

## ОСОБЕННОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ СНАРУЖИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА С ДИСКРЕТНО ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

## FEATURES OF INVESTIGATION OF SECONDARY OUTFLOWS OF ROTATING CYLINDER WITH DISCRETELY PERMEABLE SURFACE

*На основе численного моделирования турбулентного течения между вращающимся внутренним и неподвижным внешним цилиндрами исследованы особенности возникновения центробежной неустойчивости в случае вынужденного радиального потока через кольцевую область в двух возможных направлениях. Исследования выполнены при радиальных числах Рейнольдса до  $10^3$  и окружных числах Рейнольдса до  $10^6$ . Рассмотрены варианты конструкции вращающегося цилиндра с протеканием жидкости через всю его поверхность и через пористые щели в нем (дискретно проницаемая поверхность). Подтверждена возможность стабилизации от возникновения вторичных течений за счет радиального потока внутрь во всем диапазоне вращательных чисел Рейнольдса, что рассматривался для обеих конструкций внутреннего цилиндра. В случае радиального потока наружу стабилизация во всем диапазоне вращательных чисел Рейнольдса возможна лишь при условии подачи жидкости через всю поверхность вращающегося цилиндра. Стабилизация радиальным потоком наружу через пористые щели возможна только при вращательных числах Рейнольдса, меньших чем  $10^3$ .*

*Ключевые слова: турбулентные течения, вращающиеся цилиндры, радиальный поток, устойчивость, возможность стабилизации*

### Характеристика проблемы и задачи исследования

Течение жидкости (газа) между вращающимися соосными цилиндрами представляет собой одну из классических задач современной гидродинамики. Ее теоретическое значение во многом определяется тем, что в рамках простой геометрии проявляется важнейшее свойство потоков во вращающихся системах – центробежная потеря устойчивости с возникновением когерентных крупномасштабных вихревых структур. Возникающие первоначально вихри Тэйлора (ВТ) могут претерпевать целый ряд трансформаций и в значительной степени определяют такие важные в практических приложениях характеристики, как интенсивность обмена импульсом и теплотой в потоках, которые широко применяются во многих технических устройствах и технологических процессах.

Течению между непроницаемыми цилиндрами при отсутствии вынужденного протока жидкости через кольцевую область (замкнутая задача Куэтта–Тэйлора) посвящено огромное число публикаций, от знаменитой пионерской работы Тэйлора [1], заложившей основы линейного анализа центробежной устойчивости, до современных попыток прямого численного моделирования (DNS) турбулентных режимов с вторичными течениями [2–4]. Для этой задачи получены экспериментальные результаты, позволяющие оценивать достоверность теоретичес-

ких и расчетных данных, раскрывающих подробности характерных физических процессов [5–7].

В многообразных практических приложениях встречаются также модификации классического течения Куэтта–Тэйлора (ТКТ), которые отличаются геометрическими особенностями либо наложенным вынужденным движением жидкости через кольцевую область. Дополнительные факторы существенно осложняют как теоретический анализ, так и экспериментальное исследование соответствующих течений. Поэтому полученные для них результаты недостаточно полны, обобщены и систематизированы.

Одной из таких модифицированных задач является течение между вращающимся внутренним и неподвижным внешним цилиндрами с вынужденным радиальным движением жидкости через их проницаемые поверхности. На этой схеме в частности основан принцип ротационного фильтрования, когда взвешенные примеси отделяются при помощи вращающейся цилиндрической пористой мембраны. Многочисленные ссылки на работы, посвященные прикладным аспектам и сферам применения такой схемы фильтрования, приведены в работе [8]. В известных исследованиях, посвященных ТКТ с наложенным радиальным потоком, путем подробного численного моделирования изучались только ламинарные режимы течения. Рассматривался только случай равномерно-

го протекання жидкості через всю поверхню вращаючогося циліндра.

Целью настоящей работы является исследование особенностей проявления центробежной неустойчивости в тех случаях, которым при отсутствии вынужденного радиального потока соответствуют не только ламинарные, но и турбулентные вихревые режимы течения. Предполагается также рассмотреть случай, когда не вся поверхность вращающегося цилиндра является проницаемой.

**Постановка задачи**

Будем рассматривать течение между вращающимся внутренним цилиндром и неподвижным внешним с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Через вращающийся цилиндр жидкость протекает сквозь равномерно расположенные пористые продольные щели числом  $n_b$  и шириной  $b$ . Всю поверхность внешнего неподвижного цилиндра будем считать равномерно проницаемой.

Допущение о периодичности течения в кольцевом зазоре в окружном направлении позволяет уменьшить размер вычислительной сетки, что весьма актуально для расчета трехмерных турбулентных течений с низкорейнольдсевым моделированием пристеночной области. Такой подход успешно применен рядом авторов при расчете ТКТ с гладкими цилиндрами [2–4]. Кроме окружной периодичности мы также будем использовать условие периодичности в осевом направлении.

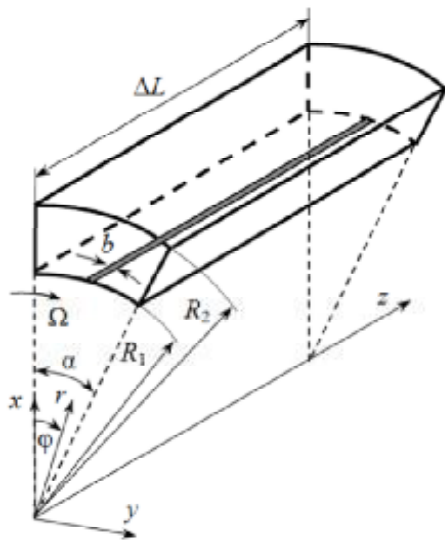


Рисунок 1 — Схема расчетного периодического фрагмента области течения

Таким образом, течение рассматривается в изображенном на рисунке 1 периодическом фрагменте кольцевой области в системе координат, вращающейся вместе с внутренним цилиндром. Для основных размеров нами приняты следующие значения:  $R_1 = 0,11$  м,  $R_2 = 0,145$  м,  $\Delta L = 0,735$  м,  $n_b = 16$ ,  $b = 0,0072$  м, что дает

относительную ширину зазора  $\tilde{d} = 0,318$  ( $\eta = 0,759$ ), относительную длину  $\Gamma = 2,1$  и угловой размер  $\alpha = \pi/8$  расчетного фрагмента, а также величину коэффициента скважности поверхности внутреннего цилиндра  $k_{op} = 1/6$ .

Как один из вариантов мы будем рассматривать также полностью проницаемую поверхность внутреннего цилиндра, используя при этом осесимметричную формулировку разрешающих уравнений.

В качестве исходных уравнений рассматриваются осредненные по Рейнольдсу уравнения переноса количества движения и неразрывности несжимаемой ньютоновской жидкости. В тензорной записи эти уравнения, сформулированные для абсолютной скорости жидкости во вращающейся с внутренним цилиндром декартовой системе координат, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_{rj} U_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) - \rho \varepsilon_{ijk} \Omega_k U_j, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j) = 0. \tag{2}$$

Здесь  $\rho, \mu$  — плотность и динамическая вязкость жидкости,  $p$  — среднее давление,  $U_i = (U_x, U_y, U_z)$  — проекции средней абсолютной скорости  $\mathbf{U}$  на оси  $(x, y, z)$  подвижной системы координат;  $\Omega_k$  — проекции вектора угловой скорости вращения внутреннего цилиндра  $\mathbf{\Omega}$  (в рассматриваемом случае  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \Omega_3 = \Omega$ );  $\varepsilon_{ijk}$  — символ Леви–Чивиты. Относительная средняя скорость, по которой вычисляется конвективный поток, определяется выражением  $\mathbf{U}_r = \mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор от оси вращения. Компоненты пульсационной скорости отмечены штрихами, черта сверху обозначает операцию осреднения по времени. Мы также будем рассматривать проекции скорости  $\mathbf{U}$  на оси цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ , обозначая их  $V, U, W$  соответственно.

Для замыкания уравнений (1), (2) будем использовать модель переноса напряжений Рейнольдса (RSM). По результатам сравнительного тестирования [10] эта модель продемонстрировала хорошее совпадение с экспериментальными данными, как по распределению осредненной скорости и осевого момента количества движения, так и по значениям сравниваемых характеристик пульсационного движения (турбулентности). Более того, значения,

рассчитанные с применением RSM, коррелируют с экспериментом в среднем не хуже, чем данные, полученные на основе LES и DNS.

Уравнения переноса напряжений Рейнольдса рассматриваются в следующей записи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_{rk} \overline{u'_i u'_j}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right) - \rho \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \\ & - \rho \Omega_k (\varepsilon_{jkm} \overline{u'_i u'_m} + \varepsilon_{ikm} \overline{u'_j u'_m}) - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \Pi_{ij} - D_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Точные выражения для трех последних слагаемых, которые требуют модельного представления, мы здесь не приводим. Они даны, например, в работе [10].

Для представления турбулентного диффузионного члена нами использована обобщенная градиентно-диффузионная модель Дэйли и Харлоу [11] с упрощением, соответствующим скалярному представлению коэффициента турбулентной диффузии. Этот подход приводит к выражению

$$C_{ijk} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k},$$

где  $\sigma_k = 0,82$ , а турбулентная вязкость определяется так же, как при использовании  $k - \varepsilon$  модели:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = 0,09. \quad (4)$$

В формуле (4)  $k = 1/2 (\overline{u'_i u'_i})$  — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, а  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}$  — скалярная скорость ее диссипации.

Диссипативный член в (3) из соображений локальной изотропии на малых масштабах диссипирующих вихрей моделируется выражением

$$D_{ij} = \frac{2}{3} \rho \varepsilon \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера.

Моделирование члена  $\Pi_{ij}$ , обусловленного корреляцией пульсаций давления и тензора деформации поля скоростей пульсационного движения (pressure-strain correlation), выполнено на основе модели Лаундера, Риса и Роди, описанной в [10]. Для учета низкорейнольдсовых эффектов в пристеночной области некоторые модельные константы модифицированы на основе работы [12].

Значения турбулентной кинетической энергии  $k$  вычисляются через нормальные напряжения Рейнольдса. Для определения скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  во всей области решается дифференциальное уравнение переноса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \varepsilon U_{ri}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \\ & - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (5)$$

аналогичное соответствующему уравнению в стандартной  $k - \varepsilon$  модели, при значении констант:  $\sigma_\varepsilon = 1$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ . Уравнение (5) обычно не используют вблизи стенок, где масштабы энергонесущих и диссипирующих вихрей сближаются. Поэтому в пристеночной области с преобладающим влиянием вязкости вместо значений  $\varepsilon$ , определяемых решением уравнения (5), принимаются значения, которые рассчитываются по соотношению

$$\varepsilon = k^{3/2} / L_\varepsilon, \quad (6)$$

где характерный линейный масштаб определяется соотношениями

$$L_\varepsilon = y^* C_L (1 - \exp(-Re_t/A)), \quad C_L = \kappa C_\mu^{-3/4}, \quad A = 2C_L.$$

Здесь  $y^*$  — расстояние до ближайшей стенки,  $\kappa = 0.4187$  — постоянная Кармана, а константа  $C_\mu$  определена вторым равенством (4). Турбулентное число Рейнольдса вычисляется по расстоянию до стенки  $Re_t = y^* \sqrt{k} / \nu$ . Соотношение (6) применяется в области, где  $Re_t < 200$ . В остальной части потока скорость диссипации турбулентной энергии определяется решением уравнения (5). Чтобы избежать скачка при переходе от значений  $\varepsilon$ , определяемых алгебраическим равенством (6), к значениям, определяемым уравнением переноса (5), используется сглаживающая функция, сращивающая оба эти решения.

Мы рассматриваем случай равномерного распределения нормальной (радиальной) компоненты скорости жидкости по всей поверхности внешнего неподвижного цилиндра и по поверхности щели во вращающемся внутреннем цилиндре. Это приводит к следующим граничным условиям по скорости:

$$V = \eta V_1, \quad U = W = 0 \quad (r = R_2), \quad (7)$$

$$V = V_1 / k_{op}, \quad U = U_1, \quad W = 0 \quad (r = R_1, \text{ щели}), \quad (8)$$

$$V = 0, \quad U = U_1, \quad W = 0 \quad (r = R_1, \text{ между щелями}). \quad (9)$$

В варианте с полностью проницаемой поверхностью внутреннего цилиндра вместо условий (8),(9) имеем

$$V = V_1, \quad U = U_1, \quad W = 0 \quad (r = R_1). \quad (10)$$

Заметим, что с физической точки зрения равномерное распределение радиальной скорости вдоль проницаемых участков поверхности оправдано в случаях, например, когда эти участки выполнены из пористого материала с достаточным гидравлическим сопротивлением.

Для уравнений (6) переноса напряжений Рейнольдса на поверхностях обоих цилиндров используются граничные условия

$$\partial(\overline{u'_i u'_j})/\partial n = \partial(\overline{u'_i u'_j})/\partial r = 0 \quad (r = R_1; r = R_2). \quad (11)$$

Использование условий (11) для проницаемых (пористых) участков граничной поверхности следует рассматривать как допущение. Его строгое обоснование для различных конкретных случаев требует отдельного серьезного исследования. То же самое можно сказать и о применении равенства (6) в непосредственной близости к пористой поверхности.

В плоскостях  $z = 0, z = \Delta L$  (рисунок 1) для всех зависимых переменных приняты граничные условия, соответствующие осевой периодичности. На границах  $\varphi = 0, \varphi = \alpha$  задавались условия, устанавливающие окружную (азимутальную) периодичность течения.

### Характеристика и верификация численного решения

Для численного решения область течения (рисунок 1) была разбита на расчетные ячейки структурированной гексаэдрической сеткой. В осевом и азимутальном направлениях использован постоянный шаг, а в радиальном направлении шаг сетки сгущается вблизи поверхностей обоих цилиндров. После исследования влияния размера сетки на результаты расчетов для дальнейшего использования была принята сетка с числом узлов  $N_r = 82$ ,

$N_\varphi = 37, N_z = 61$  в радиальном, азимутальном и осевом направлениях соответственно. При этом максимальное расстояние от центра пристеночной ячейки до ближайшей стенки, выраженное через значение универсальной пристеночной координаты, находится в пределах  $\tilde{r}_{\max}^+ < 1$  для всех рассматриваемых случаев. В принятых нами обозначениях

$$\tilde{r}^+ = |r - R_i| U_{\tau i} / \nu, \quad U_{\tau i} = \sqrt{(\tau_{r\varphi})_i / \rho},$$

где  $U_{\tau i}$  — динамическая скорость (скорость трения),  $(\tau_{r\varphi})_i$  — касательное напряжение на стенке, а индекс  $i$  принимает значение  $i = 1$  для внутреннего цилиндра и  $i = 2$  для внешнего цилиндра.

Процедура численного решения разрешающих уравнений (1), (2), (3), (5) основана на методе конечных объемов. Для дискретизации конвективных слагаемых использована противопоточная интерполяционная схема 3-го порядка QUICK [13] с зависимым от решения ограничителем потока для контроля монотонности и предотвращения нефизических осцилляций. Для представления диффузионных членов в уравнениях переноса примене-

на центрально-разностная схема второго порядка, описанная в работе [14]. Учет уравнения неразрывности для взаимосвязанной коррекции полей давления и скорости осуществлен на основе схемы SIMPLER [15].

Аппроксимация производных по времени выполнена на основе трехслойной разностной схемы 2-го порядка. Для перехода на следующий временной шаг используется неявная схема. Однако слагаемые источникового типа в уравнениях переноса трактуются явным образом. Явным образом трактуются также узловые значения расчетных величин в дискретном представлении конвективных и диффузионных членов, которые относятся к ячейкам, не являющимся соседними с той, для которой записано разностное соотношение. Эти значения повышают порядок аппроксимации. Их явная трактовка при интегрировании по времени уменьшает ширину ленты матрицы коэффициентов системы дискретных уравнений.

Для контроля сходимости решения в процессе итераций используется техника нижней релаксации. Решение систем линейных уравнений осуществляется итерационным методом Гаусса–Зейделя с возможностью распараллеливания вычислений.

Исходные начальные условия соответствовали неподвижной жидкости при отсутствии вращения внутреннего цилиндра и вынужденного радиального потока. Угловая скорость в дальнейшем повышалась ступенчато и при каждом ее значении рассматривались варианты с различными величинами характерной радиальной скорости  $V_1 = Q / (2\pi R_1 \Delta L)$  ( $Q$  — секундный объемный расход жидкости через поверхности цилиндров). При малых значениях  $\Omega$  расчеты вначале выполнялись для ламинарного течения.

Для обобщения результатов по влиянию угловой скорости в случае неподвижного внешнего цилиндра вместо числа Тэйлора часто используется число Рейнольдса, определяемое по ширине зазора между цилиндрами:

$Re_d = U_1 d / \nu$ , где  $U_1 = \Omega R_1$ . Однако в монографии [16] показано, что при достаточно интенсивном вынужденном радиальном потоке ширина щели перестает влиять на профиль азимутальной скорости в докритическом течении. Это объясняется тем, что изменение азимутальной скорости локализуется в пограничном слое на внутреннем цилиндре (при потоке внутрь) или у поверхности внешнего цилиндра (при потоке наружу). Поэтому вместо  $Re_d$  можно использовать вращательное число Рейнольдса  $Re_\varphi = U_1 R_1 / \nu$ .

Для обобщения результатов по влиянию вынужденного радиального потока будем использовать радиальное число Рейнольдса  $Re_r = V_1 R_1 / \nu$ , считая его положительным при потоке наружу ( $V_1 > 0$ ) и отрицательным при потоке внутрь ( $V_1 < 0$ ).

Для проверки достоверности численной процедуры, полученные расчетные результаты сопоставлялись с известными экспериментальными данными и результатами

DNS для случая непроницаемых цилиндров. Сравнивались величины, осредненные по времени и по двум пространственным направлениям: азимутальному и осевому. Для обозначения такого рода осреднения нами далее используются угловые скобки  $\langle \bullet \rangle$ . Осреднение по времени выполнялось после достижения квазиустановившегося поведения решения, когда характеристики потока претерпевали колебательные изменения в силу возможной нестационарности. Пространственное осреднение исключает из рассмотрения неоднородность течения в азимутальном и осевом направлениях.

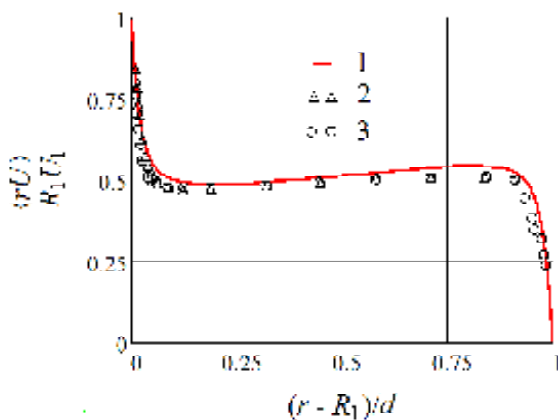


Рисунок 2 — Распределение нормированного осевого момента количества движения по ширине зазора: 1 —  $Re_d = 1,05 \cdot 10^4$ ,  $\tilde{d} = 0,318$ , настоящая работа; 2 —  $Re_d = 9 \cdot 10^3$ ,  $\tilde{d} = 0,489$  экспериментальные результаты [5]; 3 —  $Re_d = 1,72 \cdot 10^4$ ,  $\tilde{d} = 0,489$ , экспериментальные результаты [5]

На рисунках 2, 3 представлены профили среднего осевого момента количества движения, отнесенного к его значению на поверхности внутреннего цилиндра. Учитывая некоторую разницу в числах Рейнольдса и относительной ширине зазора для сопоставляемых вариантов, в целом, корреляцию расчетных и экспериментальных данных можно считать удовлетворительной, особенно при большом значении  $Re_d$ .

Важным для целей настоящего исследования является принципиальная возможность в рамках турбулентного моделирования на основе реализованного нами подхода получать адекватное расчетное поле скоростей и в тех случаях, когда течение является ламинарным. Поэтому в процессе тестирования было выполнено сравнение профилей скорости, рассчитанных в турбулентной и ламинарной постановках. Сравнивались также результаты, полученные в трехмерной и в осесимметричной трактовке разрешающих уравнений.

На рисунке 4 профили азимутальной осредненной скорости, рассчитанные на основе модели ламинарного течения в трехмерной и осесимметричной постановках, сопоставляются с результатами расчета, полученными с

применением выбранного нами подхода к расчету турбулентных течений, а также с экспериментальными данными работы [17]. Последние получены для ламинарных режимов течения с осесимметричными и волнистыми вихрями Тейлора на модели с  $\tilde{d} = 0.18$ ,  $\Gamma = 38$ .

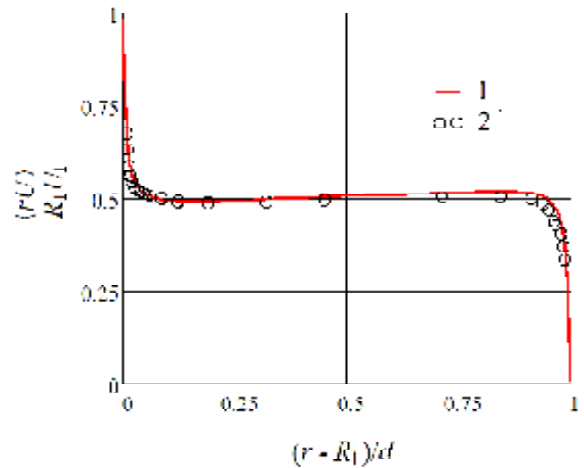


Рисунок 3 — Распределение нормированного осевого момента количества движения по ширине зазора: 1 —  $Re_d = 5,25 \cdot 10^4$ ,  $\tilde{d} = 0,318$ , настоящая работа; 2 —  $Re_d = 5,16 \cdot 10^4$ ,  $\tilde{d} = 0,5$ , экспериментальные результаты [5]

Для расчетов были приняты аналогичные экспериментальной модели значения радиусов внутреннего и внешнего цилиндров ( $R_1 = 0.0445$  м,  $R_2 = 0.0525$  м). Однако расчетная область была уменьшена в соответствии с рисунком 1 до периодического фрагмента с относительной длиной в осевом направлении  $\Gamma = 2.1$  и угловым размером  $\alpha = \pi/8$ .

При осесимметричном моделировании рассматривался прямоугольный периодический в осевом направлении фрагмент квазидвумерной области течения с аналогичными значениями  $R_1$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\Gamma$ .

Сравнение выполнено при значении  $Re_d = 180$ , которому соответствует режим течения с ламинарными волнистыми вихрями Тэйлора. Представленные данные еще раз демонстрируют как близость результатов трехмерного и осесимметричного моделирования, так и способность воспроизвести ламинарное решение в рамках используемого подхода к расчету турбулентных течений.

#### Граница центробежной устойчивости при вынужденном радиальном потоке внутрь

Для численного исследования устойчивости течения использовалась следующая методика. При каждом из рассматриваемых значений вращательного числа Рейнольдса  $Re_\phi$  вначале задавалось достаточно большое по величине значение характерной радиальной скорости

$V_1$ , при котором заведомо отсутствуют вторичные течения типа ВТ.

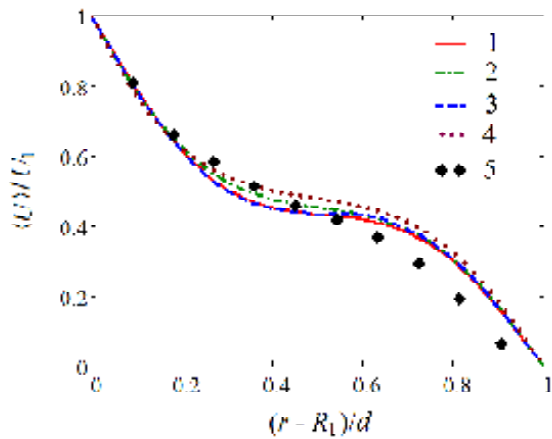


Рисунок 4 — Расчетные профили и измеренные значения осредненной азимутальной скорости при  $Re_d = 180$ : 1 — ламинарная модель, трехмерная постановка; 2 — турбулентная модель, трехмерная постановка; 3 — ламинарная модель, осесимметричная постановка; 4 — турбулентная модель, осесимметричная постановка; 5 — экспериментальные данные [17]

В этом случае, как правило, удается получить стационарное решение. Далее величина радиальной скорости ступенчато уменьшалась и выполнялись нестационарные вычисления с наблюдением за картиной течения. Если в течение определенного времени в потоке не отмечалось эволюционных изменений, сопровождающих возникновение вихревых структур, выполнялось дальнейшее уменьшение величины  $V_1$  до тех пор, пока в расчетном поле скоростей не появлялись видимые признаки вторичных течений. Соответствующее значение  $Re_r$  фиксировалось. После этого  $|V_1|$  постепенно увеличивалась до исчезновения признаков вихрей при определенном значении  $Re_r$ , которое также фиксировалось.

Диапазон между полученными нижним и верхним значениями критического числа Рейнольдса  $(Re_r)_c$  обусловлен не только физическими причинами гистерезисного типа, но и особенностями численной процедуры, включая ограниченность вычислительных ресурсов. В частности, сужение этого диапазона требует очень больших затрат времени счета. Это связано с тем, что характерное время релаксации потока при смене режима течения достаточно велико, особенно в случае бесконечно длинных цилиндров (периодические условия в осевом направлении соответствуют именно этому варианту).

На рисунке 5 представлены результаты по определению границы центробежной устойчивости в ТКТ с вынужденным радиальным течением внутри вращающего-

ся цилиндра. Точки соответствуют сочетаниям параметров  $Re_\phi, Re_r$ , при которых в процессе нестационарного численного моделирования турбулентного течения наблюдалось возникновение либо исчезновение вихрей в соответствии с описанной выше методикой. Представлены результаты расчетов в трехмерной (радиальный поток через пористые щели во вращающемся цилиндре в соответствии с рисунком 1) и осесимметричной (вся поверхность вращающегося цилиндра однородно проницаема) формулировках. Сплошная линия соответствует нейтральной кривой устойчивости, полученной путем линейного анализа [16]. Для проверки влияния ширины зазора кроме базового варианта с  $\tilde{d} = 0.318$  на рисунке 5 представлены также результаты расчетов при  $\tilde{d} = 0.16$ .

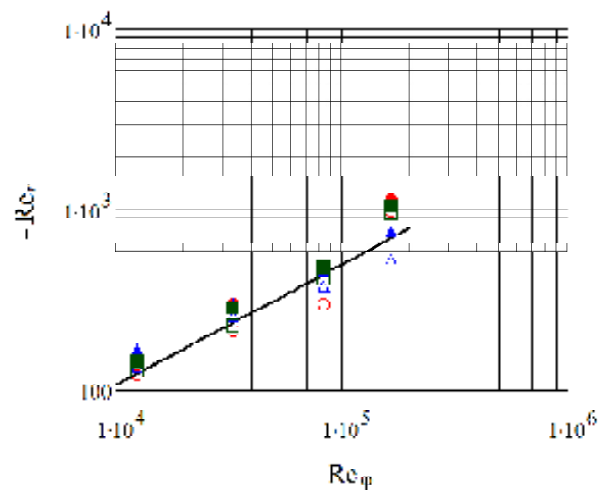


Рисунок 5 — Данные об устойчивости ТКТ при радиальном потоке внутрь: заполненные точки — докритическое течение без вихрей; полые точки — сверхкритическое течение с вихрями; окружности — трехмерное моделирование (ширина зазора  $d = 0,318$ ); квадраты — трехмерное моделирование (ширина зазора  $d = 0,16$ ); треугольники — осесимметричное моделирование (ширина зазора  $d = 0,318$ ); Сплошная линия — линейная кривая нейтральной устойчивости

В первую очередь представленные результаты подтверждают вывод о стабилизирующем действии вынужденного радиального потока внутри вращающегося цилиндра, следующий из данных линейного анализа при его формальном применении для любых значений  $Re_\phi, Re_r$ .

В области  $Re_\phi \leq 1 \cdot 10^5$  значения  $(Re_r)_c$ , определенные в линеаризованной постановке, попадают в диапазон между рассчитанными численно значениями верхнего и нижнего критических чисел  $Re_r$ .

Этот результат является общим для всех рассматриваемых вариантов. В случае однородно проницаемой полной поверхности внутреннего цилиндра то же самое

остається справедливим і при  $Re_\phi > 1 \cdot 10^5$ . Однак в разі протікання рідини через подовжні пористі щіли численний аналіз дає в цьому діапазоні більші за величину значення радіальної швидкості, необхідні для стабілізації, чим це слідує з лінійного аналізу. В частині, при  $Re_\phi = 1.65 \cdot 10^5$  численний розрахунок для варіанта з дискретно проникною поверхнею вращаючогося циліндра передбачає на 40–60% більші абсолютні значення  $(Re_r)_c$ .

Численне моделювання також однозначно підтверджує незалежність межі центробежної стійкості від відносної ширини зазору при достатньо великих негативних значеннях  $Re_r$ . Цей факт був виявлений раніше [16,18] в лінійному наближенні. Тепер ми показали, що він має місце і в разі дискретно проникною поверхні внутрішнього циліндра, а також з урахуванням нелінійних ефектів і можливості розвитку турбулентності. Причиною являється відсутність в'язкого впливу зовнішньої стінки на розподіл азимутальної швидкості в пограничному шарі на поверхні вращаючогося циліндра при достатньо інтенсивному радіальному потоці. Дійсно, центробежна нестійкість розвивається в шарі вращаючоїся рідини, який з збільшенням  $|Re_r|$  стає тонше ширини зазору. Ураховуючи це обставина, ми тут використовуємо узагальнення результатів по впливу швидкості обертання на основі вращального числа Рейнольдса  $Re_\phi$ , замість більш звичайних параметрів  $Ta, Re_d$ .

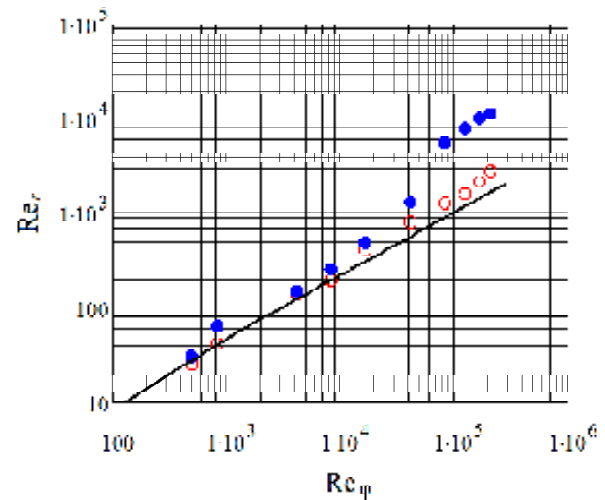
Характеризуючи результати, представлені на малюнку 5, можна також відзначити, що отримані в численному аналізі оцінки для нижньої і верхньої критичних значень радіального числа Рейнольдса зближуються з зменшенням  $Re_\phi$  (швидкості обертання). При інших рівних вони також зближуються з зменшенням відносної ширини зазору між циліндрами. Останнє обставина частково пов'язано з зменшенням часу релаксації потоку, що дозволило при тих же обчислювальних витратах сузити оціночний інтервал. В той же час, як при зменшенні швидкості обертання, так і при зменшенні ширини зазору зменшується рівень турбулентності в умовах вихревого руху. Це обставина може бути однією з фізичних причин зближення верхнього і нижнього значень  $(Re_r)_c$  за рахунок зменшення гістерезисних явищ.

#### Устойчивость при вынужденном радиальном потоке изнутри вращающегося цилиндра

Лінійна теорія передбачає стабілізуюче діє в стосунку центробежної нестійкості діє вимушеного радіального течія назовні при  $Re_r > 15$ . Для цього типу течія нами також численним моделюванням по розглянутій вище методиці визначалися верхнє і нижнє значення  $(Re_r)_c$  в діапазоні

$Re_\phi < 2 \cdot 10^5$ . В цьому разі результати для варіантів з протіканням через всю поверхню вращаючогося циліндра і через подовжні пористі щіли демонструють якісні відмінності в картині течія.

На малюнку 6 поряд з лінійною кривою нейтральної стійкості, побудованою за даними роботи [18], позначені точки, що відповідають нижньому і верхньому критичним значенням  $Re_r$ , розрахованим для ряду значень вращального числа Рейнольдса. При значеннях  $Re_r$ , більших верхньої межі, численне моделювання відтворює відсутність великомасштабних вихрей незалежно від початкових умов. При  $Re_r$ , менших нижньої критичної межі, також незалежно від початкових умов, має місце вихреве течія. В разі проміжних значень радіального числа Рейнольдса остаточна картина течія залежить від початкових умов.



Рисунік 6 — Дані про стійкість ТКТ

при радіальному потоці назовні ( $\tilde{d}=0,318$ ):

точки — численне осесиметричне моделювання (заповнені точки — докритичне течія без вихрей, порожні точки — сверхкритичне течія з вихрями); суцільна лінія — лінійна крива нейтральної стійкості (за даними роботи [18])

Геометрія течія в разі осесиметричного моделювання збігається з постановкою задачі в лінійному аналізі. Численний розрахунок при цьому підтверджує можливість стабілізації за рахунок радіального потоку назовні при всіх розглянутих значеннях  $Re_\phi$ . Визначена в такій постановці межа виникнення вихрей (нижні критичні значення  $Re_r$ ) достатньо близька до нейтральної кривої, отриманої на основі лінійної теорії, в області малих і помірних значень  $Re_\phi$ . В цьому діапазоні інтервал між нижніми і верхніми значеннями  $(Re_r)_c$  відносно невелик.

При  $Re_\phi \geq 10^4$  численний розрахунок дає більшіє, чєм лінійна теорія, значєня  $Re_r$  для границі возникновєня вихрєй. Сущєствєнно збільшєвається с дальнєйшим ростом  $Re_\phi$  и разлица мєжду нижним и верхним критичєскими значєнями радіального числа Рейнольдса. Отмєченнє изменение в тєндєнции логично звязать с тєм обстєятельством, что околє значєний  $Re_\phi \sim 10^4$  вихрєвое тєчєние становитєся турбулєнтным, а с дальнєйшим ростом  $Re_\phi$  интенсивность турбулєнтности возрастает. В то жє время, лінійний анализ не учитывает турбулєнтность.

В случает протєкания жидкости через продольные щєли во вращающємся цилиндре результаты расчетов демонстрируют совершенно иные тєндєнции относительно влияния радіального потока наружу на границы возникновєня и исчезновєня вторичных тєчєний.

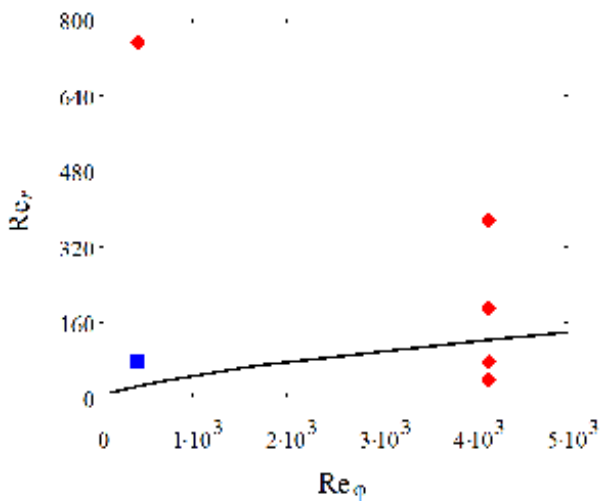


Рисунок 6 — Сравнение данных численного моделирования (поток наружу через 16 щєлей) и линейной теории о режимах тєчєния ( $d = 0,318$ ): квадратные точки — отсутствие вихрєй; ромбические точки — вихрєвое тєчєние; сплошная линия — линейная кривая нейтральной устойчивости

На рисунке 7 точками отмечєны сочетания  $Re_\phi$ ,  $Re_r$  для которых в численном анализе получєны картины тєчєния без крупномасштабных вихрєй и с ними. Представленные результаты показывают, что в случает потока наружу через продольные щєли стабилизация возможна в области малых значєний  $Re_\phi$  при значєниях  $Re_r$  несколько больших, чєм дает лінійная теорія. Однако при дальнєйшем увеличении интенсивности радіального потока и неизменном значєнии  $Re_\phi$  наступает дєстабилизация и возникновєние вихрєй. А ужє при  $Re_\phi > 1000$  отсутствует сама возможность стабилизации тєчєния вынужденным радіальным потоком наружу через продольные щєли во вращающємся цилиндре.

### Выводы

Численное моделирование турбулєнтного тєчєния мєжду вращающємся внутренним и неподвижным внешним проникаємыми цилиндрами позволило получить новые данные о границе и особенностях центробєжной неустєйчивости в условиях вынужденного радіального потока большой интенсивности (до  $Re_r \sim 10^3$ ), а также при больших значєниях вращательного числа Рейнольдса. Полученные результаты подтверждают возможность стабилизации тєчєния от возникновєния крупномасштабных вихрєй (по типу ВТ) за счет радіального потока внутрь вращающєгосє цилиндра во всем рассмотрєнном диапазоне характерных определяющих параметров. Такая возможность следует из результатов лінейного анализа устойчивости, однако применение последнего в случает достаточно больших значєний  $Re_\phi$  является формальным. Действительно, в лінійной теории исследуєтся устойчивость первичного ламинарного тєчєния, тогда как при достаточно большой угловой скорости центробєжная неустєйчивость может проявиться ужє после возникновєня турбулєнтности у поверхности вращающєгосє цилиндра. Численный анализ подтверждает такой сценарий перехода к турбулєнтному вихрєвому движєнию, когда вначале турбулєнтность развивается у поверхности вращающєгосє цилиндра до появления крупномасштабных вторичных тєчєний. С уменьшением интенсивности направленного внутрь радіального потока растет толщина турбулєнтного пограничного слоя и уровень турбулєнтности в нем. Уже после этого при  $Re_r$ , равном нижнему критическому значєнию, проявляется центробєжная неустєйчивость. Примєчательно, что зарождєние неустєйчивости этого рода происходит в пограничном слое по окружной скорости, который при  $|Re_r| > 100$  намного меньше ширины зазора мєжду цилиндрами, однако возникшие вторичные тєчєния сразу жє распространяются на всю кольцевую область.

Сосредоточенность окружной скорости при докритическом тєчєнии в тонком слое у поверхности вращающєгосє цилиндра является одной из основных физических особенностей, отличающей рассматриваемый случает от классического ТКТ. Однако имєющий место в этом случает пограничный слой отличается и от традиционной для теории пограничного слоя параболичєской задачи с наличием маршевой координаты. Представленный численный анализ подтверждает еще один прогноз, следующий из лінійной теории, о независимости границы центробєжной устойчивости от ширины зазора. Этот факт является еще одним проявлением погранслоного характера распределения окружной скорости в докритическом тєчєнии при больших  $|Re_r|$ .

Учет турбулєнтности и нелинейных эффєктов, влияние которых увеличивается с ростом вращательного числа Рейнольдса, проявляется в том, что при больших  $Re_\phi$  для стабилизации тєчєния требуются большие по величине значєния  $Re_r$ , чєм предсказывает лінійная теорія.

В частности, при  $Re_\phi = 1.65 \cdot 10^5$  для предотвращєния пе-



рехода к вихревому движению требуется на 40% больший расход вынужденного радиального потока. Однако этот результат относится к случаю, когда проток жидкости через вращающийся цилиндр осуществляется через продольные пористые щели с коэффициентом скважности  $k_{op} = 1/6$ . В том случае, когда вся поверхность внутреннего цилиндра считается пористой без непроницаемых участков, результаты численного моделирования в отношении границы перехода значительно ближе к данным линейного анализа. Это обстоятельство объясняется главным образом существенной разницей в уровне турбулентности и максимальной толщине пограничного слоя для случаев с полностью и частично проницаемой поверхностью вращающегося цилиндра при больших  $Re_\phi$ .

Кроме этого, фактор турбулентности влияет и на гистерезис, проявляющийся в разнице между верхним и нижним значениями критического числа  $Re_r$  при фиксированном  $Re_\phi$ . Эта разница особенно возрастает после того, как докритическое и посткритическое течения становятся турбулентными.

Для случая вынужденного радиального потока наружу численный анализ также подтверждает возможность стабилизации течения при всех значениях  $Re_\phi$ . Однако этот вывод относится только к случаю равномерно распределенной подачи через всю поверхность внутреннего цилиндра. При этом вблизи поверхности наружного цилиндра, начиная с  $Re_\phi \sim 10^4$ , до возникновения центробежной неустойчивости начинает проявляться турбулентность. Вместе с этим численный анализ дает большие, чем линейная теория, значения для радиального числа Рейнольдса, соответствующего границе возникновения вихрей. Увеличивается и разность между числами  $Re_r$ , соответствующими возникновению и исчезновению вихрей. Так, при  $Re_\phi = 1.65 \cdot 10^5$  нижнее и верхнее значения  $(Re_r)_c$  отличаются в 2,5 раза.

Примечательным является тот факт, что для конструктивного варианта с дискретно проницаемой поверхностью вращающегося цилиндра трехмерный численный анализ в случае вынужденного радиального потока наружу демонстрирует результаты, качественно отличающиеся от описанных выше. В частности, ограниченная стабилизация возможна только в области малых  $Re_\phi$ . Причем возникновение вторичных течений имеет место не только при уменьшении  $Re_r$  ниже критического значения, но и при увеличении большем, чем на некоторую величину. Это объясняется наличием выраженных сдвиговых слоев при подаче жидкости через дискретно расположенные щели. При  $Re_\phi > 1000$  возможность стабилизации течения от возникновения крупномасштабных вихрей за счет радиального потока наружу через продольные щели отсутствует совсем.

## Литература

1. Taylor, G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders [Текст] / G.I. Taylor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. — 1923. — V.223.— P. 289—343.
2. Bilson, M. Direct numerical simulation of turbulent Taylor–Couette flow [Текст] / M. Bilson, K. Bremhorst // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 579. — P. 227—270.
3. Dong, S. Direct numerical simulation of turbulent Taylor–Couette flow [Текст] / S. Dong // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 587. — P. 373—393.
4. Pirro, D. Direct numerical simulation of turbulent Taylor–Couette flow [Текст] / D. Pirro, M. Quadrio // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2008. — V. 27.— P. 552—566.
5. Smith, J.P. Turbulent Couette flow between concentric cylinders at large Taylor numbers [Текст] / J.P. Smith, A.A. Townsend // J. Fluid Mech. — 1982. — V. 123. — P. 187—217.
6. Andereck, C.D. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders [Текст] / C.D. Andereck, S. Liu, H. Swinney // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 164. — P. 155—183.
7. Burin, M.J. Local measurements of turbulent angular momentum transport in circular Couette flow [Текст] / M.J. Burin, E. Scharfman, H. Ji // Exp. in Fluids. — 2010. — V. 48. — P. 763—782.
8. Serre, E. Stability of Taylor–Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow [Текст] / E. Serre, M.A. Sprague, R.M. Lueptow // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20. — Article ID: 034106. — 10 p.
9. Poncet, S. Turbulent Couette–Taylor flows with end-wall effects: a numerical benchmark [Текст] / S. Poncet, R. Da Soghe, C. Bianchini, S. Viazzo, A. Aubert // Int. J. Heat Fluid Fl. — 2013. — V. 44. — P. 229 – 238.
10. Wilcox, D.C. Turbulence modeling for CFD [Текст] / D.C. Wilcox. La Canada, California: DCW Industries, Inc., 1998. 537 p.
11. Daly, B.J. Transport Equations in Turbulence [Текст] / B.J. Daly, F.H. Harlow // Phys. Fluids.— 1970.— V. 13. — P. 2634—2649.
12. Launder, B.E. Second-Moment Closure for the Near-Wall Sublayer: Development and Application [Текст] / B.E. Launder, N. Shima // AIAA Journal. — 1989. — V. 27. — P. 1319—1325.
13. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation [Текст] / B.P. Leonard // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1979. — V.19. — P. 59—98.
14. Ferziger, J.H. Computational methods for fluid dynamics [Текст] / J.H. Ferziger, M. Peric. — Berlin, Heidelberg, 1999. — 389 p.
15. Van Doormaal, J.R. Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow [Текст] / J.R. Van Doormaal, G.D. Raithby // Numer. Heat Transfer. — 1984. — V.7. — P. 147—163.
16. Мочалин, Е.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил [Текст] / Е.В. Мочалин

лин, А.А. Халатов. — К.: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2010. — Т.8: Гидродинамика закрученного потока в ротационных фильтрах. — 428 с.

17. Wereley, S.T. Azimuthal velocity in supercritical circular Couette flow [Текст] / S.T. Wereley, R.M. Lueptov // Exp. Fluids. — 1994. — V.18. — P. 1—9.

18. Chang, S. Hydromagnetic stability of dissipative flow between rotating permeable cylinders. P.1 [Текст] / S. Chang, W.K. Sartory // J. Fluid Mech. — 1967. — V.27. — P. 65—79.

### References

1. Taylor, G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders [Текст] / G.I. Taylor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. — 1923. — V. 223. — P. 289—343.

2. Bilson, M. Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow [Текст] / M. Bilson, K. Bremhorst // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 579. — P. 227—270.

3. Dong, S. Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow [Текст] / S. Dong // J. Fluid Mech. — 2007. — V. 587. — P. 373—393.

4. Pirro, D. Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow [Текст] / D. Pirro, M. Quadrio // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2008. — V. 27. — P. 552—566.

5. Smith, J.P. Turbulent Couette flow between concentric cylinders at large Taylor numbers [Текст] / J.P. Smith, A.A. Townsend // J. Fluid Mech. — 1982. — V. 123. — P. 187—217.

6. Andereck, C. D. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders [Текст] / C.D. Andereck, S. Liu, H. Swinney // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 164. — P. 155—183.

7. Burin, M.J. Local measurements of turbulent angular momentum transport in circular Couette flow [Текст] / M.J. Burin, E. Schartman, H. Ji // Exp. in Fluids. — 2010. — V. 48. — P. 763—782.

8. Serre, E. Stability of Taylor-Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow [Текст] / E. Serre, M.A. Sprague, R.M. Lueptov // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20. — Article ID: 034106. — 10 p.

9. Poncet, S. Turbulent Couette-Taylor flows with endwall effects: a numerical benchmark [Текст] / S. Poncet, R. Da Soghe, C. Bianchini, S. Viazzo, A. Aubert // Int. J. Heat Fluid Fl. — 2013. — V. 44. — P. 229—238.

10. Wilcox, D.C. Turbulence modeling for CFD [Текст] / D.C. Wilcox. La Canada, California: DCW Industries, Inc., 1998. 537 p.

11. Daly, B.J. Transport Equations in Turbulence [Текст] / B.J. Daly, F.H. Harlow // Phys. Fluids. — 1970. — V. 13. — P. 2634—2649.

12. Launder, B.E. Second-Moment Closure for the Near-Wall Sublayer: Development and Application [Текст] / B.E. Launder, N. Shima // AIAA Journal. — 1989. — V. 27. — P. 1319—1325.

13. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation [Текст] / B.P. Leonard // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1979. — V.19. — P. 59—98.

14. Ferziger, J.H. Computational methods for fluid dynamics [Текст] / J.H. Ferziger, M. Peric. — Berlin, Heidelberg, 1999. — 389 p.

15. Van Doormaal, J.R. Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow [Текст] / J.R. Van Doormaal, G.D. Raithby // Numer. Heat Transfer. — 1984. — V.7. — P. 147—163.

16. Mochalin, Ye.V. Teploobmen i hydrodinamika v poliakh centrobezhnykh massovykh sil [Текст] / Ye.V. Mochalin, A.A. Khalatov — К.: In-t tekhn.. teplofiziki NAN Ukrainy, 2010. — Т.8: Hydrodinamika zakruchennogo potoka v rotatsionnykh filtrakh. — 428 s.

17. Wereley, S.T. Azimuthal velocity in supercritical circular Couette flow [Текст] / S.T. Wereley, R.M. Lueptov // Exp. Fluids. — 1994. — V.18. — P. 1—9.

18. Chang, S. Hydromagnetic stability of dissipative flow between rotating permeable cylinders. P.1 [Текст] / S. Chang, W.K. Sartory // J. Fluid Mech. — 1967. — V.27. — P. 65—79.

*Надійшла 23.03.2014 року*

**УДК 532.527.2**

## **Особливості виникнення вторинних течій зовні обертового циліндра с дискретно проникною поверхнею**

**Є.В. Мочалин, А.Є. Мочалин**

На основі чисельного моделювання турбулентної течії між обертовим внутрішнім та нерухомим зовнішнім циліндрами досліджені особливості виникнення відцентрової нестійкості у випадку вимушеного радіального потоку крізь кільцеву область у двох можливих напрямках. Дослідження виконані при радіальних числах Рейнольдса до  $10^3$  та окружних числах Рейнольдса до  $10^6$ . Розглянуто варіанти конструкції обертового циліндра з протіканням рідини крізь усю його поверхню та крізь пористі щілини в ньому (дискретно проникна поверхня). Підтверджено можливість стабілізації від виникнення вторинних течій за рахунок радіального потоку усередину у всьому діапазоні обертових чисел Рейнольдса, що розглядався, для обох конструкцій внутрішнього циліндра. У випадку радіального потоку назовні стабілізація у всьому діапазоні обертових чисел Рейнольдса можлива лише за умов подачі рідини крізь усю поверхню обертового циліндра. Стабілізація радіальним потоком назовні крізь пористі щілини можлива тільки при обертових числах Рейнольдса менших за  $10^3$ .

*Ключові слова: турбулентні течії, обертові циліндри, радіальний потік, дискретно проникна поверхня, можливість стабілізації.*

UDC 532.527.2

**FEATURES OF INVESTIGATION  
OF SECONDARY OUTFLOWS  
OF ROTATING CYLINDER WITH  
DISCRETELY PERMEABLE SURFACE**

**Ye. V. Mochalin, A.Ye. Mochalin**

A numerical simulation of the turbulent flow between a rotating inner and fixed outer permeable cylinders is applied for investigation of centrifugal instability features in the case of a superimposed radial flow through the annular domain. Both the forced inflow and outflow are considered at radial Reynolds numbers up to  $10^3$  and at rotational

Reynolds numbers up to  $10^6$ . Two structures of the rotating cylinder are examined: with passing of fluid through the entire porous surface and through the lengthwise porous slots (discretely permeable surface). The stabilization by the radial inflow from an onset of the secondary flows is confirmed for both configurations of the inner cylinder over the entire range of rotational Reynolds number considered. In the case of the radial outflow, the stabilization at any rotation rate is possible only when fluid is supplied through the entire surface of the rotating cylinder. The stabilization via the radial outflow through the porous slots can be realized only at rotational Reynolds number being less than  $10^3$ .

*Key words: turbulent flow, rotating cylinder, radial flow, discretely permeable surface, stabilization possibility.*