad (20)$$

Здесь суммарный крутящий момент на валу ГМ от цилиндров, находящихся в полости нагнетания, можно оп-ределить по формуле [8]:

$$M^{k,m} = S^{nm} r \left[\sin \theta \sum_{j=1}^{k,m} p_{Nj}^{k,m} \sin \alpha_j - \frac{r^2}{k_D l} (k_D \cos \theta - 1) \sum_{j=1}^{k,m} p_{Nj}^{k,m} \sin(2\alpha_j) \right], \quad (21)$$

S^{nm} — площадь поршня, α_j — угол поворота j -го шатуна, r — радиус размещения головок поршней в цилиндро-поршневой группе. Частота вращения вала гидромотора $\omega^{k,m}$, по кинематическим зависимостям [6], определяет для каждого цилиндра ГМ, находящегося в области на-порного окна, скорость перемещения поршня и, следова-тельно, скорость рабочей жидкости $w_{Nj}^{k,m}$ в последнем сечении j -го цилиндра. Найденные граничные условия по скорости позволяют, используя уравнения (12), опреде-лить соответствующие им давления.

Выводы

Получены уравнения, описывающие зависимость плотности двухфазной сжимаемой жидкости от давления и концентрации нерастворенного воздуха и уравнения движения двухфазной сжимаемой жидкости в цилиндри-ческой полости.

Разработана модель гидропривода на основе АПГ с

наклонным блоком цилиндров с учетом сжимаемости двухфазной рабочей жидкости и волновых процессов в цилиндрах качающего узла и напорной линии.

В работе показана принципиальная возможность и разработан алгоритм численного решения системы не-линейных дифференциальных уравнений в частных про-изводных, описывающих переходной процесс в гидравли-ческих приводах.

Литература

1. Чарный, И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный. — М.: Ленинград, 1951. — 225 с.
2. Орлов, Ю.М. Авиационные объемные гидрома-шины с золотниковым распределением / Ю.М. Орлов. — Пермь: Пермский гос. техн. ун-т, 1993. — 252 с.
3. Прокофьев, В.Н. Экспериментальное исследование упругих свойств двухфазных рабочих жидкостей гидропри-водов объемного типа / В. Н. Прокофьев // Известия ву-зов. Машиностроение. — 1966. — №2.
4. Фокс, Д.А. Гидравлический анализ неустановив-шегося течения в трубопроводах/ Д.А. Фокс. — М.: На-ука, 1981. — 249 с.
5. Прокофьев, В.Н. Кинематические связи в бескардан-ных аксиально-поршневых гидропередачах/ В.Н. Прокофь-ев, А.В. Синев // Вестник машиностроения. — 1964. — № 11. — С. 14—18.
6. Рыжаков, А.Н. Влияние кинематики аксиально-пор-шневых гидромашин с дискретным регулированием на характер протекания переходных процессов / А.Н. Ры-жаков, И.В. Николенко // MOTROL. — 2010, 12D. — С. 110—116.
7. Рыжаков, А. Н. Исследование переходных процес-сов в гидроприводах с дискретным регулированием сило-вых гидроагрегатов с учетом двухфазности рабочей жид-кости/ А.Н. Рыжаков, И.В. Николенко// Промислова гідрав-ліка і пневматика. — 2010. — № 4 (30). — С. 68—75.
8. Прокофьев, В.Н. Аксиально-поршневой регули-руемый гидропривод / В. Н. Прокофьев. — М.: Машино-строение, 1969. — 496 с.

Надійшла 20.04.2012 р.