

## ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГІДРОДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ У ТРИБОСПРЯЖЕННІ

*Предложен метод учета гидродинамического нагружения на опорные поверхности трибосопряжения при его дискретном временном влиянии на численное решение дифференциальных уравнений, описывающих упругое деформирование элементов опорных поверхностей. Приведены результаты численного решения.*

*The method of numerical calculation considering hydrodynamic stressing on supporting of friction at its discrete temporal effect on the numerical solution of differential equations describing elastic deformation of basic surfaces elements is offered. Results of the numerical decision are given.*

### Вступ

Незважаючи на різноманіття конструкцій і специфічні особливості функціонування, гідравлічні агрегати мають загальні елементи, працездатність яких визначається їхньою надійністю. Статистика свідчить, що найбільше число несправностей агрегатів гідравлічних систем пов'язано з порушенням працездатності прецизійних пар і елементів ущільнення. У зв'язку з цим аналіз умов функціонування й встановлення причин порушення працездатності прецизійних пар заслуговують на особливу увагу при розробці заходів щодо підвищення надійності гідравлічних агрегатів. Триботехнічні характеристики твердих тіл при контактній взаємодії суттєво залежать від напружень, що виникають у зонах їх фактичного контакту. У цих зонах, залежно від навантажень, параметрів шорсткості поверхні, механічних властивостей поверхневих шарів, властивостей мастильного матеріалу можуть мати місце пружні деформації. Незважаючи на те, що на реальних контактах вони надзвичайно поширені, пружні деформації все ще не досить досліджено через труднощі фізичного й математичного характеру. Математичні труднощі виникають при вивченні процесу взаємодії тіл навіть простої форми, вони змушують звертатися до різних спрощень. Але у реальних умовах пружні деформації, зокрема, від гідродинамічних впливів при змащенні, виникають не тільки в одній площині, але й у просторі, незважаючи на технологічні умови роботи в одній площині. Для розв'язку таких задач необхідним є залучення сучасних методів і алгоритмів чисельного аналізу й диференціальної геометрії, що дозволяють максимально використовувати відомі наробітки у цій області.

### Аналіз останніх досліджень

Наприкінці XIX століття Н.П. Петровим, Б. Тауером і О. Рейнольдсом було встановлено, що ефективно змащення має місце за умов, коли поверхню тертя надійно розділено тонким шаром мастильного матеріалу, товщи-

на якого при робочих умовах перевищує сумарну висоту нерівностей робочих поверхонь сполучених тіл, а адгезійна взаємодія між ними практично виключається, тому що поверхні рознесено на відстань, що перевищує радіус дії адгезійних сил. Поділ поверхонь тертя мастильним шаром здійснюється під дією тиску, самозбудного у цьому шарі при відносному русі сполучених поверхонь. Такий режим гідродинамічного змащення забезпечує мінімальні втрати на тертя й практично повну відсутність зношування. Для його реалізації необхідна певна комбінація навантаження на вузол тертя, швидкості відносно го переміщення елементів пари тертя, геометрії контактуючих поверхонь і в'язкості мастильного матеріалу [1]. Очевидна складність аналізу цих процесів у їх аналітичному або експериментальному методах досліджень, що вимагають значних часових витрат. Тому поява нових математико-обчислювальних моделей дозволить значно скоротити час на впровадження сучасних триботехнологій [2].

### Постановка задачі

Метою даної роботи є оцінювання можливостей чисельного дослідження напружено-деформованого стану опорних поверхонь трибосопряження під впливом гідродинамічних сил. Пропонується метод чисельного моделювання силових, зокрема, гідродинамічних впливів у поверхневих шарах трибосопряжень нерівностей, що викликають деформування. Для задавання геометрії об'єкта та кінематичних складових використовуються відомі підходи Лагранжа і Ейлера, на базі яких сформульовано систему звичайних диференціальних рівнянь, що описують деформування елемента будь-якої кривизни [3].

Для задавання цих навантажень на дискретну ділянку трибосопряження або на трибосопряження в його агрегатному стані необхідно у числовій методиці [3] враховувати наступне. Позначимо проекції векторів зусиль  $\mathbf{F}$  і

моментів  $\mathbf{M}$  на осі рухомого головного тригранника  $u, v, w$ , відповідно,  $F_u, F_v, F_w, M_u, M_v, M_w$ . Тут  $F_u, F_v$  — перерізаючі сили;  $F_w$  — подовжня сила;  $M_u, M_v$  — згинальні моменти;  $M_w$  — момент кручення. Тоді проєкції локальних похідних векторів  $\mathbf{F}$  і  $\mathbf{M}$  на осі головного тригранника можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds}\right)_n = \frac{dF_u}{ds}, \dots, \left(\frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds}\right)_n = \frac{dM_u}{ds}, \quad (1)$$

де  $s$  — незалежна змінна за диференцюванням.

Проектуючи з урахуванням рівності (1) ліві і праві частини співвідношень на осі  $u, v, w$ , отримуємо шість скалярних рівнянь рівноваги сил

$$\begin{aligned} dF_u/ds &= -qF_w + rF_v - f_u, \\ dF_v/ds &= -rF_u + pF_w - f_v, \\ dF_w/ds &= -pF_v + qF_u - f_w \end{aligned} \quad (2)$$

і три скалярних рівняння рівноваги моментів

$$\begin{aligned} dM_u/ds &= -qM_w + rM_v + F_v m_u, \\ dM_v/ds &= -rM_u + pM_w - F_u m_v, \\ dM_w/ds &= -pM_v + qM_u - m_w, \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння рівноваги (2), (3) містять у загальному випадку дев'ять невідомих функцій

$$F_u, F_v, F_w, M_u, M_v, M_w, p, q, r$$

де  $p, q, r$  — кривизни і крутіння, відповідно по осях  $u, v, w$ .

У зв'язку з цим шести побудованих рівнянь недостатньо для визначення всіх цих величин. Зусилля  $F_u, F_v, F_w$  є чисто статичними факторами і визначаються з умов рівноваги (2). Враховуючи, що осі головного тригранника ( $u, v, w$ ) є головними осями вигину і крутіння, проєкції  $M_u, M_v, M_w$  головного моменту  $M$  внутрішніх сил представимо у вигляді

$$\begin{aligned} M_u &= A(p - p_0), \quad M_v = B(q - q_0), \\ M_w &= (r - r_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $p, q, r$  — функції кривизни і крутіння в деформованому стані;  $p_0, q_0, r_0$  — ці ж функції в початковому недеформованому стані;  $A, B, C$  — жорсткості при вигині і крутінні. Для обчислення  $A, B, C$  випишемо рівності:  $A = EI_u, B = EI_v, C = GI_p$ , де  $E$  — модуль пружності матеріалу;  $G$  — модуль зсуву;  $I_u, I_v$  — моменти інерції площі поперечного перерізу відносно осей  $u, v$ ;  $I_p$  — полярний момент інерції. Співвідношення (4) дозволяють виключити з рівнянь (3) моменти

$M_u, M_v, M_w$  і привести їх до вигляду

$$\begin{aligned} dp/ds &= 1/A(Adp_0/ds - Cqr + \\ &+ Cqr_0 + Brq - Brq_0 + Fv - m_u) \\ dq/ds &= 1/B(Bdq_0/ds - Arp + \\ &+ Arp_0 + Cpr - Cpr_0 - Fu - m_v) \\ dr/ds &= 1/C(Cdr_0/ds - Bpq + \\ &+ Bpq_0 + Aqr - Aqr_0 - m_w). \end{aligned} \quad (5)$$

Система шести диференціальних рівнянь (2), (5) містить шість невідомих, однак цих рівнянь недостатньо для визначення функцій  $F_u, F_v, F_w, p, q, r$ , оскільки в загальному випадку для їх обчислення по прийнятій в даній роботі методиці не вистачає граничних умов, достатніх для забезпечення єдиності розв'язку. Тому для замикання системи розв'язальних рівнянь, що враховує ці фактори, необхідно ввести додаткові кінематичні змінні і задати спосіб їх визначення.

У випадку, коли прикладена зберігаюча в просторі напрям зовнішня сила  $P$  з компонентами  $P_x, P_y, P_z$  за допомогою відповідних матриць переходу складові  $F_u, F_v, F_w$  потрібно виразити через  $P_x, P_y, P_z$  і граничні умови записати у вигляді

$$\begin{aligned} F_u &= (P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z) q / \sqrt{p^2 + q^2} + \\ &+ (P_x b_x + P_y b_y + P_z b_z) p / \sqrt{p^2 + q^2}, \\ F_v &= (P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z) p / \sqrt{p^2 + q^2} + \\ &+ (P_x b_x + P_y b_y + P_z b_z) q / \sqrt{p^2 + q^2}, \\ F_w &= P_x t_x + P_y t_y + P_z t_z. \end{aligned}$$

Числове розв'язання таких рівнянь, що описують напружено-деформований стан поверхневого шару як у одній площині, так і у просторі здійснюється методом продовження за параметром сумісно з методом Канторовича.

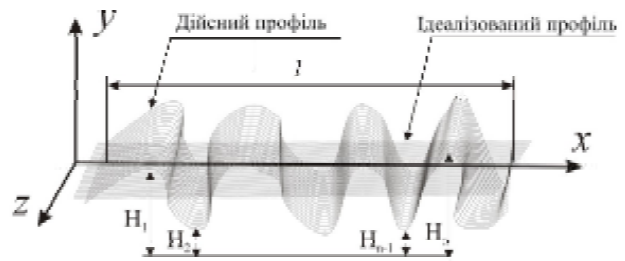


Рисунок 1 — Мікронерівності трибоспряження

При цьому геометрією поверхні може бути як округлість, так і деяка інша форма кривої, наприклад, еліпс із незначним співвідношенням осей тощо. При оцінці взаємодії контактуючих твердих тіл мікронерівності реальної поверхні моделюють у вигляді однакового розміру тіл правильної геометричної форми, що розташовані на деякій основі й розподілені за певною залежністю по висоті.

Середнє арифметичне відхилення профілю  $R_a$  визначається як середнє значення відстаней окремих точок профілю  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  до середньої лінії гребінців (рисунок 1).

$$R_a = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n},$$

де  $n$  — число точок;  $Y_1 \dots Y_n$  — відстань окремих точок профілю до середньої лінії. Висоту нерівностей профілю по точкам  $R_z$  визначають як середнє значення між п'ятьма вищими точками виступів і п'ятьма нижчими точками западин профілю

$$R_z = \frac{(H_1 + H_3 + H_9) - (H_2 + H_2 + H_{10})}{5},$$

де  $H_1 \dots H_{10}$  — перпендикуляри із точок виступів (вищих і нижчих) паралельно осі  $x$ . Базовою називається довжина ділянки поверхні, що характеризує шорсткість поверхні й використовується для кількісного визначення її параметрів.

Щільність розташування окремих контактних зон залежить від шорсткості контактуючих поверхонь твердих тіл, їх механічних властивостей, хвилястості поверхні й величини прикладених сил, під дією яких у зонах фактичного торкання можуть мати місце деформації, змінання мікронерівностей або їх взаємне проникнення. Крива опорної поверхні є геометричною характеристикою, яка не враховує процесів деформування мікронерівностей.

Для врахування дії гідродинамічних впливів і використання одержаних залежностей для задавання навантаження у системі диференціальних рівнянь [3] використовуються відомі залежності необхідної точності допущень, що описують обтікання рідиною твердих тіл довільної форми [4]. Розрахунок параметрів гідродинамічного впливу на часовий  $(n-1)$  шар здійснюється за їх відомими значеннями на шарі  $(n)$  за допомогою дискретних рівнянь, що наближують систему до рівнянь Нав'є–Стокса

$$\frac{\rho U^* - \rho U^n}{\Delta t} + A_h(\rho U^n, p^n) \rho U^* = S^n;$$

$$L_h \delta p = \frac{\text{div}_h(\rho u^*)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t};$$

$$(\rho^* = \rho(T^*, y^*));$$

$$\rho u^{n+1} = \rho u^* - \Delta t \cdot \text{grad}_h \delta p;$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p;$$

$$\rho T^{n+1} = \rho T^*; \rho k^{n+1} = \rho k^*;$$

$$\rho \varepsilon^{n+1} = \rho \varepsilon^*; \rho y^{n+1} = \rho y^* ;$$

$$\rho^{n+1} = \rho(T^{n+1}, y^{n+1}).$$

Тут індекс \* присвоєно проміжним значенням параметрів;  $\rho U = (\rho u, \rho T, \rho k, \rho \varepsilon, \rho y)^T$  — повний набір базових змінних, за винятком тиску  $p$ ;  $\rho u = (u_1 u_2 u_3)^T$  — вектор швидкості;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T$  — вектор компонент

концентрації суміші рідини;  $\delta p = (p^{n+1} - p^n)$  — додаткова змінна, що є відхилом тиску. Всі вказані параметри є дискретними функціями, які визначаються за допомогою наведених рівнянь. Дискретні оператори

$$A_h; \text{div}_h; \text{grad}_h; L_h = \text{div}_h \text{grad}_h$$

наближують за другим порядком точності відповідні диференціальні оператори вихідних рівнянь.

### Отримані результати

Для підтвердження достовірності запропонованого підходу на рисунку 2, а за результатами чисельного розв'язку показано геометрію опорної поверхні до і після навантаження. Слід зазначити, що у наведеному прикладі задача розглядалася у плоскій постановці, при цьому недеформованою геометрією вважалося коло.

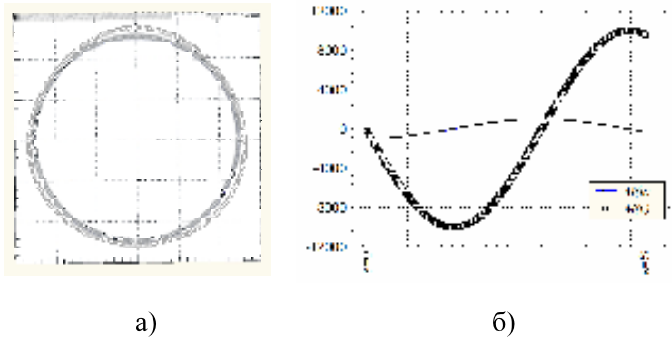


Рисунок 2 — Геометрія опорної поверхні (а) та моменти  $M$ , що виникають у її деформуванні при гідродинамічному навантаженні (б)

На рисунку 2, б показано значення згинальних моментів у безрозмірних величинах ( $A$  — жорсткість,  $R$  — радіус опорної поверхні) при деякому значенні гідродинамічного навантаження.

Досліджуючи таким чином деформований елемент, можна визначати будь-які показники напружено-деформованого стану на будь-якому етапі деформування як для окремого перерізу, так і у агрегатному стані.

Для числового розв'язку такої задачі задається 250 точок дискретизації. При цьому проводиться покрокове (100–200 кроків) інтегрування з дискретним навантаженням, а діючі навантаження є гідродинамічними аналогами параметра збудження  $\lambda = f(s)$ , де  $s$  — незалежна змінна інтегрування зведених диференціальних рівнянь. Достовірність розрахунків побічно визначається збіжністю рішень диференціальних рівнянь і, крім того, відображається на геометричній логічності графічного вигляду результатів.

### Висновки

Методика відрізняється алгоритмічністю і простою перебудови підходів до розв'язань конкретних задач. Гідродинамічні процеси, що виникають у контактних поверхнях трибоспряження можуть бути відображені

на екрані дисплея у реальному часі та одержані у графічному вигляді графіками, таблицями та рисунками.

З метою оцінки достовірності й точності результатів розв'язку задач було розглянуто випадки стаціонарного поперечного обтікання колового циліндра нескінченної довжини.

Такі задачі мають відомі розв'язки. Порівняння результатів показало достатню достовірність і ефективність розробленої методики. Як результат одержуються характеристики напружено-деформованого стану мікронерівностей і опорної поверхні у залежності від характеру гідродинамічного навантаження. Геометрична форма контактуючих поверхонь може бути заданою або аналітично, або за допомогою чисельної функції.

### Література

1. Лозовский, В.Н. Надежность гидравлических агрегатов / В.Н. Лозовский. — М. : Машиностроение, 1974. — 320 с.
2. Кравцов, В.І. Геометрія кривих у дослідженні механіки контактуючих поверхонь трибоспрязень / В.І. Кравцов, М.А. Садегіджалал // Проблеми тертя та зношування. — 2012. — № 57. — С. 58—65.
3. Кравцов, В.І. Вплив навантажень від течій на гнучкі підводні конструкції / В.І. Кравцов // Вестник ХГТУ. — 1998. — № 2(4). — С. 26—29.
4. Мартынов, А.К. Прикладная аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1972.

*Надійшла 10.12.2012 року*