

Системы приводів. Технологія і обладнання машинобудівного виробництва. Мехатроніка

УДК 62- 82

З.Я. Лурье, д-р техн. наук, проф.,
П.Н. Андренко, д-р техн. наук, проф.,
Е.Н. Цента, канд. техн. наук
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СУХОГО ТРЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРОСИСТЕМ

AN ASSESSMENT OF THE MATHEMATICAL MODELS OF DRY FRICTION IN THE EQUATIONS OF MOTION OF THE MECHANICAL COMPONENTS OF HYDRAULIC SYSTEMS

Приведен обзор работ, посвященных теории колебаний, вопросам устойчивости и в целом динамике гидравлических систем с учетом сухого трения. Среди пяти зависимостей, описывающих процесс трения, есть три неравенства, которые определяют значения трения при скорости подвижного элемента равной нулю. На примере золотника гидрораспределителя как осциллятора, а затем элемента узла «электромагнит — золотник» дается оценка этим трем неравенствам. Отмечается, что использование полной модели дает возможность получить значение силы трения в начале повторного движения золотника-осциллятора. Это может иметь практическую значимость для оценки крутящего момента страгивания вала гидромотора или силы страгивания штока гидроцилиндра. Предлагаемая относительная интегральная оценка оказалась эффективной для определения близости знакопеременных кривых. На основе машинного эксперимента доказана идентичность модели сухого трения согласно формуле Кронекера и модели блока *sign* пакета VisSim.

Ключевые слова: математическая модель, уравнение движения, сухое трение, гидросистема, золотник-осциллятор, динамическая характеристика.

Введение

Во многих гидросистемах различного технического назначения имеются механические элементы и узлы, в уравнениях движения которых учитывается сила кулоновского (сухого) трения. При математическом описании этих сил имеются различные модели, сравнительная оценка которых не нашла свое отражение в научно-технической литературе. Данная статья на конкретном примере посвящена оценке различных моделей кулоновского трения.

Анализ литературных источников

Остановимся подробнее на математическом описании силы кулоновского трения $f(t)$, в частности, при нулевом значении скорости в работах, посвященных теории колебаний, вопросам устойчивости и динамическим характеристикам гидроприводов.

В работе [1] задача колебания осциллятора с кулоновским трением решалась на основе нелинейного дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX + f(t), \quad (1)$$

с глубоким анализом физики колебательного процесса и причин его вызывающих. Рассматривалось уравнение (1) в котором буквами m , t и k соответственно обозначено массу подвижных частей, время и жесткость пружины.

Неподвижный осциллятор ($\dot{X} = 0$) остается в покое, если сила натяжения пружин kX по абсолютному значению не превышает модуль силы трения f_0 , так как она будет полностью уравновешена силой сухого трения.

Если $kX > f_0$, то сила натяжения пружины уже не будет полностью уравновешена силой сухого трения и осциллятор придет в движение. При движении осциллятора сила трения принимает значения $f(t) = +f_0$, при $\dot{X} < 0$ и $f(t) = -f_0$ при $\dot{X} > 0$. Для рассматриваемой задачи представлена в следующем виде

$$f(t) = \begin{cases} + f_0 & \text{при } \dot{X} < 0, \\ + f_0 & \text{при } \dot{X} = 0 \text{ и } kX > f_0, \\ + kx & \text{при } \dot{X} = 0 \text{ и } |kX| \leq f_0, \\ - f_0 & \text{при } \dot{X} = 0 \text{ и } kX < -f_0, \\ - f_0 & \text{при } \dot{X} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, сила кулоновского трения является нелинейной, разрывной функцией и зависит не только от скорости, но и от координаты X осциллятора.

Работа [2] посвящена задаче теории прямого регулирования с учетом вязкого и кулоновского трения (она была поставлена и решена И.А. Вышнеградским в работе «О регуляторах прямого действия»). По мнению авторов, эту задачу они решили впервые как задачу аналитической динамики или как задачу теории нелинейных колебаний. Рассматривается машина (например, паровая турбина) с центробежным регулятором в предположении наличия жесткой связи между смещением муфты и открытием заслонки, регулирующей доступ пара, допуская перемещение заслонки грузами регулятора без внешней энергии.

Математическая модель представлена двумя дифференциальными уравнениями в приращениях для $\frac{d\varepsilon}{d\tau} \neq 0$, первое из которых нелинейное за счет кулоновского трения

$$m \frac{d^2\varepsilon}{d\tau^2} = -\frac{2E\delta}{a}\varepsilon + \frac{2E}{\omega_m}\eta - \rho \frac{d\varepsilon}{d\tau} \mp K, \quad (3)$$

$$J \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{M}{a}\varepsilon, \quad (4)$$

где τ — время, ε — смещение муфты, отсчитываемое от нового положения равновесия, η — отклонение угловой скорости от ее нового постоянного значения, m — приведенная к выходному звену муфты масса регулятора, a — ход муфты регулятора, E — приведенная сила или так называемая «энергия» регулятора, ρ — приведенный к движению муфты коэффициент вязкого трения, K — приведенная к движению муфты абсолютная величина силы кулоновского (твердого) трения, ω_m — средняя

угловая скорость машины, $\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_m}$ — так

называемый коэффициент неравномерности регулятора, J — момент инерции, M — средний вращающий момент

машины, $-\frac{2E\delta}{a}\varepsilon$ — так называемая перестановочная

сила из-за неправильного, т.е. не соответствующего стационарному режиму, положения муфты регулятора,

$+\frac{2E}{\omega_m}\eta$ — так называемая перестановочная сила из-за

неправильного значения угловой скорости турбины, $\rho \frac{d\varepsilon}{d\tau}$

— приведенная к движению муфты сила вязкого трения,

$\pm K$ — приведенная к движению муфты выходного звена

сила кулоновского трения, $\frac{M}{a}\varepsilon$ — так называемый

избыточный момент, действующий на главный вал машины.

Показано, как доопределяется система уравнений для случая $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$. Затем система (3), (4) представляется в

безразмерных координатах, включая и новые параметры (T_a, T_p, T_k), имеющие размерность времени. Не останавливаясь на дальнейших преобразованиях и результатах решений, в частности относящихся к линейному случаю, данная работа в целом посвящена вопросам устойчивости на основе второго метода Ляпунова и теории точечных преобразований. Термины и обозначения параметров, связанные с теорией автоматического управления и с техникой, сохранены в редакции авторов.

В работе [3] рассмотрено влияние сухого трения на устойчивость гидравлических следящих систем копировальных систем. В линеаризованном дифференциальном уравнении третьего порядка относительно ошибки копирования учитываются: сжимаемость рабочей жидкости и упругость трубопроводов (коэффициент L), масса рабочего органа станка (M), вязкое трение (D), коэффициент жесткости (E), постоянная сила резания (R), x — координата рабочего органа станка, y — входная координата (координата наконечника щупа). Исследование устойчивости этой системы сводится к задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования. Рассматривается динамика системы при наличии сухого трения при движении около состояния равновесия. При нагрузке, равной нулю, и входном сигнале $y=0$ динамика системы описывается уравнениями

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = P + f(\dot{x}), \quad \frac{L}{M} \frac{dP}{dt} + P = -Ex - D \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

где P — движущая сила, $f(\dot{x})$ — сила трения,

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} +\frac{R_T}{2} & \text{при } \dot{x} < 0, \\ +\frac{R_T}{2} & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |P| < \frac{R_T}{2}, \\ -\frac{R_T}{2} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ -\frac{R_T}{2} & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |P| > \frac{R_T}{2}, \\ -P & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |P| \leq \frac{R_T}{2}. \end{cases} \quad \text{— сила трения. (6)}$$

R_T — модуль силы сухого трения. В формуле (6) из одного и того же условия $|P| < \frac{R_T}{2}$ в строчках 2 и 5 появляется неоднозначность в определении $f(\dot{x})$ в сравнении с моделью (2), что требует уточнения. После приведения уравнений к безразмерной форме по методу Вышнеградского получено решение на АВМ, позволяющее уточнить методы расчета гидравлических следящих систем.

Работа [4] охватывает большой комплекс вопросов в области проектирования и исследования гидравлических следящих приводов. Здесь на примере гидравлического следящего привода с недифференциальным цилиндром и четырехкромочным золотником рассмотрена его математическая модель

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P + f\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad (7)$$

$$\frac{A}{m} \cdot \frac{dP}{dt} + P = -\frac{k_R}{k_v} \cdot \frac{dy}{dt} - k_R y, \quad (8)$$

$$A = \frac{H k_R m}{4 E_0 F k_v}, \quad (9)$$

включающая модель сухого трения

$$f\left(\frac{dy}{dt}\right) = \begin{cases} +\frac{R_T}{2} & \text{при } \frac{dy}{dt} < 0, \\ +\frac{R_T}{2} & \text{при } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ и } |P| < \frac{R_T}{2}, \\ -\frac{R_T}{2} & \text{при } \frac{dy}{dt} > 0, \\ -\frac{R_T}{2} & \text{при } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ и } |P| > \frac{R_T}{2}, \\ -P & \text{при } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ и } |P| \leq \frac{R_T}{2}, \end{cases} \quad (10)$$

где y — координата перемещения рабочего органа станка, m — приведенная масса рабочего органа станка с учетом рабочей жидкости в цилиндре и трубопроводах, P — движущая сила, H — наибольший ход цилиндра, k_R — коэффициент усиления привода по нагрузке, E_0 —

объемный модуль упругости рабочей жидкости, F — площадь поршня, k_v — коэффициент усиления привода по скорости.

В формуле (10) та же неоднозначность в строчках 2 и 5, как и в формуле (6), требующая уточнения. После приведения системы уравнений (7) — (10) к безразмерной форме решение устойчивости привода выполнялось на АВМ. В данном объекте $f(dy/dt)$ оказывает роль демпфера колебаний в зоне состояния равновесия. Все термины и уравнения оставлены в авторской редакции.

В работе [5] при изложении вопросов моделирования уделено должное внимание движению механических элементов (поршень, золотник и др.) объемных гидроприводов. Модель сухого трения в основном аналогична работам [1—3]. Кроме того, отмечается, что в общем случае можно признать целесообразным математическое описание сухого трения в виде:

$$F_c = F_{TP} \text{sign}\left(\frac{dX}{dt}\right) = \begin{cases} +F_{TP} & \text{при } \frac{dX}{dt} > 0, \\ -F_{TP} & \text{при } \frac{dX}{dt} < 0, \end{cases} \\ |F_c| \leq F_{TP} \text{ при } \frac{dX}{dt} = 0. \quad (11)$$

Здесь также обозначения параметров и переменных соответствуют оригиналу.

Постановка задачи

Обзор литературы показал, что в качестве математических моделей сил сухого трения на основе теории колебаний, исследований устойчивости объемных гидросистем с обратными связями, движения механических элементов трущихся пар в составе объемных гидросистем, гидроприводов, гидроагрегатов используются уравнения (2), (6), (10) и (11). Уравнение (2) следует рассматривать как теоретически обоснованное и более адекватное к физической картине динамики объемной гидросистемы. Представляет теоретический и практический интерес оценить влияние на показатели качества переходных процессов трех неравенств, которые отражают значения силы трения в момент равенства скорости нулю. В работах [1—5] этот вопрос не нашел отражения.

В качестве конкретного объекта исследования выбран узел «электромагнит-золотник гидрораспределителя» при прямом ходе гидроцилиндра, который находит применение в различных гидроприводах технологических машин общепромышленного назначения. Математическая модель этого узла для оценки моделей сухого трения содержит следующие уравнения:

- электрического равновесия в цепи электромагнита

$$U_y = L \frac{di}{dt} + iR + K_{\Pi\Theta} \frac{dx_{ГП}}{dt},$$

откуда с учетом $T_l = L/R$ получаем

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{T_l} \cdot \left(\frac{U_y}{R} - i - \frac{K_{\Pi\Theta}}{R} \cdot \frac{dx_{ГП}}{dt} \right), \quad (12)$$

- тягового усилия (магнитодвижущей силы) электромагнита

$$F_{\Theta} = K_{Fi} i, \quad (13)$$

где $K_{Fi} = F_{\Theta max} / i_{max}$ — коэффициент усиления тяговой

характеристики електромагніта, $R, T_L, K_{\text{ПЭ}}, i, U_y$ — відповідно активне опір, постійна часу, протипо-д.с., ток в обмотки електромагніта і напруга управління;

- рух золотника гідророзподільця (ГР) при прямому ході ($x_{\text{ГР}} > 0$)

$$m_{\text{ГР}} \frac{d^2 x_{\text{ГР}}}{dt^2} = F_0 + f(t), \quad (14)$$

$$\frac{dx_{\text{ГР}}}{dt} = \int_0^{t_x} \frac{dx_{\text{ГР}}}{dt^2} dt, \quad x_{\text{ГР}} = \int_0^{t_x} \frac{dx_{\text{ГР}}}{dt} dt, \quad (15)$$

де $F_0 = F_{\text{Э}} - F_{\text{ТРВ,ГР}} - F_{\text{Гд}} - F_{\text{ПР}}, \quad (16)$

$$F_{\text{ТРВ,ГР}} = \beta_{\text{ГР}} \frac{dx_{\text{ГР}}}{dt} \text{ — сила в'язкого трия,} \quad (17)$$

$$F_{\text{Гд}} = 2\mu^2 d_{\text{ГР}} x_{\text{ГР}} / \Delta p \cos \theta \text{ — гідродинамічна сила,} \quad (18)$$

$$F_{\text{ПР}} = 2C_{\text{ПР}} x_{\text{ГР}} \text{ — сила пружин,} \quad (19)$$

$$x_{\text{ГР}}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } x_{\text{ГР}} \leq \Delta_{\text{ГР}}, \\ x_{\text{ГР}} - \Delta_{\text{ГР}} & \text{при } x_{\text{ГР}} > \Delta_{\text{ГР}}, \end{cases} \quad (20)$$

- переміщення золотника гідророзподільця при прямому ході з урахуванням додатного перекриття дроселюючої щіли, сила сухого трия

$$f(t) = \begin{cases} +F_{\text{ТР0}} & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} < 0, \\ -F_{\text{ТР0}} & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} = 0 \text{ и } F_0 > F_{\text{ТР0}}, \\ -F_0 & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} = 0 \text{ и } |F_0| \leq F_{\text{ТР0}}, \\ +F_{\text{ТР0}} & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} = 0 \text{ и } F_0 < -F_{\text{ТР0}}, \\ -F_{\text{ТР0}} & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Система ураній (21) аналогічна нерівностям вираження (2), яке ґрунтовано на глибокому аналізі фізики коливального процесу і причин його викликаючого, з урахуванням сил, діючих на золотник.

Ураховуючи граничне переміщення золотника гідророзподільця і пасивний характер сил опору, в математичну модель необхідно ввести відповідні обмеження. Швидкість золотника гідророзподільця в момент подачі керуючого сигналу на електромагніт не може бути від'ємною, тоді $\frac{dx_{\text{ГР}}}{dt} \geq 0$.

Кінцеве значення швидкості може бути в межах ходу золотника $0 < x_{\text{ГР}} < x_{\text{ГР,max}}$. Тому швидкість переміщення золотника гідророзподільця повинна задовольняти наступним умовам

$$\dot{x}_{\text{ГР}} = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} > 0 \text{ и } x_{\text{ГР}} = x_{\text{ГР,max}}, \\ 0 & \text{при } \dot{x}_{\text{ГР}} < 0 \text{ и } x_{\text{ГР}} = 0, \\ \dot{x}_{\text{ГР}} & \text{при } 0 < x_{\text{ГР}} < x_{\text{ГР,max}}. \end{cases} \quad (22)$$

Тут $m_{\text{ГР}}$ — маса золотника, $\beta_{\text{ГР}}$ — коефіцієнт в'язкого трия, $d_{\text{ГР}}$ — діаметр золотника, μ — коефіцієнт

расхода, Δp — перепад трия робочої рідини на дроселюючої щіли, θ — кут між осью золотника і вектором швидкості рухомих робочої рідини, $C_{\text{ПР}}$ — коефіцієнт жорсткості пружини, $F_{\text{ТР0}}$ — модуль сили сухого трия.

Результати дослідження

Розглянемо спочатку динаміку золотника гідророзподільця як осцилятора [1] з нелінійним кулоновським триєм $f(t)$, згідно формулі (2), разом з рівнянням руху

$$m_{\text{ГР}} \frac{d^2 x_{\text{ГР}}}{dt^2} = -k x_{\text{ГР}} + f(t), \quad (23)$$

де $k = 2C_{\text{ПР}}$.

Змінні, структура і логічні зв'язки нерівностей сили $f(t)$, згідно вираженню (2), потребують реалізації в цифровій ЕВМ визначення моменту часу, коли швидкість золотника $V_{\text{ГР}}$ приймає нульове значення. На рисунку 1, а показана ланка блоків, в яку входить логічний блок  пакета VisSim, призначений при швидкості $V_{\text{ГР}} = 0$ видавати сигнал «1», але таку функцію блок не виконує, хоча крива швидкості 8 разів приймає значення рівне нулю (рисунки 1, а). Тому виникла необхідність сигналу нульової швидкості сформувати приблизно (рисунки 1, б).

З допомогою ланки блоків модуль швидкості менше, ніж $0,02 \text{ м/с}$, в часі $0,017 \text{ с}$ 2 рази приймає значення, рівне нулю (крок інтегрування прийнято $2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, метод інтегрування Рунге-Кутта 4 ступеня точності). В часі $0,017 < t \leq 0,025 \text{ с}$ за нуль швидкості 1 раз приймає значення $0,013 \text{ м/с}$, три рази в часі $0,025 < t \leq 0,5 \text{ с}$ значення $0,008 \text{ м/с}$ приймає за нуль, 2 рази значення швидкості $0,001 \text{ м/с}$ в інтервалі часу $0,5 < t \leq 0,065 \text{ с}$ приймає за нуль.

Таким чином, в відповідні моменти часу на осцилографі (*plot*) з'являються 8 піків з значенням 1 (на рисунку 1, б). Таке різництво значень $V_{\text{ГР}}$, приймає за нуль, пов'язано з значенням прискорення золотника в момент рівності швидкості нулю. При наближенні до умови рівноваги прискорення зменшується і для отримання 7 і 8 значень нульової швидкості з'явилася можливість зменшити значення швидкості до $0,001 \text{ м/с}$, приймає за нуль. Слід зауважити, що зазначені інтервали часу і значення швидкості на них, приймає за нуль, залишаються незмінними в широкому діапазоні зміни початкових умов швидкості (від $0,005$ до $0,55 \text{ м/с}$ з дискретністю $0,01 \text{ м/с}$). Реалізація такого підходу здійснюється з допомогою блоків *step*  (рисунки 1, б). Помилка, викликана наближеним визначенням нульової швидкості в ЕВМ, з точки зору практики, невелика.

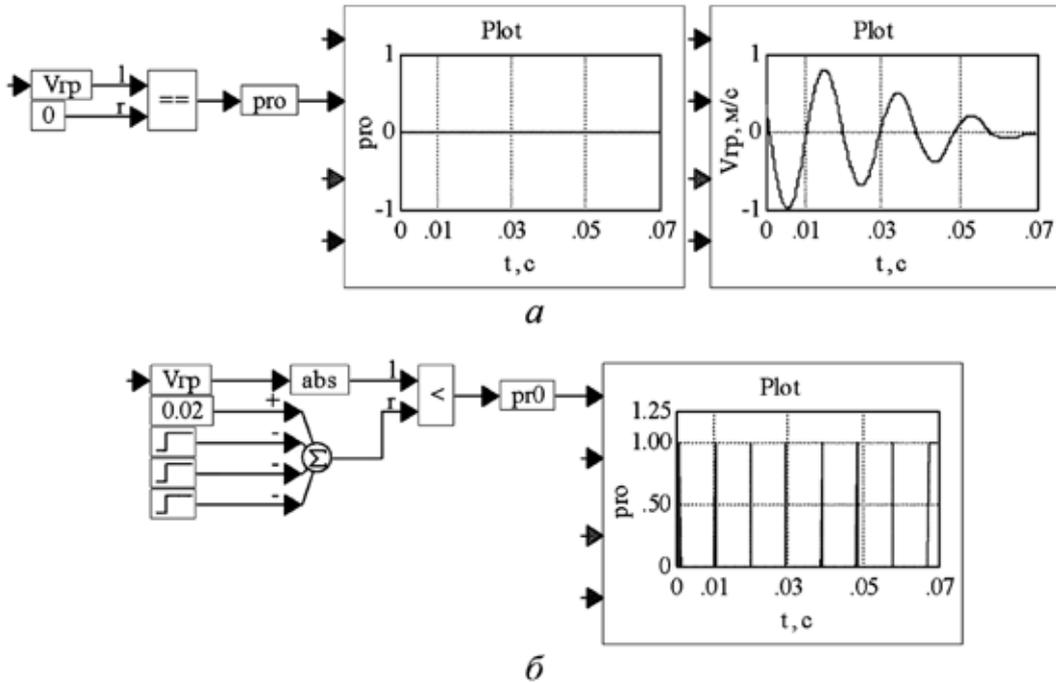


Рисунок 1— Поиск решения для определения нулевого значения скорости золотника-осциллятора; а – с помощью логического блока контроля нуля скорости; б – диаграммы блоков, с приближением определяющей нуль скорости

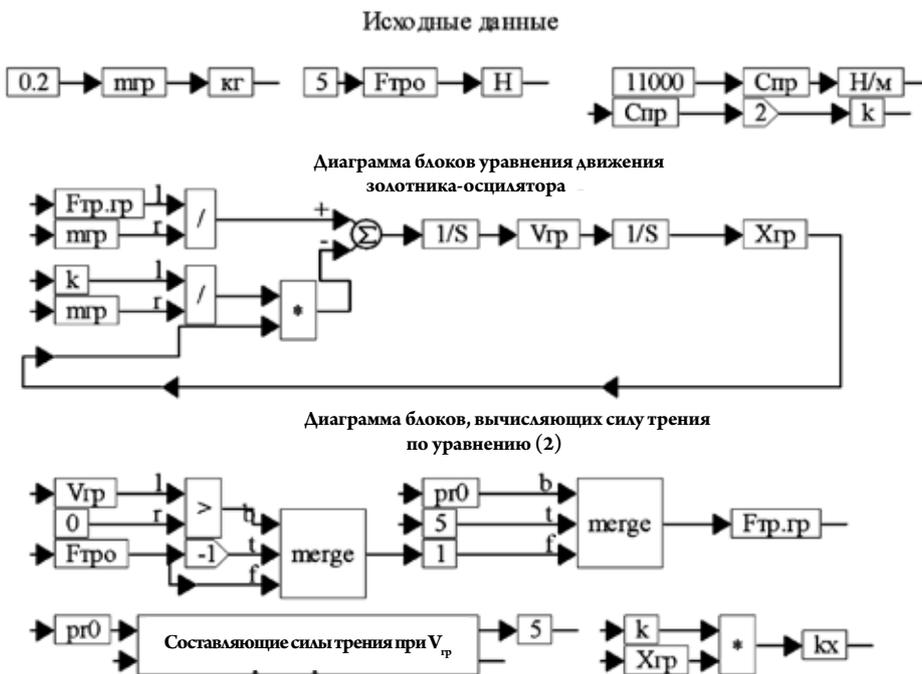


Рисунок 2 — Диаграмма вычислительных блоков, построенная по уравнениям (1), (2)

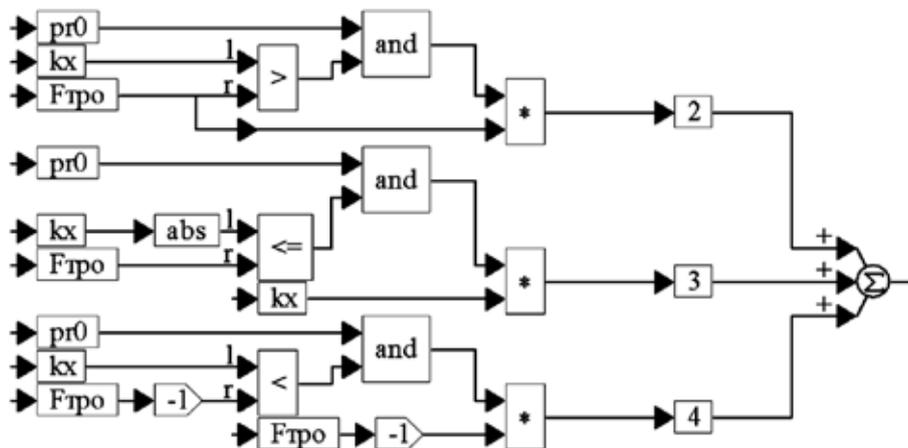


Рисунок 3 — Цепочки блоков, включенных в компанд-блок «Составляющие силы трения при $V_{гр} = 0$ »

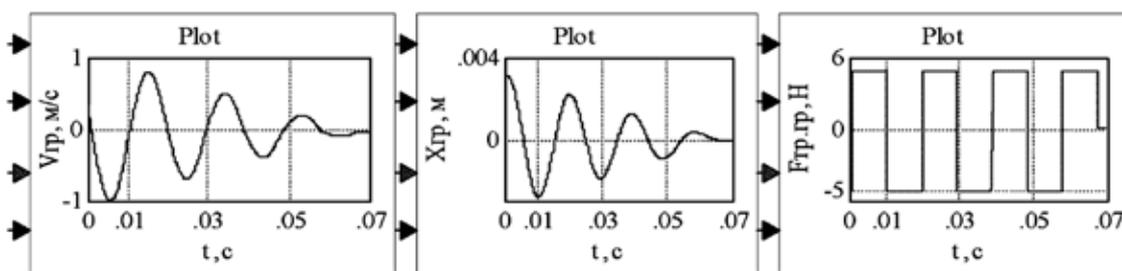


Рисунок 4 — Переходные процессы изменения скорости, перемещения и силы трения (включающей составляющие при нулевой скорости) золотника-осциллятора при начальных условиях $V_{гр}(0) = 35$ м/с, $x_{гр}(0) = 0,003$ м

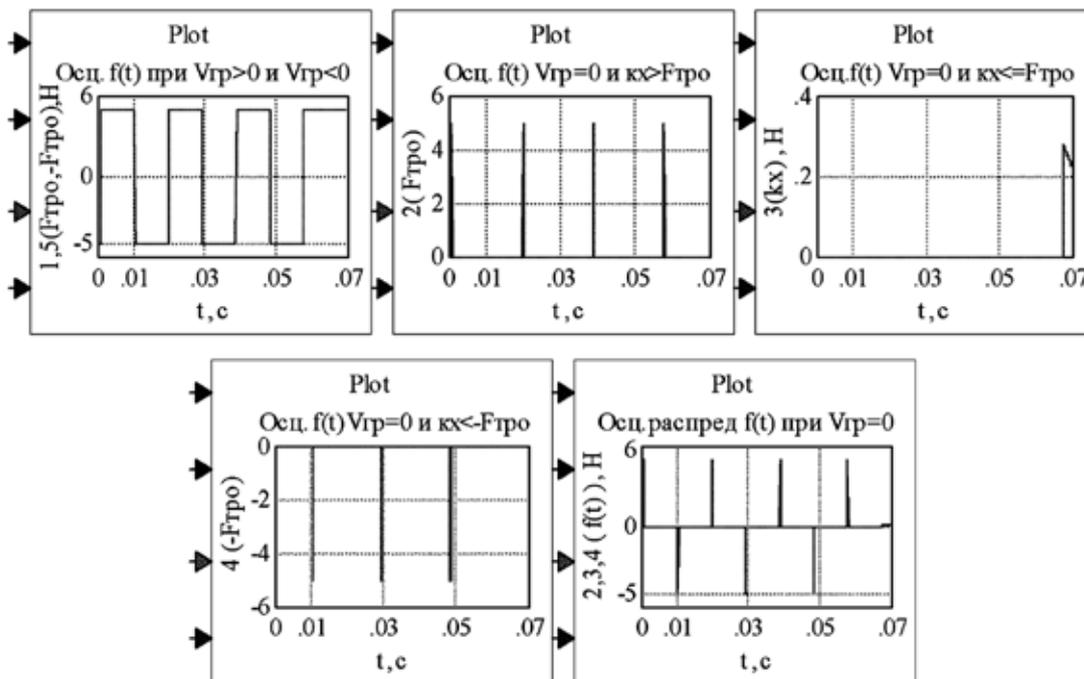


Рисунок 5 — Осциллограммы, характеризующие изменения всех составляющих силы трения в функции скорости

Перейдем к исследованию динамики золотника-осциллятора, согласно уравнений (2) и (23). На рисунке 2 показана диаграмма вычислительных блоков пакета *VisSim*, с помощью которой можно получить динамические характеристики и оценить влияние на них сил трения при нулевой скорости. Компаунд-блок «Составляющие силы трения при $V_{ГР} = 0$ » насчитывает 30 вычислительных и логических блоков (рисунок 3).

Цепочки блоков построены на основе (2)–(4) условий (строчек) формулы (2), которые описывают значения $f(t)$ при $V_{ГР} = 0$ (цифры на рисунке 3 соответствуют строчкам формулы (2)). Цифрой 5 (рисунок 2) обозначен выход сумматора, подключенный на вход блока *merge*, на выходе которого формируется сила трения $F_{ТГР} = f(t)$.

На рисунке 4 изображены осциллограммы переменных $V_{ГР}$, $x_{ГР}$ и $F_{ТГР}$ полученные при моделировании динамики золотника с начальными условиями

$$dx_{ГР}(0)/dt = V_{ГР} = 0 = 0,35 \text{ м/с}, x_{ГР}(0) = 0,003 \text{ м}$$

и составляющими $f(t)$ при нулевой скорости. Переход в установившийся (равновесный) режим происходит с затухающими колебаниями с частотой $f = k/m_{ГР} = 52,78 \text{ Гц}$.

На рисунке 5 показаны ступени и пики значений $f(t)$ при переходном, затухающем колебательном процессе как при $V_{ГР} > 0$ так и при $V_{ГР} < 0$ (осциллограмма с обозначением 1), так и при $V_{ГР} = 0$ (осциллограммы с обозначениями 2–4). На заголовках осциллограмм указаны условия их получения в соответствии с формулой (2). Последняя осциллограмма (во 2-м ряду справа) показывает распределение во времени колебательного процесса всех значений составляющих $f(t)$ при $V_{ГР} = 0$, обозначенных цифрами 2, 3, 4.

При изменении начальных условий меняется число колебаний, а значит, длительность переходного процесса, но сохраняется частота колебаний и характер затуханий. Представляет практическую значимость оценка влияния составляющих математической модели сухого трения при скорости $V_{ГР} = 0$ на динамику золотника-осциллятора. Для оценки погрешности скорости и перемещения используем следующее выражение

$$I = \frac{\int_0^{t_{\text{кр}}} |V_{ГР}(t) - V_{ГР}^*(t)| dt}{\int_0^{t_{\text{кр}}} |V_{ГР}^*(t)| dt} \cdot 100, \% \quad (24)$$

где $V_{ГР}^*(t)$ — скорость золотника при моделировании силы трения без составляющих при нулевой скорости. Числитель выражения (24) с геометрической точки зрения представляет собой разность площадей под кривыми $V_{ГР}(t)$, и $V_{ГР}^*(t)$, а знаменатель — площадь под кривой $V_{ГР}^*(t)$. В целом выражение (24) можно трактовать как относительную интегральную оценку близости кривых $V_{ГР}(t)$, и $V_{ГР}^*(t)$ в функции времени исследуемого процесса. Аналогичная оценка принята для кривых перемещения $x_{ГР}(t)$, и $x_{ГР}^*(t)$. При реализации вычислительной процедуры в программной среде *Vis-*

Sim для ввода в (24) одновременно двух разных кривых были использованы две диаграммы вычислительных блоков уравнения (23) с разными моделями трения во избежание погрешностей, вносимых блоками экспорта и импорта. Значения интегральной оценки I для $x_{ГР}$ равно 2,47 %, для $V_{ГР}$ — 2,917 %. Они показывают степень влияния при замене точной теоретической модели сухого трения золотника-осциллятора (уравнение (2)) моделью, содержащей лишь 1 и 5 строки уравнения (2), которые содержатся в формуле Кронекера [6].

Здесь следует отметить, что при окончании переходного процесса (равновесное состояние), работая с моделью (2), мы получаем ответ на вопрос: с какой силой трения будет начинаться повторное движение золотника-осциллятора. Это может иметь практическую значимость для оценки крутящего момента страгивания вала гидромотора, силы страгивания штока гидроцилиндра и др.

В большинстве практических приложений, в статьях, пособиях пользуются более простой моделью сухого трения, а именно, формулой Кронекера

$$\text{sign}(V_{ГР}) = \begin{cases} +1 & \text{при } V_{ГР} > 0, \\ -1 & \text{при } V_{ГР} < 0. \end{cases} \quad (25)$$

В ряде вычислительных пакетов, например в *VisSim*, применяется блок *sign*, реализующий зависимость (26) (в рассматриваемом случае она записана относительно скорости),

$$\text{sign}(V_{ГР}) = \begin{cases} +1 & \text{при } V_{ГР} > 0, \\ 0 & \text{при } V_{ГР} = 0, \\ -1 & \text{при } V_{ГР} < 0, \end{cases} \quad (26)$$

которая отличается от формулы Кронекера наличием средней строки со значением 0 при $V_{ГР}(0)$, и которая отсутствует в уравнении (2). Представляет практическую значимость сравнения динамических процессов для двух одинаковых золотников-осцилляторов, описываемых уравнением (23), но с разными моделями трения: на основе формулы Кронекера и зависимости (26). Сравнение таких моделей было выполнено с помощью диаграммы блоков, показанной на рисунке 6.

Верхняя цепочка блоков запоминает кривую силы сухого трения согласно формулы Кронекера при решении дифференциального уравнения (23). Нижняя цепочка записывает осциллограмму силы сухого трения при решении уравнения (23) с помощью блока *sign* пакета *VisSim* (зависимости (26)). Выход сумматора подключен к осциллографу (справа на рисунке 6), который зафиксировал нулевое отклонение даже при усилении предполагаемого отклонения в 10 000 раз. Анализ осциллограмм рисунка 6 показывает, что модель трения, представленная функцией Кронекера, и модель, содержащая нулевую строку (зависимость (26)) эквивалентны.

Физически этот машинный эксперимент объясняется тем, что модель трения по формуле Кронекера, фиксируя в виде 1 или -1 только значения скорости больше или меньше нуля, при нулевой скорости в процессе моделирования в

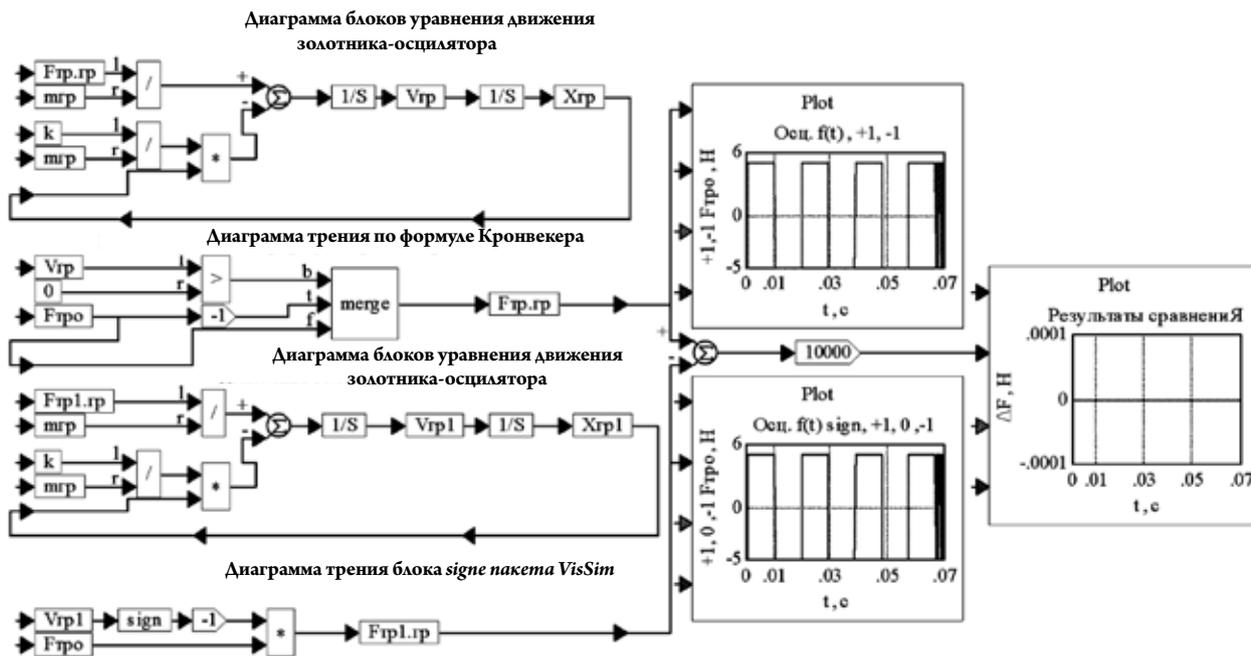


Рисунок 6 – Сравнение кривых $F_{\text{тр.гр}}$ полученных с использованием разных математических моделей

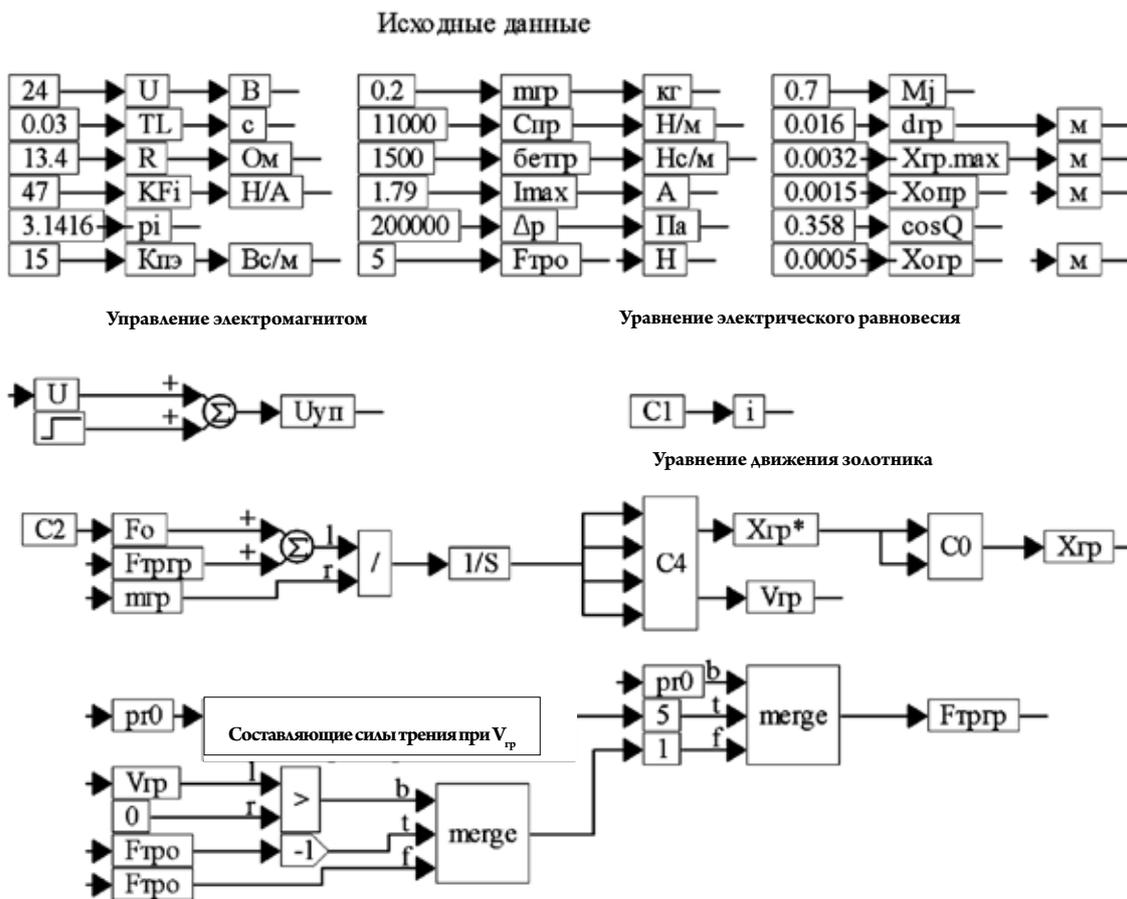


Рисунок 7 — Диаграмма вычислительных блоков узла «электромагнит-золотник гидрораспределителя»

программе *VisSim* выдает сигнал нуль.

Таким образом, рассматривая золотник как осциллятор, силу кулоновского трения следует представлять при моделировании формулами (2) и (25) и по оценке (24) принять решение по выбору формулы; погрешность, вызванная исключением из формулы (2) трех неравенств со значением силы трения при скорости равной нулю, например, при принятых начальных условиях $V_{гр}(0) = 35 \text{ м/с}$, $x_{гр}(0) = 0,003 \text{ м}$ составляет по оценке (24) для кривой перемещения 2,47 % и для скорости 2,917 %; при окончании переходного процесса (равновесное состояние), работая с моделью (2), получаем значение силы трения в начале повторного движения золотника-осциллятора. Это может иметь практическую значимость для оценки крутящего момента страгивания вала гидромотора и силы страгивания штока гидроцилиндра.

Предлагаемая относительная интегральная оценка (24) оказалась эффективной для определения численного отличия знакопеременных кривых; машинный эксперимент в пакете *VisSim* показал, что модель трения, представленная функцией Кронекера, и модель, содержащая нулевую строку (зависимость (26)), эквивалентны.

Рассмотрим эти вопросы применительно к узлу «электромагнит–золотник гидрораспределителя» в целом с теми же параметрами золотника согласно уравнений (12)–(21) при прямом ходе гидроцилиндра. Диаграмма вычислительных блоков пакета *VisSim*, с помощью которой можно получить динамические характеристики рассматриваемого узла и оценить влияние на них сил трения при нулевой скорости, показана на рисунке 7.

С помощью компанд-блоков диаграмма рисунка 7 выглядит более наглядно. В компанд-блоках содержатся цепочки блоков, моделирующие уравнения: в С0 — уравнение (20), в С1 — уравнение (12), в С2 — уравнения (13)–(19), (21), в С4 — уравнение (22), в блоке «Составляющие силы трения при $V_{гр}=0$ » — строки 2—4 выражения (21).

На рисунке 8 показана цепочка блоков, определяющая момент времени, когда $V_{гр}$ примет нулевое значение (при дискретности 10^{-6} с и принятым нулевым значением скорости 10^{-5} м/с). Справа изображена кривая скорости золотника, не содержащая колебаний, а изменение знака которой, с прохождением через нуль, осуществляется с помощью управления.

На рисунке 9 изображены кривые скорости и перемещения золотника, силы трения и составляющей силы трения при $V_{гр}=0$, переменной F_0 (16), полученные при смещении золотника из нейтрального положения в другую позицию с последующим возвратом в исходное состояние под действием центрирующих пружин.

Из рисунка 9 видно, что переходные процессы изменения скорости и перемещения золотника не носят колебательный характер: скорость принимает нулевое значение только при реверсе золотника в связи с отработкой заданного перемещения. Следует

отметить, что только третья составляющая силы трения, соответствующая третьей строке формулы (21), за время переходного процесса не остается равной нулю (слева во 2 ряду рисунка 9).

Оценим влияние этой составляющей силы трения. При значении $V_{гр} = 10^{-5} \text{ м/с}$, принимаемой за нуль, шаге интегрирования $\Delta = 10^{-6} \text{ с}$ и времени интегрирования 1,25 с значения интегральной оценки (24) составляют по перемещению $x_{гр} 3,7 \cdot 10^{-3} \%$, по скорости $V_{гр} 2,56 \cdot 10^{-2} \%$. При движении золотника в рассматриваемом узле без колебаний и реверсирования за счет управления (прохождение скорости, равной нулю) с достаточной для практики точностью можно пользоваться моделью сухого трения по формуле Кронекера. Определение этих значений получено по методике и построению диаграммы, аналогичной рисунку 6, примененной для золотника-осциллятора.

Сравнение кривых сил трения, полученных при моделировании с блоком *sign* и при модели $F_{тргр}$ с отключением составляющих при $V_{гр} = 0$ (фактически по формуле Кронекера) выполнено с помощью диаграммы рисунка 10.

Диаграмма на рисунке 10 подтверждает идентичность результатов, поэтому в случае исследования динамики узла «электромагнит–золотник гидрораспределителя» правомерно использование блока *sign* пакета *VisSim*. С практической точки зрения применение точной модели силы трения оправдано, если технические требования к показателям качества переходных процессов высоки.

Выводы

1. Рассматривая золотник как осциллятор, силу кулоновского трения следует представлять формулами (2) и (25) или (26), и по оценке (24) принимать решение о выборе модели. При моделировании золотника в составе узла «электромагнит–золотник гидрораспределителя» силу кулоновского трения следует представлять формулами (21) и (25) или (26), и по оценке (24) выбрать модель.

2. Погрешность, вызванная исключением из формулы (2) трех неравенств со значением силы трения при скорости равной нулю, например, при принятых начальных условиях $V_{гр}(0) = 35 \text{ м/с}$, $x_{гр}(0) = 0,003 \text{ м}$ в процессе моделирования золотника-осциллятора составляет для кривой перемещения 2,47 % и для скорости 2,917 %.

3. При окончании динамического процесса (равновесное состояние), работая с моделью (2), получаем значение силы трения в начале повторного движения золотника-осциллятора. Это может иметь практическую значимость для оценки крутящего момента страгивания вала гидромотора и силы страгивания штока гидроцилиндра.

4. Предлагаемая относительная интегральная оценка для определения близости знакопеременных кривых оказалась эффективной.

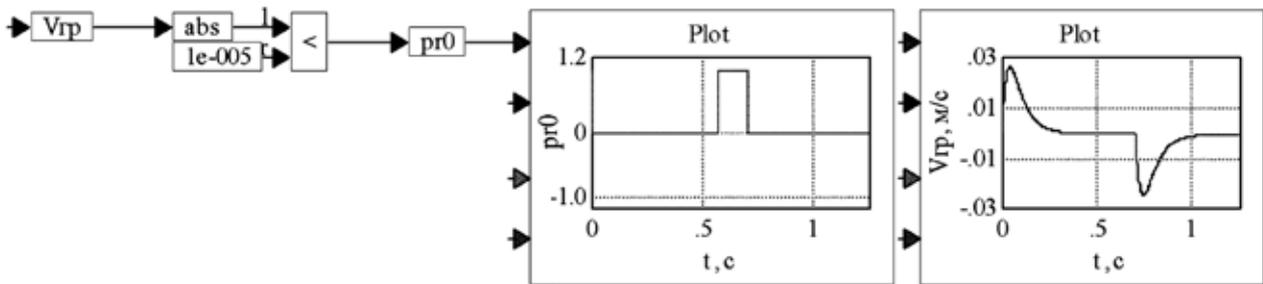


Рисунок 8 — Диаграмма вычислительных блоков для определения

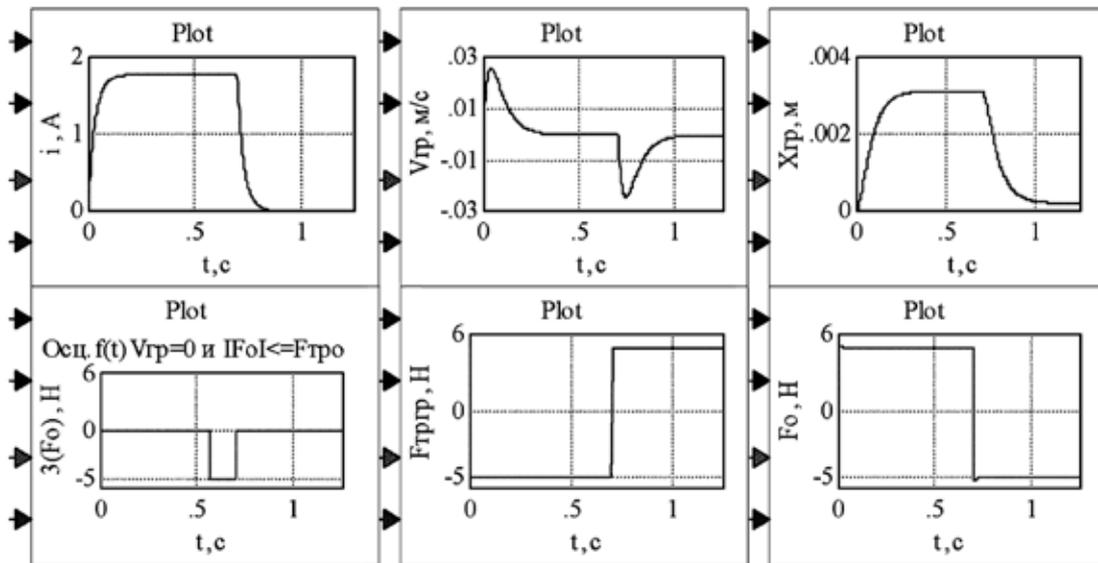


Рисунок 9 — Кривые переменных $V_{гр}$, $x_{гр}$, $F_{грп}$, F_0 и составляющая 3 силы трения при $V_{гр} = 0$

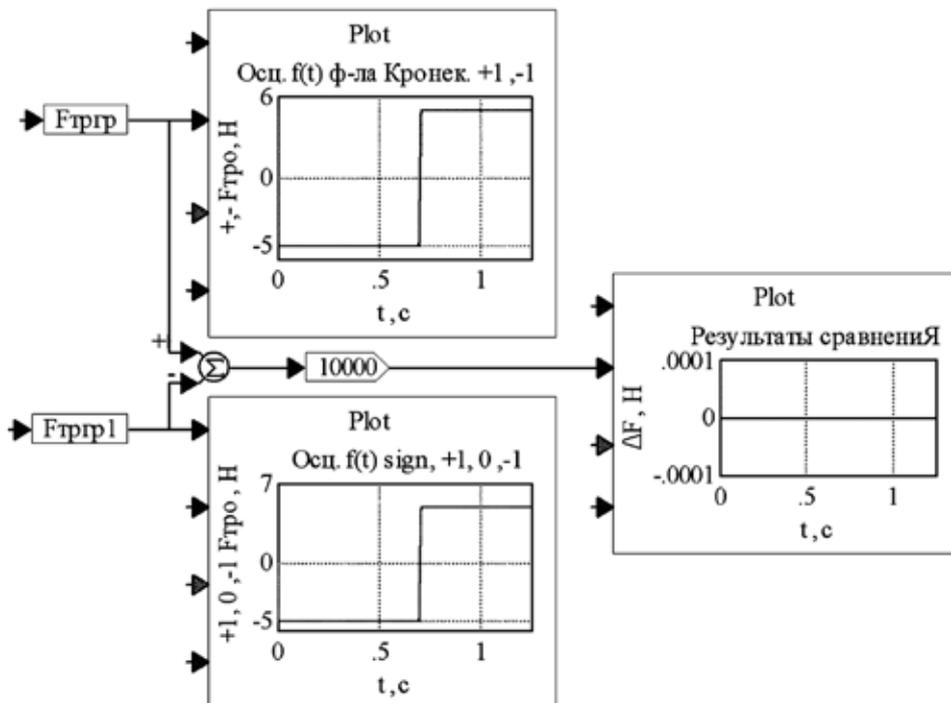


Рисунок 10 — Сравнение кривых $F_{грп}$, полученных при разных математических моделях сухого трения (Кронекера и блока sign) при моделировании двух идентичных узлов «электромагнит-золотник гидрораспределителя» (на рисунке не показанных)

5. При русі золотника в розглянутому вузлі «електромагніт–золотник гідророзподільця» без коливань і реверсування за рахунок управління (проходження швидкості, рівної нулю) з достатньою для практики точністю можна користуватися моделлю сухого тертя за формулою Кронекера. Погрешність, згідно інтегральної оцінки (24) за переміщенням $x_{гр}$, становить $3,7 \cdot 10^{-3} \%$, за швидкості $V_{гр} 2,56 \cdot 10^{-2} \%$.

6. Проведені машинні експерименти в пакеті *VisSim* підтвердили ідентичність моделей сухого тертя, представлених формулою Кронекера і блоком *sign*, як при дослідженні динаміки золотника-осцилятора, так і золотника в складі вузла «електромагніт-золотник гідророзподільця» гідропривода технологічної машини.

Література

1. Андронов, А.А. Теорія коливань / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — М.: Госиздат. фіз.-мат. літ., 1959. — 910 с.
2. Андронов, А.А. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования / А.А. Андронов, А.Г. Майер // Автоматика и телемеханика. — 1947. — Т.8. — Вып. 5. — С. 314—334.
3. Коробочкин, Б.Л. О влиянии сухого трения в направляющих на устойчивость гидравлических следящих систем копировальных станков / Б.Л. Коробочкин, А.И. Левин // Автоматика и телемеханика. — Т. 22. — Вып. 9. — С. 1253—1256.
4. Гамынин, Н.С. Гидравлический следящий привод / Н.С. Гамынин, Я.А. Каменир, Б.Л. Коробочкин и др., под ред. В.А. Лещенко. — М.: Машиностроение, 1968. — 564 с.
5. Скляревский, О.М. Об'ємний гідропривод: навч. посібник / О.М. Скляревский. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2001. — 212 с.
6. Гамынин, Н.С. Гидравлический привод систем управления / Н.С. Гамынин. — М.: Машиностроение, 1972. — 376 с.

References

1. Andronov, A.A. Teoriya kolebaniy / A.A. Andronov, A.A. Vitt, S.E. Khaykin. — M.: Gosizdat. fiz.-mat. lit., 1959. — 910 s.
2. Andronov, A.A. Zadacha Vyshnegradskogo v teorii pryamogo regulirovaniya / A.A. Andronov, A.G. Mayer // Avtomatika i telemekhanika. — 1947. — T.8. — Vyp. 5. — S. 314—334.
3. Korobochkin, B.L. O vliyaniy sukhogo treniya v napravlyayushchikh na ustoychivost gidravlicheskih sledyashchikh sistem kopirovalnykh stankov / B.L. Korobochkin, A.I. Levin // Avtomatika i telemekhanika. — T. 22. — Vyp. 9. — S. 1253—1256.

9. — S. 1253 — 1256.

4. Gamynin, N.S. Gidravlicheskiy sledyashchiy privod / N.S. Gamynin, Ya.A. Kamenir, B.L. Korobochkin i dr., pod red. V.A. Leshchenko. — M.: Mashinostroyeniye, 1968. — 564 s.

5. Sklyarevskiy, O.M. Obyemniy gidroprivod: navch. posibnyk / O.M. Sklyarevskiy. — Zaporizhzhya: ZNTU, 2001. — 212 s.

6. Gamynin, N.S. Gidravlicheskiy privod sistem upravleniya / N.S. Gamynin. — M.: Mashinostroyeniye, 1972. — 376 s.

Надійшла

УДК 62-82

Оцінка математичних моделей сухого тертя у рівняннях руху механічних елементів гідросистем

З.Я. Лур'є, П.М. Андренко, Є.М. Цента

Наведено аналіз робіт, присвячених теорії коливань, питанням стійкості та динаміці гідравлічних систем з урахуванням сухого тертя. Трьом з п'яти залежностей, що описують процес тертя, надана оцінка. Доведено можливість визначення сили тертя на початку повторного руху золотника, що може мати практичну значимість для оцінки крутного моменту зрушення вала гідромотора. Запропоновано ефективну оцінку для визначення близькості знакозмінних кривих. За результатами машинного експерименту доведено ідентичність моделі сухого тертя згідно з формулою Кронекера та моделі блока «*sign*» пакета *VisSim*.

Ключові слова: математична модель, рівняння руху, сухе тертя, гідросистема, золотник-осцилятор, динамічна характеристика.

UDC 62-82

An assessment of the mathematical models of dry friction in the equations of motion of the mechanical components of hydraulic systems

Z.Ya. Lurie, P.N Andrenko, E.N Tsenta

The works on the theory of oscillations, stability and dynamics of hydraulic systems considering the dry friction are analyzed in this article. Three of the five inequalities (describing the process of friction) are estimated. The possibility of determining the friction force at the beginning of repeated spool motion that can have practical significance for assessing the shift shaft torque of the hydraulic motor is proved. An effective evaluation to determine the proximity of the alternating curves is proposed. The identity of the dry friction model according to the Kronecker limit formula and the model of the block «*sign*» of the visual block diagram language *VisSim* is proved by the results of the machine experiment.

Keywords: mathematical model, equations of motion, dry friction, hydraulic system, spool, dynamic characteristic.