

АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТУ З ЛЕГКОПРОНИКНОЮ ШОРСТКІСТЮ У КАНАЛЬНОМУ ПОТОЦІ ТА ВІДПОВІДНІ МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

ANALYSES OF AN EXPERIMENT WITH EASILY PENETRABLE ROUGHNESS IN PLANE DUCT AND RELEVANT TURBULENCE MODELS

Для одновимірної геометрії потоку проаналізовано недавні експериментальні дані трьох різних авторів для турбулентного потоку у гідравлічному лотці з протяжною системою високих стержнів біля дна (легкопроникної шорсткості). Виражено сумнів щодо універсальності використаних ними внутрішніх масштабів. Обробка експерименту не може відповісти на це питання повністю, потрібний теоретичний розгляд. Запропоновано дві прості алгебраїчні гіпотези для турбулентності усередині загальмованого потоку (тобто в легкопроникній шорсткості) і стільки ж для потоку над нею. Вплив легкопроникної шорсткості моделюється за допомогою розподіленої масової сили. Остання приймається пропорційною квадрату локальної швидкості при значних числах Рейнольдса Re' , або лінійно залежною від швидкості при малих Re' . Так виникають дві моделі для власне ЛПШ, ЛПШ₂ і ЛПШ₁ відповідно. Комбінації гіпотез для зовнішнього (вільного) потоку, для внутрішнього і для шару перехідів дають 8 різних математичних моделей досліджуваного ЛПШ-потоку, які вивчаються переважно аналізом розмірності. Він дозволяє знайти кілька масштабів довжини і швидкості; деякі з них "універсалізують" ЛПШ₂-потік, інші — ЛПШ₁-потік. Ці теоретичні висновки підтверджуються даними експерименту, але точність і неповнота останніх не дозволяє віддати перевагу будь-якій з моделей над іншими. Робота має практичне значення для гідравліки, розрахунку бризкальних систем, екологічних проблем атмосферних течій і прибережних водних течій.

Ключові слова: легкопроникної шорсткості, течії над лісом, у гідравлічних лотках, турбулентності усередині загальмованого потоку.

Вступ

Західні метеорологи та гідравліки вже більш як 50 років досліджують течії над лісом або сільськогосподарським полем, у руслах з високою рослинністю та моделюють їх, зокрема, у гідравлічних лотках. Такі потоки отримали назву *canopy flows*. Запропоновано узагальнено теоретичну концепцію, яку названо легкопроникною шорсткістю (ЛПШ). Рисунок 1 і 2 дозволяють зрозуміти, як утворюється такий потік.

Головними об'єктами закордонних досліджень лишаються структури у вигляді лісу [1,2,4,6], рослинність

у водному потоці [1,7-9], та додалися міська забудова [5], або кластери вітрових агрегатів [1], деякі гідравлічні конструкції [10,11], та навіть такі незвичні об'єкти, як "щітка", що обертається у потоці [12]. На підставі зібраних публікацій, що включає 250 статей, оглядів та монографій від початку *canopy*-досліджень до 2010 р., підраховано "частоту" їхнього виходу у світ у ті чи інші трирічні інтервали. Результати представлено на рисунку 3. Він свідчить про стрімке зростання зацікавленості науки до вивчення ЛПШ останніми роки. Сьогодні на *canopy*-потоки звернули увагу й міжнародні журнали найвищих наукових щаблів [3-5].

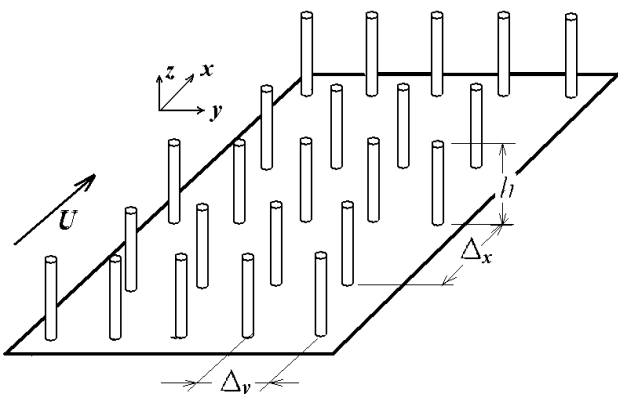


Рисунок 1 — Схема фрагмента ЛПШ на дні лотка

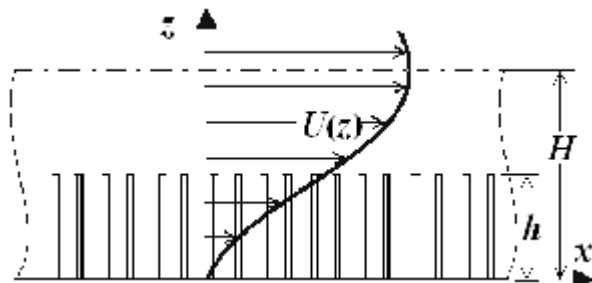


Рисунок 2 — Схема напірного потоку у плоскій трубі

Отримано багато експериментальних результатів. Проте, вони переважно відносяться до натурних умов або отримані в аеродинамічному каналі. І лише у трьох [16–18] працях визначено умови лабораторного лотку. Теоретичні дослідження [1–4, 6, 19] та інші хоча й випробували майже всі моделі турбулентності, питання “кращої” лишається відкритим, важливі явища, що супроводжують такий потік, лишаються незрозумілими.

У даній роботі виявлялися загальні властивості ЛПШ-потоків шляхом розгляду їх у найпростіших геометричних умовах плоского каналу, відповідні експериментальні дані перетворено до нових змінних, що дає теорію. У результаті отримано кілька універсальних висновків.

Постановка експерименту

Більшість дослідників приймають легкопроникну шорсткість (*санору*) у вигляді жорсткої (незмінної) структури — численних рядів стержнів вздовж потоку, як показано на рисунку 1. Таку ЛПШ раніше досліджували експериментально в аеродинамічній трубі [13–15], оскільки її легко створити. Організація потоку була такою, що ЛПШ знаходилася в умовах пограничного шару, тобто $U_h(x)$, $\tau_h(x)$ та $U_*(x)$ змінювалися вздовж потоку (тут $U_h(x)$ швидкість на рівні ЛПШ $z = h$, $\tau_h(x)$ тертя на

ньому, $U_*(x) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — динамічна швидкість для умов

пограничного шару, τ_0 — тертя на поверхні). Досвід показав [13–15], що виявити експериментальні константи з такого експерименту вкрай важко. Тому досліджували турбулентний потік у більш простій геометрії — в умовах напірного одновимірного потоку, який зазвичай виникає у плоскій трубі або у гідравлічному лотку. Висота “шару стержнів” (рисунк 3), складає 30–70% повної ширини потоку $2H$, у чому полягає оригінальність такої задачі. Експерименти [16–18] проведено саме в таких умовах, як схематично показано на рисунку 2.

Причиною руху рідини є поздовжній градієнт тиску

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p' = \text{const}. \text{ Така геометрія є однією з ключових}$$

у механіці рідини. За названих припущень треба знайти розподіли швидкості й тертя поперек потоку (оскільки

він одновимірний, то $\frac{\partial U}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial x} \equiv 0$) за заданими гео-

метричними розмірами каналу й ЛПШ H і h , властивостями рідини ρ і ν , градієнту тиску p' та іншими конструктивними параметрами ЛПШ. Тоді динамічна швидкість є незмінною вздовж каналу і визначається як

$$U_* = \sqrt{\frac{p'H}{\rho}}$$

Задача “з вільною поверхнею” у гідравлічному лотці є повністю аналогічною. Структура на рисунках 1 та 2, що вивчається, характеризується не лише висотою h , а також міделевою площею S_i її окремих елементів (пе-

решкод), їхнім коефіцієнтом опору $c_x \approx 10$ та щільністю (кількістю в одиниці простору). Щільність ЛПШ з стержнів можна характеризувати “щільністю встановлення” на площадці $S = ab$,

$$n^{(2)} = \frac{N}{S} = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y}, \quad 1/M^2$$

Доля простору, що зайнятий перешкодами у потоці, складає

$$\varepsilon = \frac{Df}{\Omega} = \frac{\pi}{4} \frac{2r}{\Delta_x} \frac{2r}{\Delta_y}$$

Оскільки у практичних задачах відстань між стержнями є не меншою за чотири їх діаметри $2r$, то отримаємо $\varepsilon < 6\%$. Це й дає підстави вважати такі структури “легкопроникними” для потоку.

Незважаючи на розмаїття ЛПШ-структур — ліс, водорості у потоці, краплі бризкальних систем охолодження, технічні структури тощо [1–12], у відповідних теоретичних роботах вводять один й той самий безрозмірний параметр, що характеризує гідродинаміку ЛПШ, а саме $A = \frac{1}{2} c_x S n^{(2)}$. Наступна теорія доводить, що це виправдано. Далі, всі експериментуючи з ЛПШ приймають “за інтуїцією”, що потік у загальмованій частині підко-

ряється “універсальному закону” $\frac{U}{U_h} = \hat{U}(\frac{z}{h}; A)$, тобто не залежить від жодного параметру задачі окрім A . Чи вірно це, повну відповідь може дати лише теорія. Розглянемо результати експериментів.

Аналіз експерименту

Найбільше відповідають даній постановці задачі експерименти *Dunn, Lopez, Garcia* [17], *Tsujimoto, Shimizu etc.* [18] та *Poggi, Porporato etc.* [16], які було проведено у відкритих гідравлічних лотках. На дні лотків було встановлено стержневі структури, як на рисунку 1. Висота вільної поверхні потоку складала лише 1,2–1,5 висоти структури h , тобто “шорсткість” набагато вище за класичну [21, 22]. Розміри лотків та ЛПШ-структур, досліджені витрати води у названих авторів різняться, і отже, маємо доволі багатий матеріал з 25 експериментів.

Експериментатори вимірювали розподіли величин $U(z)$, $\tau(z)$ як кореляцію $-\rho \overline{U'W'}$ та інші пульсаційні

характеристики $\overline{U'U'}(z)$ та $\overline{W'W'}(z)$. Виникає насамперед питання, що розуміти під “профілем” тієї чи іншої величини, зважаючи на дискретну структуру ЛПШ та, як наслідок, певну дисперсію вимірюваних значень. Згідно з [4, 6], вони мають представляти “середнє за простором”, задля чого проводили виміри на кількох вертикалях та обчислювали потім “середній” профіль. Звідси зрозуміло, які це були складні і тривалі експерименти. Лише дані [17] вдалося отримати у цифровому вигляді, а [16, 18] приходилося сканувати та обраховувати. У подальшому дані *Tsujimoto* нумеруються A11, A12, ..., A72, R71 та R72 у відповідності з їхніми позначеннями [18] та про-

водяться штриховою лінією; профілі *Garcia* позначаються як G1–G12 (нумерація з [18]) і проводяться пунктиром; профілі *Poggi* позначаються D1, D2, ..., D5 [16] та проводяться суцільною лінією. Крім того, задля виявлення залежностей від щільності ЛПШ $A = \frac{1}{2} c_x h S n$, дані розділені на 6 груп з близькими значеннями щільності. Маємо групи дослідів:

- $A = (1,61-1,67) \cdot 10^{-2}$ — (досліди D1, G6 та G7) — група № 1,
- $A = (3,24-3,63) \cdot 10^{-2}$ — (досліди D2, G10 та G11) — група № 2,
- $A = (6,43-6,45) \cdot 10^{-2}$ — (G1 -:- G5, D3) — група № 3,
- $A = 8,67 \cdot 10^{-2}$ — (A11, A12, A31, A32, A71 та A72) — група № 4,
- $A = (13,0-14,5) \cdot 10^{-2}$ — (D4, G8 та G9) — група № 5,
- $A = (20,5-25,0) \cdot 10^{-2}$ — (R41, R43 та D5) — група № 6.

Досліди у гідравлічному лотці, так само як у напірно-му каналі, відрізняються від таких у пограничному шарі тим, що:

- витрата рідини Q крізь перетин є постійною і легко вимірюється; за нею обчислюється середня швидкість

$$U_{cp} = \frac{Q}{L_y H};$$

- безпосередньо за перепадом тиску $p' = p_2 - p_1 / L_x$

знаходиться величина $\tau_w = -Hp' = \rho g H i$ (у каналі без ЛПШ вона трактується як тертя на стінці і, взагалі кажучи, добре корелює з такою, що можна отримати з пульсаційних вимірів);

- легко обчислюється коефіцієнт гідравлічного опору каналу λ , який є додатковою величиною для порівняння з теорією.

Первинний аналіз даних. Вихідні експериментальні дані представлено на рисунку 4. Слід звернути увагу на чіткий “злам” профілів тертя (праворуч) на границі ЛПШ $z = h$, що має місце в усіх експериментах і що збігається з розрахунковими розподілами. За цими даними обраховано і наведено у підпису до рисунку “локальне число Рейнольдса” (за радіусом перешкоди r). За його значеннями бачимо, що усередині ЛПШ може мати місце як ламінарний, так і турбулентний режими обтікання перешкод. Підрахувавши витрати рідини, отримуємо “глобальне число Рейнольдса” $Re' = \frac{2rU}{\nu}$; воно свідчить, що ламінарний режим усередині ЛПШ поєднується з турбулентним режимом для усього потоку. Зауважимо, що й внутрішній ламінарний режим водночас пов’язаний з вихроутвореннями усередині ЛПШ, як показано на рисунку 5. Рівень пульсацій, виміряних усередині ЛПШ, 12–45% підтверджує складність процесів у шарі перешкод. Проте, розмірні профілі рисунку 4 не дозволяють виявити хоч якісь закономірності. Для цього розглянемо окремо внутрішню й зовнішню частини потоку.

Внутрішня частина потоку. За вимірними величинами легко визначити “швидкість ковзання” $U_h = U(h)$

в кожному окремому експерименті. За допомогою цих величин внутрішні частини профілів осередненої швидкості представимо у координатах

$$\hat{U} = \frac{U}{U_h}, \quad \hat{z} = \frac{z}{h}. \quad (1)$$

Результат показано на рисунку 6, з якого видно, що усі експериментальні точки з близькими значеннями щільності A (з однаковими номерами-кольорами) містяться близько до одного профілю. Перетворення (1) звичайно проводять, через те що відповідні масштаби h та U_h з (1) “універсалізують” потік. Та чи є це закономірністю чи випадковістю експеримент не відповідає, визначити можна лише теоретично, як це показано далі.

На рисунку 6 слід звернути увагу, що внутрішні профілі швидкості відображають гальмуючу дію перешкод на потік. Вона тим сильніша, чим більша щільність (від 1 до 6). На цих профілях присутня точка перегину, де кривизна змінює знак. Теорія Раупаха, Фіннігана, Шоу [4, 6, 1] з її наявності виводить нестійкість руху з таким розподілом, породження хвиль Кельвіна–Гельмгольца та виникнення особливих когерентних вихорів.

Зовнішня частина потоку. Зовнішні частини профілів швидкості прийнято апроксимувати у вигляді логарифмічної залежності

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right), \quad (2)$$

в якій треба одночасно знаходити значення U та d і z_0 . Це доволі складна задача, де другий параметр (висота витиснення) та третій (параметр шорсткості) чутливі до похибок. Замість (2) пропонуємо будувати профілі відносного дефекту швидкості, для якого надамо вигляд на підставі (2)

$$\delta U(z) = \frac{U - U_h}{U_0 - U_h} = \frac{\ln\left(\frac{z-d}{h-d}\right)}{\ln\left(\frac{H-d}{h-d}\right)}, \quad (3)$$

де $U_0 = U(H)$ швидкість на осі каналу. Впливає, таким чином, що зовнішні частини профілів швидкості підкоряються зовсім іншій універсальності. Підгонка до теоретичних кривих (3) дозволяє легко визначити емпіричний параметр d ; він виявляється важливою характеристикою ЛПШ, потрібною для розрахунку турбулентного режиму [20]. Рисунок 7 надає теоретичні профілі дефекту швидкості (1), суцільні криві, та експериментальні точки; підбором d можна до них наблизитися.

Розподіли тертя над ЛПШ (праворуч, рисунок 4) є лінійними, як це було у каналі з гладкими стінками. Та рисунок 8 співставляє тертя з кореляцією $\langle U'W' \rangle|_h$ над шорсткістю $z = h$. Знайти розподіл тертя у середині ЛПШ в упорядкованому вигляді можна лише за допомогою теоретичних залежностей [20].

Теоретичне дослідження

Теоретичний опис потоку, що взаємодіє з тою чи іншою ЛПШ, отримують з рівнянь Нав’є–Стокса та не-

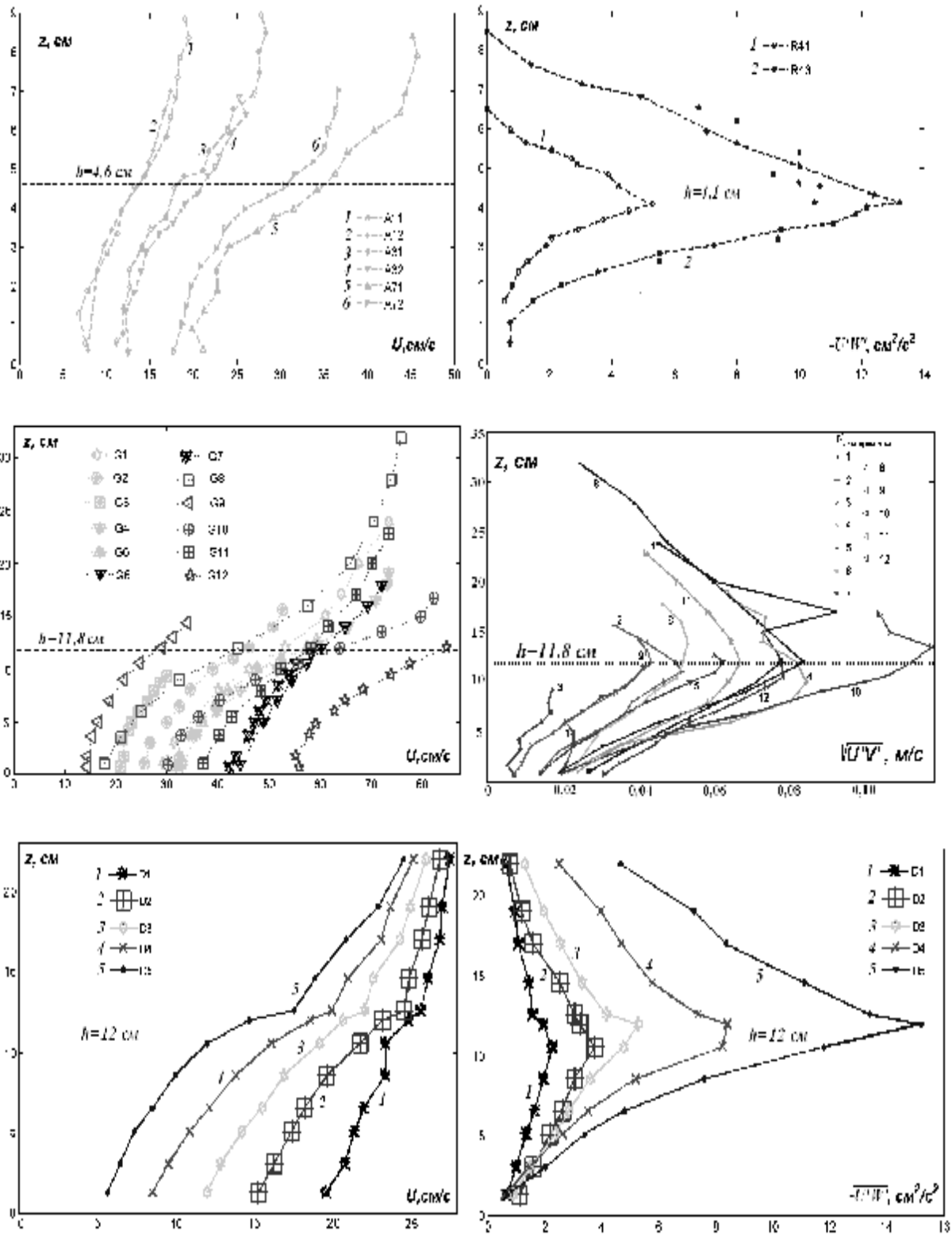


Рисунок 4 — Вихідні розмірні профілі осереднених швидкості (ліворуч) та турбулентного тертя (праворуч), що отримано в експериментах:

(а) Tsujimoto [22], серії A і R (локальні та глобальні числа $Re' = 100 \div 500$, $Re_{cp} = (8 \div 30) \cdot 10^3$);

(б) Garcia [21] ($Re' = 900 \div 4000$, $Re_{cp} = (56 \div 260) \cdot 10^3$);

(в) Roggi [20] ($Re' = 200 \div 900$, $Re_{cp} \approx 180 \cdot 10^3$).

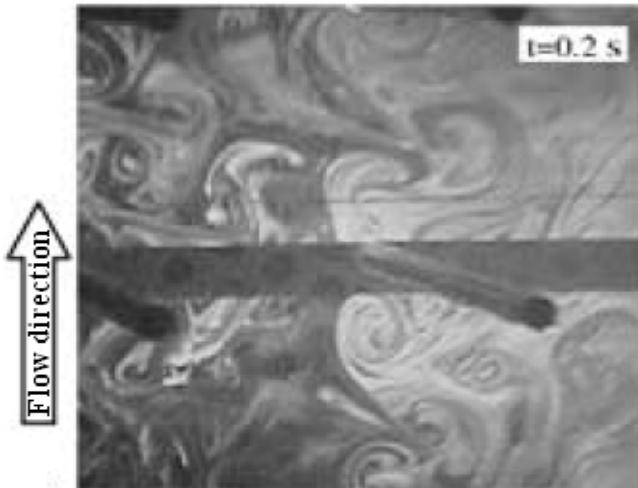


Рисунок 5 — Візуалізація Роджі [16] вихрового потоку в шарі ЛПШ

розривності, що діють між горизонтальними стінками каналу $0 \leq z \leq 2H$. ЛПШ на обох стінках однакова, тому задача симетрична і її розглядають в області $0 \leq z \leq H$. Та в її частині $0 \leq z \leq h$, що зайнята ЛПШ, рівняння Нав'є-Стокса включають "силові" члени, що моделюють дію ЛПШ, [1-15]. Рівняння суттєво спрощуються завдяки одновимірній геометрії потоку і приймають наступну форму

$$\frac{d\tau}{dz} = p' + \begin{cases} f, & z \in [0, h] \\ 0, & z \in (h, H] \end{cases} \quad (4)$$

Масова сила f відображає вплив ЛПШ та виникає як результат великої кількості впливів від окремих перешкод

$f = nF_{ed}$, де $n = n^{(2)}/h$ їх концентрація [1-4, 9-11, 13-15], а сила на одиничний циліндр F_{ed} потребує певних фізичних припущень.

Аналіз експерименту свідчить, що значення локального числа Рейнольдса Re' , який визначено за розміром окремої перешкоди, може відповідати як ламінарному, $Re' \in [100, 500]$, так і турбулентному режимам, $Re' \in [500, 2000]$. Сказане дає привід розглядати локальну силу, діючу на потік від окремої перешкоди як за квадратичним законом, так і за лінійним, а саме

$$F_{ed} = \begin{cases} -k\rho U, & Re' \text{ мале} \\ -\frac{1}{2}c_f \rho U^2 S_{ed}, & Re' \text{ велике} \end{cases} \quad (5)$$

Відповідно, отримуємо лінійний або квадратичний закон для масової сили f у рівнянні руху (4).

Граничні умови до (4) — звичайні, тобто прилипання рідини на дні та симетрія на осі потоку,

$$z=0 \quad U=0, \quad z=H \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

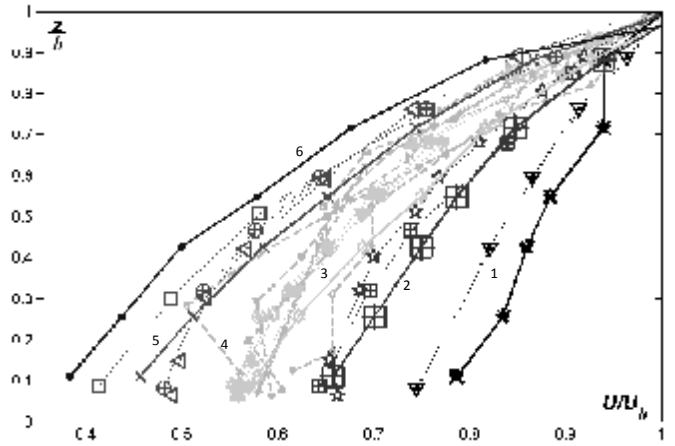


Рисунок 6 — Внутрішні частини профілів швидкості [16-18] у координатах (1) демонструють універсальність, тобто залежність лише від параметру A : із збільшенням номеру (тобто A) гальмування потоку сильніше

Очевидно, що потрібно також враховувати умову спряження "верхнього" розв'язку з "нижнім"

$$U(h-0) = U(h+0), \quad \tau(h-0) = \tau(h+0).$$

Формально-математичним аналізом виявляється, що для однозначного розв'язку "ламінарної" задачі цієї умови достатньо. Вона означає неперервність розподілу швидкості і тертя τ_z , та дозволяє "зламаний" характер останнього $\left. \frac{\partial \tau}{\partial z} \right|_{z=h-0} \neq \left. \frac{\partial \tau}{\partial z} \right|_{z=h+0}$, що підтверджується експериментом (рисунок 4). Для "турбулентної" задачі може стати потрібною ще одна [20].

Турбулентне тертя у потоці $\tau(z, U, \dots)$ задаємо за формулою Бусінеска

$$\tau = -\rho \langle U'V' \rangle = \rho \nu_T \frac{dU}{dz}, \quad (7)$$

та це потребує певної параметризації турбулентної (вихрової) в'язкості $\nu_T = \nu_T(z, U, \dots)$.

Моделі турбулентності над ЛПШ. У вільній від перешкод частині потоку $z \in [h, H]$ можна прийняти гіпотезу перемішування Прандтля

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{dU}{dz} \right|, \quad (8)$$

зі шляхом перемішування, що узагальнює формула Міліонщикова

$$l = (l_0 + \kappa(z-h)) \sqrt{1 - z/H}, \quad (9)$$

$$l(h) = l_0 \sqrt{1 - h/H} = l_h,$$

або за Карманом

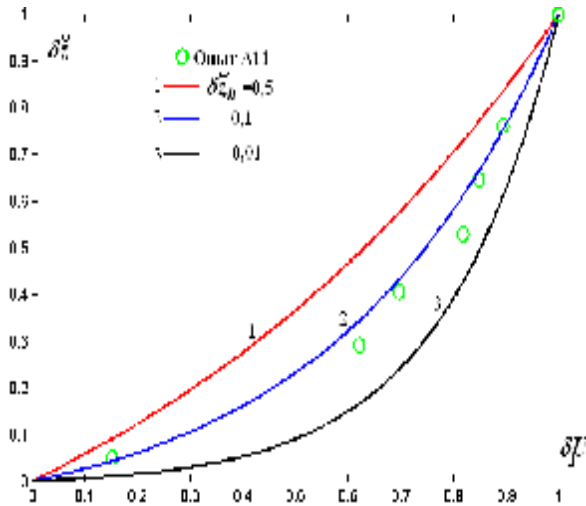


Рисунок 7 — Відносний дефект швидкості для досліду A11 [18] (точки) та підбір до них теоретичного профілі (криві) задля отримання d

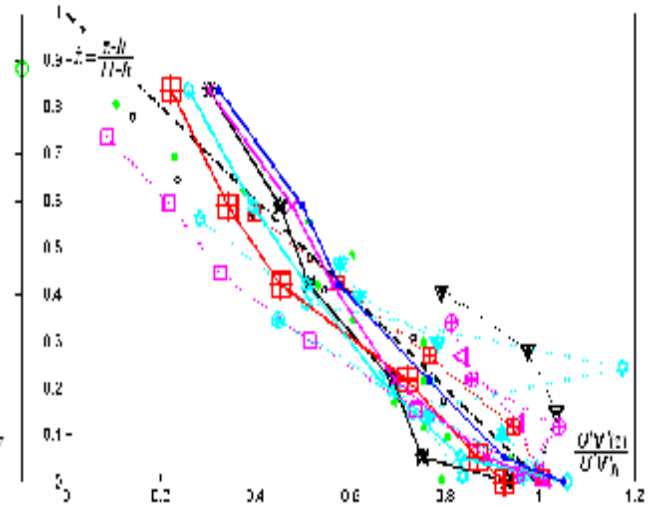


Рисунок 8 — Перевірка на лінійність зовнішніх частин профілів кореляції $\overline{U'W'}(z)$ для усіх експериментів

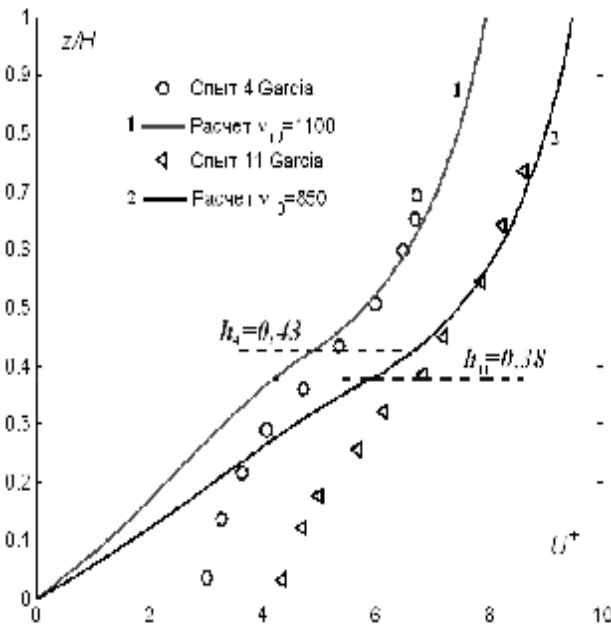


Рисунок 9 — Профілі швидкості через весь канал у порівнянні з експериментом

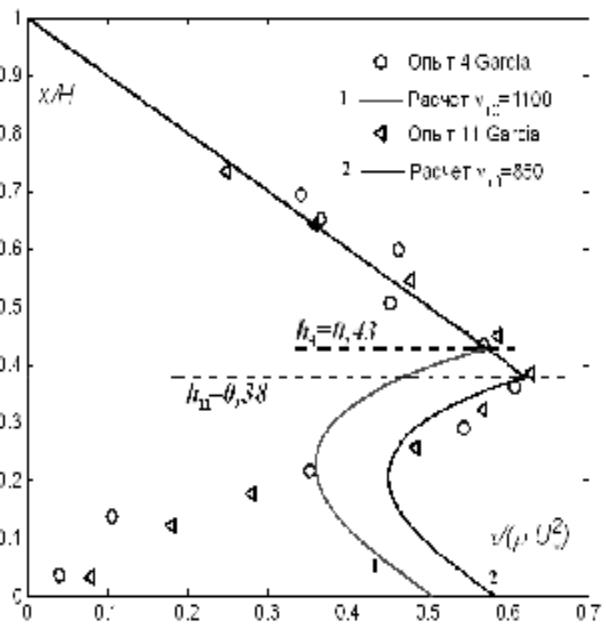


Рисунок 10 — Профілі терті через весь канал у порівнянні з експериментом

$$l = \kappa \frac{dU}{dz} \frac{dz}{d^2U} \quad (10)$$

Обидві моделі пристосовані до врахування потоку унизу.

Моделі турбулентності у середині ЛПШ. Перевіряємо два найпростіших з вже відомих замикань. Ordway [2,3] і Гасв [14,20,1] припускали сталість вихрової в'язкості

$$v_T = v_{T0}, \quad z \in [0, h]. \quad (11)$$

Наступним за складністю припущенням, таким, що досі ще використовується, є модель Іноце [23] про сталість шляху перемішування у середині загальмованого потоку

$$l = \text{const} = l_h, \quad z \in [0, h]. \quad (12)$$

Будь-яка з цих гіпотез внутрішнього потоку у поєднанні з кожною з наведених гіпотез зовнішнього потоку рывнянь (8)–(10) утворює закінчену модель турбулентності, що дозволяє повністю побудувати розв'язок

зок. Маємо загалом чотири моделі, які можна називати моделями Прандтля–*Ordway* (9),(11), Прандтля–*Inoue* (9),(12), Кармана–*Ordway* (10),(11) і Кармана–*Inoue* (10),(12) відповідно. Та мета дослідження не на тому, аби побудувати розв’язок математичної задачі, а на тому, щоб встановити загальні закономірності турбулентного потоку з ЛПШ, з’ясувати, наскільки відмінними є висновки різних моделей, та чи обґрунтовують вони ті універсальності, що виявляє експеримент. Модельні коефіцієнти l_h і v_{T0} виконують роль емпіричних сталих.

Важливо виявити також, як впливає на результат лінійність або квадратичність сили (5), що моделює ЛПШ. Це дає загалом вісім крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Головним інструментом є безрозмірний аналіз і пошук перетворень (масштабів задачі), що універсалізують задачу.

Масштаби потоку

Кожна з восьми задач включає не менше ніж 7 фізичних параметрів: H та h , ρ та ν , p' (замість градієнту тиску можна використати $Re_* = \frac{U_* H}{\nu}$), (або складові цього комплексу n , S та c_x або k) та одну з експериментальних сталих v_{T0} або l_h . Перехід до безрозмірних змінних дозволяє, як відомо, зменшити кількість суттєвих параметрів. Крім того, саме цей прийом дозволяє отримувати результат у найбільш узагальненому вигляді. Важливо, що водночас визначаємо фізично змістовні масштаби гідромеханічних процесів.

Для задач “каналних” та пограничного шару користуються динамічною швидкістю, що визначається як

$$U_* = \sqrt{-\frac{p' H}{\rho}}. \quad (13)$$

Можна сконструювати й інші масштаби швидкості. Маємо разом:

$$W = U_*, \quad W = U_l = -\frac{p' H^2}{2\rho\nu}, \quad W = U_h$$

де передостанній — швидкість на осі каналу за умов ламінарного режиму.

Геометричний масштаб можна обрати як один з

$$L = L_* = \frac{\nu}{U_*}, \quad L = H, \quad \text{або} \quad L = h$$

для потоку в середині ЛПШ. У залежності від вибору таких маємо різні безрозмірні змінні:

$$U^+ = \frac{U}{U_*}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_l}, \quad \hat{U} = \frac{U}{U_h}, \quad (14)$$

$$z^+ = \frac{z}{L_*}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \hat{z} = \frac{z}{h}. \quad (15)$$

Перевіримо, які з цих масштабів і змінних найбільше спрощують поставлені задачі, найбільше зв’язують параметри задачі у безрозмірні комплекси. Перш за все,

очевидно, що масштаби потоку над ЛПШ мають відрізнятися від таких для загальмованого потоку. Для гіпотези Кармана (4), (5), (8), (10) профіль осередненої швидкості отримуємо у вигляді

$$U^+(z) = \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{1-z} - C_1 \ln \left| \sqrt{1-z} + C_1 \right| + C_2 \right).$$

Але надати фізичного змісту параметрам C_1 і C_2 не вдається. Гіпотеза Прандтля (8), (9) веде до більш зручного розподілу

$$U^+ = U_h^+ + \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{z-h}{z_h} \right), \quad (16)$$

Новий параметр z_h нагадує коефіцієнт шорсткості z_0 , однозначно пов’язаний з гіпотетичною величиною

$l_h, z_h = l_h / \kappa H$. Незважаючи на різний вигляд профілів, що отримано, вони дають близькі результати протягом наближення ними експериментальних даних. Таким чином, жодна з названих гіпотез не дає переваги, як це було у гладких та звичайних шорстких трубах та каналах [21, 22]. Також обидві вони призводять до висновку про універсальність відносного дефекту швидкості, що у випадку залежності (16) набуває теоретично вигляду

$$\delta U(z) = \frac{\ln \left(1 + \frac{z-h}{z_h} \right)}{\ln \left(1 + \frac{H-h}{z_h} \right)}$$

та залежить від одного параметру.

Потік у середині ЛПШ виявляється залежним ще від типу ЛПШ, квадратичної чи лінійної залежності від швидкості потоку.

Квадратична ЛПШ. У більшості публікацій залежність локальної сили від швидкості обтікання перешкод вважають квадратичною (друга строчка в (5)). Розглянемо як приклад крайову задачу, що відповідає моделі *Ordway* (4)–(7), (11). При цьому вибір моделі над ЛПШ Прандтля чи Кармана значення не має. Із змінних (14) та (15) жодна пара не дає універсального рівняння.

Лише пара $\{\bar{z}, U^+\}$ призведе до універсального рівняння руху $\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{z}} = -1 + \frac{A}{h} (U^+)^2$, хоча й не універсальної реологічної залежності $\bar{\tau} = \frac{\nu_{T0}}{Re_*} \frac{dU^+}{d\bar{z}}$. Та можна показати, що у

внутрішніх змінних розв’язок виглядає як

$$\hat{U} = \frac{U}{U_h} = \Phi \left(\hat{z}; \left(\frac{A}{h} \right) \left(\frac{Re_*}{\nu_{T0}} \right)^2, \bar{h} \right),$$

тобто залежність від Re_* суттєво зменшена.

А як вплине на властивості розв’язку припущення *Inoue* (12)? Із змінних (14), (15) лише пара $\{\bar{z}, U^+\}$ при-

зведе до найпростіших рівнянь, які до того ж від Re^* не залежать:

$$l_h^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{dU^+}{dz} \right)^2 = -1 + \frac{A}{h} (U^+)^2, \quad \bar{\tau} = \bar{l}_h^2 \left(\frac{dU^+}{dz} \right)^2.$$

Звідси висновок, що внутрішні масштаби мають бути повністю універсальними для розподілів швидкості

$$\hat{U} = \frac{U}{U_h} = \Phi(\hat{z}; A, \bar{h}, \bar{l}_h).$$

Цей та попередній висновки отримано без розв'язування відповідних граничних задач, за допомогою математичного середовища MATLAB.

Лінійна ЛПШ₁. З експерименту відомо, що залежність сили (5) від локальної швидкості складніша, ніж квадратична. Тому має сенс розглянути залежності іншого виду, і в першу чергу — лінійну залежність. Дану модель ЛПШ, на відміну від попередньої, позначимо індексом "1". Головне для даної роботи питання — чи має місце універсальність внутрішніх змінних та які масштаби управляють таким потоком.

Перевірено, що змінні (14), (15), що підходили для ЛПШ₂, тепер не годяться. Найкращими масштабами є $\{H, U_{T0}\}$. У них гіпотеза Ordway (11) призведе до рівнянь

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\bar{z}} = -1 + A_1 \bar{U}, \quad \bar{\tau} = \frac{v_{T0}}{2} \frac{d\bar{U}}{d\bar{z}}.$$

Останні дають наступний аналітичний розв'язок:

$$\bar{U}(\bar{z}) = \frac{2\bar{\tau}_0}{\chi v_{T0}} \text{sh}(\chi \bar{z}) - \frac{1}{A_1} \text{ch}(\chi \bar{z}) + \frac{1}{A_1},$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \text{ch}(\chi \bar{z}) - \frac{1}{\chi} \text{sh}(\chi \bar{z}),$$

де $\chi = \sqrt{\frac{2A_1}{v_{T0}}}$. Дана задача для ЛПШ₁ має точний аналітичний розв'язок, на відміну від попередніх, які потребують наближеного чисельного підходу. Звідси легко отримати, що розподіли швидкості у внутрішніх координатах (1) універсальні.

Остаточні висновки з даного розділу полягають у тому, що зовнішній та внутрішній потоки у каналі з ЛПШ підкоряються різним масштабам. Деякі припущення щодо турбулентності доводять точно, що універсальність внутрішніх розподілів швидкості має місце. За інших припущень така універсальність менш виражена, вона зберігає певну залежність від Re^* .

Спряження розв'язків. Вище поділено потік на внутрішній, загальмований в ЛПШ, та на зовнішній, вільний від перешкод. Отже, як виглядає цільний розв'язок у повній області $z \in [0, H]$. При цьому розподіл швидкості $U(z)$ і тертя $\tau(z)$ мають бути неперервними на рівні ЛПШ $z=h$ згідно з наведеною вище умовою спряження.

Оскільки для двох потоків, що взаємодіють, використано різні безрозмірні змінні (14), (15), то треба визначитись із спільними масштабами для потоку в цілому.

Візьмемо першу пару з наведених. Рисунки 9 та 10 показують такі розподіли у порівнянні з двома експериментами [17]. У кожному з дослідів відносна висота ЛПШ була різною $\bar{h} = h/H$ і показана короткою штриховою лінією з

відповідним значенням \bar{h} . Емпірична стала згідно з моделлю Ordway-Прандтля, підібрана як $v_{T0} = 1100$. Отже, розрахунок загалом передає монотонне зростання швидкості та її перегин у шарі перешкод. Присутнє помітне випередження замірених значень у порівнянні з розрахунком. Це можна пояснити двома причинами: неточністю вимірів у повільному потоці та недоліками теорії, що не повною мірою відповідає реальним процесам з участю вихорів (рисунк 5) між перешкодами. Так само експериментальні профілі тертя відрізняються від розрахункових. На це є ще одна причина: під експериментальною величиною розумілася кореляція пульсацій $\langle U'V' \rangle$, яка лише наближено пов'язана з похідною швидкості згідно (7). Такі недоліки притаманні поки що всім теоретичним розрахункам ЛПШ-потоків [2-4]. Та для наближених розрахунків наведену теорію використати можна.

Висновки

На відміну від більшості робіт з ЛПШ (*canopy*), розглянуто найпростішу геометрію потоку і кілька алгебраїчних моделей турбулентності до неї, що пристосовують та узагальнюють відомі моделі інших авторів. Для перевірки останніх відібрано три наявних експериментальних роботи у гідравлічному лотці з високою системою стержнів (ЛПШ) біля дна, що найбільше відповідають постановці теоретичної задачі. Цей експериментальний матеріал підтверджує головні теоретичні висновки, зроблені на підставі теоретичних моделей. Виявилось, що будь-які ЛПШ такого роду дійсно можна характеризувати єдиним параметром щільності $A = \frac{1}{2} c_x h S n$. Теоретичні моделі свідчать про доцільність використання внутрішніх змінних (1), та водночас показують, що можлива їх неуніверсальність для малих локальних Re' у випадку ЛПШ₁, або навпаки для великих Re' (ЛПШ₂). З них впливає також універсальність (3) для зовнішньої частини потоку

Результати даної роботи мають практичне значення для технічної гідравліки, для розрахунку бризкальних систем охолодження [1,13,14], задач екології повітряного басейну та прибережної зони країни [24].

Література

1. Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry (Ye.A. Gayev and J.C.R. Hunt editors). // NATO Science Series, Springer Publ. — 2006. — Vol. 236, 350 p.
2. Дубов, А.С. Турбулентность в растительном покрове / А.С. Дубов, Л.П. Быкова, С.В. Маруніч. — Л.: Гидрометеиздат, 1978. — 180 с.
3. Raupach, M.R., Thom A.S. Turbulence in and above plant canopies // Ann. Review Fluid Mech. — 1981. — Vol. 13, pp. 97—129.

4. Finnigan, J. Turbulence in Plant Canopies // *Ann. Review Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 32, pp. 519 — 571.
5. Britter, R.E., Hanna S. R. Flow and dispersion in urban areas // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 2003.- Vol. 35, 469 — 496.
6. Raupach, M.R., Finnigan J.J., Brunet Y. Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies: The mixing layer analogy // *Bound.-Layer Meteor.* — 1996. — Vol. 78, pp. 351 — 382.
7. Kouwen, N., Unny, T.E., Hill H.M. Flow retardance in vegetated channels. // *J. Irrig. and Drain., Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engr.* — 1969. — No. 2.
8. Соколов, Ю.Н. Уравнения наклона гибкой растительности в связи с расчетом гидравлического сопротивления на поймах. — В кн. *Динамика и термика рек и водохранилищ.* — М.: Наука, 1984. — С. 72 — 85.
9. Nepf, H.M. Flow Over and Through Biota, Ch. 2 in: "Treatise on Estuarine and Coastal Science", 2011, Elsevir Pu., pp. 6 — 27.
10. Silva, R.A., de Lemos, M.J.S. Numerical analysis of the stress jump interface condition for laminar flow over a porous layer // *Numerical Heat Transfer.* — 2003. — Part A, 43, pp. 603—617.
11. Abu-Hijleh, B.A., Al-Nimr, M.A. The effect of the local inertial term on the fluid flow in channels partially filled with porous material // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2001. — Vol. 44, pp. 1565—1575.
12. Tachie, M.F., James, D.F., Currie, I.G. Velocity measurements of a shear flow penetrating a porous medium // *J. Fluid Mech.* — 2003. — Vol. 493, pp. 319—343.
13. Гаев, Е.А. Турбулентные течения, сформированные проницаемой шероховатостью / Е.А. Гаев, В.В. Меленевский, И.К. Никитин [и др.] *Механика неоднородных и турбулентных потоков; под редакцией акад. В.В. Струминского.* — М.: Наука. 1989. — С. 107—115.
14. Гаев, С.О. Моделі легкопроникної шорсткості для задач гідромеханіки і теплофізики. Дисертація доктора техн. наук, К.: ІГМ НАН України, 2000.
15. Гаев Е. Исследование неоднородной проницаемой шероховатости в аэродинамическом канале / Е. Гаев, Э. Сэйвори, Н. Той. *Прикладна гідромеханіка.* — 2000. — Вып. 2(74), № 1. — С. 10 — 19.
16. Poggi, D., Porporato, A., Ridolfi, L., Albertson, J.D., Katul, G.G. The effect of vegetation density on canopy sub-layer turbulence // *Boundary-Layer Meteorol.* — 2004. — Vol. 111, pp. 565 — 587.
17. Dunn, C., Lopez, F., Garcia, M. Mean flow and turbulence in a laboratory channel with simulated vegetation. — *Civil Engineering Studies. Hydraulic Engineering Series, No. 51, UILU-ENG 96-2009, Dept. of Civil Engineering: Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, Ill., 1996.* — 162 p.
18. Tsujimoto, T., Shimizu, Y., Kitamura, T., Okada, T. Turbulent open-channel flow over bed covered by rigid vegetation // *J. Hydroscience and Hydraulic Engineering.* — 1992. — Vol. 10, pp. 13 — 25.
19. Головня, Б.П. Расчет турбулентного течения в канале с препятствиями. // *Вісник Черкаського університету, Випуск 173.* — 2009. — С. 16 — 26.
20. Гаев, Е.А. Алгебраическая модель турбулентности для трубы с легко проницаемой шероховатостью на стенках / Е.А. Гаев, О.М. Бердник // *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и ин-формационных технологиях, ХНУ им. Каразина.* — 2012. — С. 85 — 95.
21. Лойцянский, Л.Г. *Механика жидкости и газа.* М.: Наука, 1973. — 847 с.
22. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1969. — 742 с.
23. Inoue, E. On the Turbulent Structure of Air Flow within Crop Canopies // *J. Meteorol. Soc. of Japan.*- 1963. — Vol. 41, No. 6, pp. 317-325.
24. Звіт "Методи створення штучних пристінних та суперкавітаційних течій з прогнозованими властивостями".- Держ бюджетна наук. робота ІГМ НАНУ (Наук. керівник чл.-кор. Савченко Ю.М.), Київ, 2013. № держ. реєстрації 0110U002497.

References

1. Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry (*Ye.A. Gayev and J.C.R. Hunt editors*). // *NATO Science Series, Springer Publ.* — 2006. — Vol. 236, 350 p.
2. Dubov, A.S., Bikova, L.P., Marunich S.V. Turbulentnost v rastitelnom pokrove / — L.: *Gidrometeoizdat*, 1978. — 180 с.
3. Raupach, M.R., Thom A.S. Turbulence in and above plant canopies // *Ann. Review Fluid Mech.* — 1981. — Vol. 13, pp. 97—129.
4. Finnigan, J. Turbulence in Plant Canopies // *Ann. Review Fluid Mech.* — 2000. — Vol. 32, pp. 519 — 571.
5. Britter, R.E., Hanna S. R. Flow and dispersion in urban areas // *Ann. Rev. Fluid Mech.* — 2003.— Vol. 35, 469 — 496.
6. Raupach, M.R., Finnigan, J.J., Brunet, Y. Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies: The mixing layer analogy // *Bound.-Layer Meteor.* — 1996. — Vol. 78, pp. 351 — 382.
7. Kouwen, N., Unny, T.E., Hill, H.M. Flow retardance in vegetated channels. // *J. Irrig. and Drain., Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engr.* — 1969. — No. 2.
8. Sokolov, Yu.N. Uravneniuya naklona gibkoy rastitelnosti v sviazy s raschotom gidravlicheskogo soprotivleniya na poimakh. — *Dinamika i termika rek i vodokhranilistch*. — М.: Nauka, 1984.. — S. 72 — 85.
9. Nepf, H.M. Flow Over and Through Biota, Ch. 2 in: *Treatise on Estuarine and Coastal Science*, 2011, Elsevir Pu., pp. 6 — 27.
10. Silva, R.A., de Lemos, M.J.S. Numerical analysis of the stress jump interface condition for laminar flow over a porous layer // *Numerical Heat Transfer.* — 2003. — Part A, 43, pp. 603—617.
11. Abu-Hijleh, B.A., Al-Nimr, M.A. The effect of the local inertial term on the fluid flow in channels partially filled with porous material // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2001. — Vol. 44, pp. 1565 — 1575.
12. Tachie, M.F., James, D.F., Currie I.G. Velocity measurements of a shear flow penetrating a porous medium // *J. Fluid Mech.* — 2003. — Vol. 493, pp. 319 — 343.
13. Gayev, Ye.A., Melenevsky, V.V., Nikitin, I.K. e.a. Turbulentnii techeniya, sformirivaniy pronitsaemoy shero-khovatostyu. — *Mekhanika neodnorodnikh i turbulentsnikh potokov.* — М.: Nauka. 1989. — s. 107 — 115.
14. Gayev, Ye.A. Modeli legkoproniknoi shorstkosty dla zadach gidromekhaniki i teplofiziki. *Disertaziya doctora tekhn. nauk, K.: IGM NAN ukraini*, 2000.

15. Gayev, Ye.A., Savory, E., Toy, N. Issledovaniye neodnorodnoy pronitsayemyy sherokhovatosti v aerodinamicheskom kanale // Prikladna gidromekhanika. — 2000. — Iss. 2(74), № 1. — s. 10 — 19.

16. Poggi, D., Porporato, A., Ridolfi, L., Albertson, J.D., Katul, G.G. The effect of vegetation density on canopy sub-layer turbulence // Boundary-Layer Meteorol. — 2004. — Vol. 111, pp. 565 — 587.

17. Dunn, C., Lopez, F., Garcia, M. Mean flow and turbulence in a laboratory channel with simulated vegetation. — Civil Engineering Studies. Hydraulic Engineering Series, No. 51, UILU-ENG 96-2009, Dept. of Civil Engineering: Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, Ill., 1996. — 162 p.

18. Tsujimoto, T., Shimizu, Y., Kitamura, T., Okada, T. Turbulent open-channel flow over bed covered by rigid vegetation // J. Hydrosience and Hydraulic Engineering. — 1992. — Vol. 10, pp. 13—25.

19. Golovnya, V.P. Raschot turbulentnogo techeniya v kanale s prepiatstvuyami // Visnik Cherkaskogo univeritetu, Vipusk 173, 2009, s. 16—26.

20. Gayev, Ye.A., Berdnik, O.M. Algebraicheskaya model turbulentnosti dla trubi s legkopronitsayemyy sherokhovatostyu na stenkakh // Sovremennii problemi matematiki I ee prolozheniya v estestvennikh naukakh I informazionnikh tehnologiyakh, KhNU im. Karazina. — 2012. — S. 85—95.

21. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.

22. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969. — 742 с.

23. Inoue, E. On the Turbulent Structure of Air Flow within Crop Canopies // J. Meteorol. Soc. of Japan. — 1963. — Vol. 41, No. 6, pp. 317—325.

Надійшла 14.01.2014 року

УДК 532.54

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ В КАНАЛЬНОМ ПОТОКЕ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Е.А. Гаев

Для одномерной геометрии потока проанализированы недавние экспериментальные данные трех различных авторов (Tsujimoto e.a. 1992, Dunn, Lopez, Garcia M. 1996, Poggi e.a. 2004) для турбулентного потока в гидравлическом лотке с протяженной системой высоких стержней у дна (ЛПШ). Выражено сомнение относительно универсальности использованных ими внутренних масштабов. Обработка эксперимента не может ответить на этот вопрос полностью, необходимо теоретическое рассмотрение.

Предложены две простых алгебраических гипотезы для турбулентности внутри заторможенного потока, и столько же для потока над ней. Влияние ЛПШ моделируется посредством распределенной массовой силы. Последняя принимается пропорциональной квадрату локальной

скорости при значительных числах Рейнольдса Re' , либо линейно зависящей от скорости при малых Re' . Так возникают две модели для собственно ЛПШ, ЛПШ₂ и ЛПШ₁ соответственно. Комбинации гипотез для внешнего (свободного) потока, для внутреннего и для слоя препятствий дают 8 различных математических моделей для исследуемого ЛПШ-потока, которые изучаются преимущественно анализом размерностей. Он позволяет найти несколько масштабов длины и скорости; некоторые из них „универсализируют“ ЛПШ₂-течение, другие — ЛПШ₁-течение. Эти теоретические выводы подтверждаются данными эксперимента, но все же точность и неполнота последних не позволяет предпочесть какую-либо из моделей другим. Работа имеет практическое значение для гидравлики, расчета брызгальных систем, экологических проблем атмосферных течений и прибрежных водных течений.

Ключевые слова: легкопроникающая шероховатость, течения над лесом, в гидравлических лотках, турбулентности внутри заторможенного потока.

UDK 532.54

ANALYSES OF AN EXPERIMENT WITH EASILY PENETRABLE ROUGHNESS IN PLANE DUCT AND RELEVANT TURBULENCE MODELS

Ye.A. Gayev

For one dimensional flow geometry, recent experimental data of three different authors for turbulent flow in a hydraulic flume with an extended system of tall rods near bottom (EPR) is analyzed (Tsujimoto e.a. 1992, Dunn, Lopez, Garcia M. 1996, Poggi e.a. 2004). With regard to internal flow scales they used, a certain criticism has been expressed and problem of flow universal features formulated. Processing of the experiment cannot justify all the hypothesis completely, a theoretical consideration is so required. Two simplest algebraic hypotheses for the turbulence within the obstructed layer, i.e. the EPR, and two over the latter have been suggested. Effects of the obstructions within the EPR are modeled by means of a distributed force term. The latter is taken proportional to local velocity squared for high local Reynolds numbers Re' , and linear for small Re' such obtaining two models for actually the EPR (EPR₂ and EPR₁ correspondingly). Combination of hypothesis for the external flow, for the internal one and for the EPR itself produces eight mathematical models that are investigated from mainly similarity analysis. Several length and velocity scales have been found; some make the EPR₂ models universal, and another the EPR₁. All the theoretical conclusions are confirmed by the experiment, but its comprehension and accuracy do not allow yet to prefer any of them. The work has practical meaning for engineering hydraulics, spraying cooler performance as well as for ecological problems of atmospheric air flows and coastal water flows.

Key words: easily penetrable roughness, in a hydraulic flume near bottom, turbulent flow in to a hydraulic flume.