

О НЕКОТОРЫХ НЕТОЧНОСТЯХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАШИН

ON THE CERTAIN DISCREPANCIES OCCURRED IN THE PROCESS OF SOLVING OF THE EQUATIONS OF MOTION OF THE FLUID WHILE DESIGNING OF HYDRAULIC MACHINES

Предложена модель квазипотенциального течения идеальной жидкости, которая удовлетворяет всем свойствам вязкой жидкости и основному уравнению Эйлера передачи энергии в рабочем колесе. Задачу проектирования лопасти рабочего колеса на заданные параметры расхода и числа оборотов в соответствии с гипотезой бесконечно большого числа бесконечно тонких лопастей обычно сводят к решению некоторой обратной осесимметричной задаче, в которой определяется форма поверхности потока, осредненного по окружной координате и времени. Поле течения жидкости разделяется на две характерные области: ядро потока, где влияние вязкости мало, и пограничный слой, в котором течение вихревое и выполняется условие прилипания. Вихревые потери, обусловленные развитием вторичных течений, могут быть минимизированы в потоке с взаимно-ортогональным расположением векторов скорости и вектора присоединенного вихря. Профилирование лопастной системы с учетом этих условий позволяет улучшить характеристики проектируемой гидравлической машины.

Ключевые слова: идеальная и вязкая жидкости, уравнения Навье–Стокса, квазипотенциальный поток, рабочее колесо, профилирование лопасти.

Введение

На современном этапе развития при достигнутом уровне коэффициента полезного действия отдельных типов насосов порядка 70–90% дальнейшее повышение их эффективности в условиях рыночных отношений должно основываться на развитой теории и методах гидродинамических расчетов на базе ЭВМ.

Полученные таким образом результаты могут быть использованы для целенаправленного изменения и дальнейшего совершенствования гидродинамических показателей насоса, в частности, энергетических, кавитационных, силовых нагрузок и нестационарных характеристик потока, что позволяет заменить физический эксперимент вычислительным и сократить сроки их разработки.

Развиваемый новый теоретический подход к проектированию проточных частей гидравлических машин, который применительно к гидравлическим турбинам оказался успешным, в теории центробежных насосов и заводской практике их создания является новым научным направлением.

Выбор модели течения жидкости в проточной части

Совокупность формул, позволяющих для заданного набора значений конструктивных параметров x_1, x_2, \dots, x_n рассчитать изделие и определить все его характеристики, в том числе значений функций ограничений и критерия оптимальности на основе решения обратной и прямой задач, называют математической моделью проектируемого изделия.

Математическая модель изделия разрабатывается на основе теории процессов функционирования изделия и методик его расчета. Уточнение модели может производиться путем сравнения результатов расчетов с характеристиками, полученными экспериментальным путем. Использование математической модели позволяет во многих случаях заменить продолжительное и дорогостоящее экспериментирование с макетами проектируемых изделий серией расчетов с применением ЭВМ.

При проектировании и оценке проектного решения течение рабочей жидкости в проточной части гидравлической машины принимается осесимметричным, вихревым. Поле скоростей такого потока одинаково

на кожній площині, проходящій через некоторую ось, но вектори скоростей не обов'язательно лежат в этих площинях.

На основе фундаментального уравнения Эйлера [1] для рабочего колеса насоса величина преобразованной в нем энергии, называемой теоретическим напором H_T , определяется выражением

$$H_T = \omega(V_{u2}R_2 - V_{u1}R_1) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}, \quad (1)$$

где ω , V_u , R , V_1, V_2 , W_1, W_2 , U_1, U_2 — соответственно угловая, проекция абсолютной V на переносную U , W — относительная и окружная скорости потока на входе 1 и выходе 2 из рабочего колеса, R — радиус точки. Роль центробежных и кориолисовых сил в рабочем процессе насоса в абсолютном, относительном и переносном движениях и их влияние на основной параметр H_T в зависимости от геометрических и кинематических параметров рабочего колеса можно оценить следующим образом. Учитывая свойство кориолисовых сил, определяемых выражением $\vec{F} = 2\vec{\omega} \times \vec{W}$, и центробежных сил, проходящих через ось вращения, выражение (1) можно представить в виде [1]

$$H_T = H_{\text{еб}} + H_{\text{к}} = (U_2^2 - U_1^2) + (W_{2u}U_2 - W_{1u}U_1), \quad (2)$$

где первое слагаемое определяет величину энергии, передаваемую кориолисовыми силами инерции, а второе — циркуляционными. При введении относительных размеров геометрических и кинематических параметров проточной части делением на диаметр рабочего колеса D_2 и выполнения соответствующих преобразований, доли энергии, передаваемых жидкости центробежным колесом посредством кориолисовых и циркуляционных сил будут:

$$\frac{H_{\text{к}}}{H_T} = h_{\text{к}} = \frac{1 - \bar{D}_1^2}{K_Z(1 - q) - \varphi \bar{D}_1^2}, \quad (3)$$

$$\frac{H_{\text{еб}}}{H_T} = h_{\text{еб}} = 1 - \frac{1 - \bar{D}_1^2}{K_Z(1 - q) - \varphi \bar{D}_1^2}, \quad (4)$$

где $\varphi = \frac{V_{u1}}{U_1}$ — относительная закрутка потока на входе в центробежное колесо, $\bar{D}_1 = \frac{D_1}{D_2}$ — относительный диаметр, $K_Z = \frac{I_T}{H_{T\infty}}$ — коэффициент влияния конечного числа лопаток, $q = (V_{2m}/U_2) \text{ctg} \beta_2$ — расходный параметр, V_{2m} — меридианная скорость.

Так как центробежные силы проходят через ось вращения и не создают момента относительно оси, а кориолисовы силы перпендикулярны скорости относительного движения и силе трения, то эти силы не оказывают влияния на процесс преобразования энергии жидкости в рабочем колесе. Следовательно, изменение энергии жидкости от этих сил не происходит. Поэтому можно считать, что вязкость жидкости и центробежные силы не влияют на величину потерь энергии. Таким образом,

на основе выражения (2) можно считать, что эффективность передачи энергии рабочим колесом центробежного типа выше, чем осевого, для которого $u_2 = u_1 = u$, $H_{\text{к}} = 0$, и поэтому вся величина теоретического напора может создаваться только вследствие циркуляционного обтекания реальной жидкостью.

На основе приведенных упрощенных теоретических объяснений можно делать ориентировочные предварительные оценки геометрическим и кинематическим параметрам проточной части при проектировании рабочих колес и объяснить целесообразность применения математической модели и выбора различных методов проектирования быстроходных и тихоходных гидравлических машин, ориентируясь на объективный многолетний опыт проектирования насосов. Поэтому, как правило, тихоходные машины проектируются преимущественно приближенными методами конформных отображений, а быстроходные аналитическими методами гидродинамических особенностей. Так, из формул (3) и (4) видно, что значения $h_{\text{к}}^{\text{кор}}$ и $h_{\text{еб}}$ определяются \bar{D}_1 , q и (значение можно K_Z принять постоянным). Отношение $\bar{D}_1 = 1$ соответствует осевому колесу, удельная работа которого H_T создается только циркуляционными силами: $h_{\text{еб}} = 1$, $h_{\text{к}}^{\text{кор}} = 0$. Поэтому для таких насосов профилирование лопасти должно выполняться методами, которые бы позволяли в процессе проектирования обеспечить циркуляционное обтекание с требуемым распределением скорости по контуру обтекаемого тела и углом натекания на лопасть.

В случае центробежных насосов с $\bar{D}_1 > 0,5-0,6$ может иметь место передача энергии жидкости, когда $h_{\text{еб}} > 0$, $h_{\text{к}}^{\text{кор}} > 0$, т.е. удельная работа создается как кориолисовыми, так и циркуляционными силами. Для таких насосов профилирование лопаток рабочего колеса и обеспечение благоприятных углов атаки уже имеет существенное значение, а в случае, когда $H_T = h_{\text{к}}^{\text{кор}}$, профиль лопатки рабочего колеса может быть выполнен упрощенными приближенными методами.

Хотя поток, протекающий в проточной части, имеет сложную пространственную структуру и течение жидкости в общем виде поддается математическому описанию уравнениями вязкой жидкости Навье–Стокса, но на практике пока не представляется возможным провести достаточно точный гидродинамический расчет пространственного течения жидкости как во всей машине в целом, так и в ее отдельных элементах. Причинами этому являются:

- 1) отсутствие доказательства существования и единственности их решения;
- 2) турбулентное течение не имеет соответствующих моделей для замыкания уравнений Рейнольдса;
- 3) уровень развития численных методов расчета и вычислительной техники.

Поэтому практические потребности инженерных расчетов трехмерных течений в элементах гидравлических машин ограничиваются введением ряда упрощений и

применением модели течений, расчет которых находится в пределах возможных вычислительных алгоритмов.

Выбор модели течения жидкости в рабочем колесе

В ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 каждая проекция вектора скорости V_1, V_2, V_3 зависит от трех координат

$$\begin{aligned} V_1 &= f_1(q_1, q_2, q_3), \\ V_2 &= f_2(q_1, q_2, q_3), \\ V_3 &= f_3(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Поток, называемый трехмерным трехпараметрическим, заменяется потоком идеальной жидкости, отнесенным к такой же координатной системе, но все три компоненты скорости являлись бы функциями двух координат q_1, q_2 и не зависели от третьей q_3 , который называют трехмерным двухпараметрическим. В этом случае

$$\begin{aligned} V_1 &= f_1(q_1, q_2), \\ V_2 &= f_2(q_1, q_2), \\ V_3 &= f_3(q_1, q_2) \end{aligned} \quad (5)$$

При проектировании рабочего колеса дифференциальные уравнения течения жидкости осредняют по окружной координате q_3 и рассматривают двухпараметрическое течение идеальной жидкости. Эти уравнения принимают в качестве исходных при решении обратной задачи [2]. В рамках такого подхода выражение (5) равносильно такому условию, так как при числе оборотов в минуту $n \geq 1500$ рабочее колесо совершает $n \geq 25$ оборотов в секунду и поэтому правомерно считать, что

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_3} = \frac{\partial V_2}{\partial q_3} = \frac{\partial V_3}{\partial q_3} = 0. \quad (6)$$

При выполнении условия (6) функциональный определитель от составляющих скорости по координатам тождественно равен нулю, в силу основных свойств определителей. Из условия (6) следует, что между функциями V_1, V_2, V_3 существует соотношение, независимое от переменных q_1, q_2, q_3 , т.е. в двухпараметрическом потоке одна из составляющих скорости связана с двумя другими функциональной зависимостью

$$V_3 = f(V_1, V_2). \quad (7)$$

Полученный теоретический результат для двухпараметрического потока, когда одна из составляющих скорости связана с двумя другими функциональной зависимостью, приводит к новой постановке обратной задачи, которая состоит в том, что меридиональный или циркуляционный потоки при решении обратной задачи не могут задаваться произвольно.

Вводя принятые условия (6) в уравнения для вихря и неразрывности, получим для двухпараметрического вихревого потока выражения для составляющих вихря и уравнения неразрывности идентичные случаю осесимметричного течения, когда компоненты вихря также не зависят от координаты q_3 . При этом в уравнении неразрывности вместо трех членов останется два.

Таким образом, между запасом энергии единицы E массы жидкости и функции тока также существует функциональная зависимость без q_1 и q_2 . Полученное уравнение при сделанных предположениях вполне заменяет собой исходную систему.

В прикладных задачах построение математической модели — один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель — значит, решить проблему более чем наполовину.

Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Математическая модель никогда не является тождественной рассматриваемому объекту. Она не передает всех его свойств и особенностей. Основанная на упрощении, идеализации, она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, всегда носят для объекта приближенный характер. Их точность определяется степенью соответствия, адекватности модели и объекта. Вопрос о точности, о достоверности результатов — это один из самых тонких вопросов прикладной математики. Наиболее просто он решается в случае, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта и имеется большой практический опыт их применения. Тогда можно априори оценить точность результатов, которую обеспечивает рассматриваемая модель. Но так как в гидравлических машинах течение турбулентное, то при проектировании гидравлических машин турбин и насосов выбор геометрических размеров и формы проточной части с учетом взаимного влияния всех элементов для получения высоких энергетических и динамических характеристик все еще представляет собой сложную научно-техническую задачу. Она решается, в основном, на основании опыта и интуиции конструктора с использованием упрощенных математических моделей турбулентного течения рабочей жидкости в проточной части.

Особенности решения уравнений Навье–Стокса

Принято считать, что наиболее рациональное решение поставленной задачи может быть получено с использованием результатов решения уравнений Навье–Стокса [3] нестационарного трехмерного движения вязкой несжимаемой жидкости, которое в векторной форме для напряжений имеет вид

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right), \quad (8)$$

где $\vec{V} = V(x, y, z, t)$ — вектор скорости, \vec{F} — вектор массовых сил, ρ — плотность жидкости, $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z = P(x, y, z, t)$ — векторы напряжений в центре площадок, обозначения которых соответствуют направлению нормалей к ним.

Трем уравнениям (8) в проекциях на оси координат дополняются уравнение неразрывности

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

и граничные условия безотрывного обтекания и прилипания жидкости

$$V_n = 0, V_r = 0.$$

В общем случае система уравнений (8), (9) незамкнута, так как в ней число неизвестных превышает число уравнений. Для ее решения добавляют дополнительные уравнения, связывающие возникающие в жидкости касательные и нормальные напряжения с ее скоростями, которые, согласно обобщенной гипотезе Ньютона, пропорциональны соответствующим относительным скоростям и угловым деформациям жидкой частицы

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \\ P_y &= -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \\ P_z &= -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \tau_x = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \\ \tau_x &= \tau_z = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \tau_z &= \tau_y = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

где p — давление в вязкой жидкости, μ — коэффициент динамической вязкости.

После подстановки в (8) выражений нормальных и касательных напряжений согласно принятым гипотезам и, считая $\mu = \text{const}$, а $\text{div} \vec{V} = 0$, система уравнений движения вязкой жидкости, называемая уравнениями Навье–Стокса, в векторной форме имеет вид [3]

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (12)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Дифференциальное уравнение (12) в частных производных второго порядка нелинейное. Нелинейность его обусловлена членом с конвективным ускорением $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ решение векторного уравнения (12) необходимо подчинить граничному условию на поверхности тела при обтекании его потоком вязкой жидкости наряду с условием безотрывного обтекания, условию прилипания (смачивания) жидкости, т.е. нормальная и касательная составляющие скорости $V_n = 0, V_r = 0$.

Все соображения о начальных условиях для течения невязкой (идеальной) жидкости сохраняют свою силу и для вязкой жидкости. Принципиально новым является лишь изменение граничного условия на твердых границах потока. Выполнение условия прилипания совершенно не зависит от материала поверхности и степени чистоты его обработки. Оно одинаково выполняется при обтекании поверхностей как смачиваемых, так и несмачиваемых жидкостей. Это условие является общепринятым в гидромеханике вязкой жидкости.

Анализ возможных решений уравнений Навье–Стокса при полных граничных условиях показывает, что

не существует такого общего решения для уравнения Лапласа, которое удовлетворяло бы двум граничным условиям для касательной и нормальной производных потенциала на теле [3]. Из этого следует, что безвихревое движение вязкой жидкости, удовлетворяющее уравнению движения, не удовлетворяет граничным условиям на теле. Иными словами, безвихревое течение вязкой жидкости во всей области течения, в том числе и около твердых стенок, не может существовать, т.е. уравнения Навье–Стокса описывают вихревое течение жидкости.

Нелинейность уравнений Навье–Стокса и отсутствие потенциала скорости очень затрудняют решение уравнений. До настоящего времени не разработаны общие методы решения нелинейных уравнений Навье–Стокса, нет общей формулировки и доказательства теорем существования и единственности [4], а существуют утверждения, что они вообще неверны [5].

Необходимость удовлетворять одновременно двум граничным условиям на поверхности тела делает возможным получить точные решения этих уравнений только для простейших частных случаев, когда конвективное ускорение можно считать равным нулю. Численные методы, позволяющие решать приближенные уравнения Навье–Стокса в случае медленных течений, учитывают конвективное ускорение, но по величине инерционные силы очень малы по сравнению с силами вязкости. Такой подход позволяет применить гипотезу Прандтля о том, что силы вязкости в наибольшей мере проявляют себя около твердых границ тел в потоке жидкости, а на некотором удалении от этих границ они пренебрежимо малы, послужил развитию моделей теории пограничного слоя на протяжении XX-го века.

Поскольку свойство вязкости присуще реальным жидкостям независимо от режима их движения, и при переходе от ламинарного течения к турбулентному другие физические свойства не изменяются, то можно предполагать, что обобщенная гипотеза Ньютона и уравнение Навье–Стокса справедливы как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости. Но в последнем случае использовать уравнение Навье–Стокса для получения каких-либо прикладных решений практически невозможно. Входящие в него мгновенные скорости и давление при турбулентных режимах являются пульсирующими величинами. Даже если эти параметры удастся найти путем решения уравнений Навье–Стокса, то использовать эти мгновенные значения величин в практических целях весьма затруднительно. Поэтому для турбулентного режима ставится задача отыскания осредненных во времени скоростей и давлений. Эти осредненные величины сами могут оказаться зависящими или независящими от времени.

При построении математических моделей течения жидкость рассматривается как сплошная среда. Это предположение сразу ограничивает диапазон чисел Кнудсена, в котором данный анализ является справедливым. Кроме того, из этой же гипотезы следует

вывод о существовании нижнего предела масштабов длины, связанных с турбулентным движением. Например, внутренний масштаб Колмогорова по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул должен быть больше. Для большинства, представляющих практический интерес течений, это требование выполняется.

Предположение о том, что жидкость является сплошной средой, делает ненужным рассмотрение ансамблей молекул и позволяет использовать уравнения движения, полученные Навье–Стоксом. Обусловленное этим упрощение весьма полезно, однако необходимо сделать одно замечание, касающееся следствия такого перехода от анализа молекулярного движения жидкости к анализу сплошной среды. Задача с начальными данными в кинетической теории допускает лишь единственное решение, тогда как решение уравнений Навье–Стокса может быть неединственным. Математические проблемы существования и единственности решений уравнений в частных производных, описывающих течения жидкости, далеки от своего завершения как для самих дифференциальных уравнений, так и для конечно-разностных аналогов. После появления монографии Ладыженской [4] в 1961 г., посвященной этим проблемам для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, Эймсом было дано в 1965 г. изложение существа её работы [5]. Основываясь на сравнении задачи о течении несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями Навье–Стокса с другими задачами, Эймс предполагает, что единственное стационарное решение существует только ниже некоторого неизвестного предельного значения числа Рейнольдса. Выше этого значения в некотором интервале чисел Re существует несколько решений и, наконец, выше некоторого другого, также неизвестного значения числа Рейнольдса, решений вообще не существует. При этом Эймс задается правомерным вопросом, справедливы ли сами стационарные уравнения Навье–Стокса для чисел Рейнольдса, превышающих некоторое значение, при котором возникает турбулентность.

При конечно-разностном решении этой задачи положение может ещё более усложняться из-за неясности граничных условий. Существование решения представляет собой меньшую проблему в том случае, когда расчеты ведутся по нестационарным уравнениям. Этот подход оказался наиболее успешным при решении полных уравнений для течения вязкой жидкости. Будучи уверенным в справедливости нестационарных уравнений Навье–Стокса, можно считать, что численное решение, полученное по физически реальным начальным условиям, имеет определенную ценность.

Если же стационарного решения не существует, то, проводя нестационарные конечно-разностные расчёты, можно убедиться в этом. Может случиться, что непрерывное течение, неустойчивое по отношению к малым возмущениям, будет оставаться устойчивым при численном моделировании. Это может иметь место при крупномасштабной неустойчивости при срыве вихрей.

Кроме того, внесение в полные уравнения Навье–Стокса приближённых допущений, которые неизбежны при их численном решении на ЭВМ, лишает уверенности в получении достоверных результатов.

Вопрос о единственности полученного численного решения вызывает большее беспокойство еще и потому, что существует много примеров многозначности стационарных решений. Наиболее очевидным примером таких течений является работа двухрежимных приборов струйной автоматики и две устойчивые ориентации вихревой нити при обтекании стенки с полусферической выемкой. Более важным примером отсутствия единственного решения, имеющем место при энергетических испытаниях гидравлических машин, является отрыв потока на профиле при одних и тех же граничных условиях. Это явление называют гистерезисом. Оно возникает на углах атаки, близких к возникновению срыва или приближения к оптимальным режимам обтекания. Картина течения в этом случае получается различной в зависимости от того, с какой стороны приближаться к данному углу атаки - со стороны меньших (досрывных) или больших (послесрывных) значений. При рассмотрении всех таких примеров, естественно возникает следующий вопрос — к какому из решений должна сходиться численная схема, если она вообще сходится к какому-либо решению? На этот вопрос пока нельзя дать определенный ответ.

Если руководствоваться физическим опытом, т.е. экспериментом и интуицией, тогда для проверки получаемых решений и объяснения правомерности использованных алгоритмов, необходимо применять более строгие критерии и зависимости при разработке более совершенной математической теории или применять другие подходы к численному решению.

Следовательно, хотя накладываемые ограничения значительно упрощают анализ, результаты технических исследований необходимо оценивать с точки зрения возможных последствий этих предположений. Если при теоретическом исследовании не принимались во внимание обнаруженные экспериментально существенные свойства явления, то нельзя рассчитывать, что такое исследование будет правильно отражать характеристики реальных течений. В частности, турбулентные течения никогда не бывают двумерными, даже если накладываемые на них граничные условия позволяют на это надеяться.

Для получения уравнений турбулентного течения используются уравнения Навье–Стокса, все члены которых подвергаются операции усреднения по времени. Применяемые при этом операции усреднения основаны на предположении существования для любого турбулентного потока такого интервала усреднения T , что выполненное по нему усреднение дает величину, не изменяющуюся при повторном усреднении. Интервал T должен быть достаточно большим по сравнению с максимальным периодом пульсаций, но в случае усредненного неустановившегося движения малым по сравнению с

характерним для усередненого руху інтервалом часу.

Після виконання операції усереднення для всіх членів рівняння Нав'є–Стокса з урахуванням нерозривності для усередненого встановившогося турбулентного руху отримують рівняння Рейнольдса. Система рівнянь Рейнольдса відрізняється від рівнянь Нав'є–Стокса не тільки тим, що в них входять усереднені швидкості замість миттєвих, але й наявністю в них дев'яти нових членів, залежаних від пульсацій швидкості. Представив кожен з цих членів у формі

$$\frac{\partial(\overline{V'_x V'_x})}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{V'_x V'_x})$$

і т.д. видно, що в рівняннях Рейнольдса наряду з членами виду $\nu \nabla^2 \overline{V}_x = \frac{1}{\rho} \mu \nabla^2 \overline{V}_x$, виражаючими дію в'язких напружень, містяться члени виду $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{V'_x V'_x}) \dots$, які виражають дію напружень, притаманних тільки турбулентному потоку [3]. Ці напруження, породжені пульсаціями швидкості, називають турбулентними або кажущимися напруженнями, підкреслюючи останнім терміном, що їх поява в рівняннях руху є результатом формального переходу миттєвих до усереднених швидкостей. Якщо порівняти усереднений турбулентний потік з ламінарним, ці напруження дають зовсім інший ефект, що полягає в значному збільшенні опору і відповідному зміні профілю швидкості. В турбулентному потоці повні касательні напруження складаються з в'язких τ_μ і турбулентних τ_t , т.е. $\tau = \tau_\mu + \tau_t$, причому турбулентні напруження виражаються формулою $\tau_t = -\rho \overline{V'_i V'_j}$ і мають властивість взаємності $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Повна сукупність турбулентних нормальних і касательних напружень утворює, за аналогією з в'язкими напруженнями, симетричну матрицю турбулентних напружень

$$\begin{pmatrix} -\rho \overline{V'_x V'_x} & -\rho \overline{V'_x V'_y} & -\rho \overline{V'_x V'_z} \\ -\rho \overline{V'_y V'_x} & -\rho \overline{V'_y V'_y} & -\rho \overline{V'_y V'_z} \\ -\rho \overline{V'_z V'_x} & -\rho \overline{V'_z V'_y} & -\rho \overline{V'_z V'_z} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Таким чином, в рівняннях руху з'являються шість нових членів турбулентних напружень, для обчислення яких необхідно встановити зв'язок між пульсаційними і усередненими швидкостями в турбулентному потоці. Цю зв'язок встановлюють моделі турбулентності, які базуються не на законах збереження, а на більш або менш простих фізичних гіпотезах про характер процесів турбулентності.

Ціна, яку платять за нову спрощену модель течії рідини, є дуже високою і дорогою, так як всі моделі турбулентності є напівемпіричними, а не фундаментальними законами збереження. Всі рівняння динаміки рідини

основані на універсальних законах збереження: маси, кількості руху і енергії, а для отримання конкретних числових значень наближених моделей, необхідно знати деякі величини, визначаються на основі експерименту, який дуже трудомісткий і дорогий. В загальному випадку турбулентна в'язкість не постійна. Вона різко змінюється по перетину потоку або пограничного шару від дуже малих значень біля стінки до деякого максимуму на його половині, а потім знову досягає мінімуму в центрі. В даний час відомо близько ста моделей турбулентності, які в цілому роблять задачу розрахунку турбулентного потоку дуже наближеною і технічно складною. Всі існуючі моделі турбулентності мають недоліки, а для тривимірних течій вони взагалі відсутні і тому можна вважати, що остаточна модель турбулентності ще не створена. Тому проблема розв'язання рівнянь Нав'є–Стокса в даний час привертає увагу вчених усього світу

Приближенная модель течения вязкой жидкости [6]

Вище було показано, що рівняння руху вязкої рідини відрізняються від рівнянь руху ідеальної рідини тільки наявністю члена виду $\nu \nabla^2 \vec{V}$, який враховує в'язкість. Якщо допустити, що існує потенціальне течіння вязкої рідини, т.е. $V = \text{grad } \phi$, $u \text{grad } \phi$ причому в силу рівняння неперервності $\nabla^2 \phi = 0$, тоді $\nu \text{grad } \nabla^2 \phi = 0$, $\nu \nabla^2 u = \nu \nabla^2 \text{grad } \phi = \nu \text{grad } \nabla^2 \phi = 0$, т.е. в'язкий член в рівнянні руху не входить і течіння вязкої рідини описується тими ж рівняннями, що і течіння ідеальної рідини. Таким чином, припущення про можливість безвихревого течіння вязкої рідини не суперечить рівнянням руху і, здавалося б, що задачу можна звести до розв'язання рівняння Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$. Але крім рівнянь руху повинні виконуватися ще і граничні умови. Для ідеальної рідини ці умови складаються в рівності нулю нормальної складової швидкості на твердій нерухомій стінці. Для вязкої рідини, крім того, повинна рівнятися нулю касательна до стінки складова швидкості, т.е. $V_t = 0$. Перше з умов разом з рівнянням Лапласа утворює класичну задачу Неймана, для якої доведена теорема існування і єдиності. Іншими словами, це умова є необхідною і достатньою для того, щоб існувало єдине рішення $\phi(x, y, z)$ рівняння $\nabla^2 \phi = 0$. Але таке рішення не задовольняє, взагалі кажучи, другому умові, так як для будь-якої реальної (вязкої) рідини це умова обов'язково виконується. Отже, для течіння таких рідин потенціал швидкості не існує. Крім того, сили в'язкості не є потенціальними, а тому, течіння вязкої рідини біля твердих стінок повинно бути вихревим. Але навіть якщо в певному випадку вдалося отримати на

твердой поверхности такое же граничное условие, как и для идеальной жидкости, то движение вязкой жидкости окажется безвихревым.

Существенным различием течения вязкой и идеальной жидкости является также и то, что линию тока нельзя заменять твердыми поверхностями, как это можно делать для идеальной жидкости. Благодаря прилипанию частиц жидкости к твердой поверхности вблизи нее образуется область, называемая пограничным слоем, где осуществляется переход от нулевых значений скорости на поверхности к их значениям в невозмущенном потоке. В связи с этим замена свободной линии тока твердой поверхностью в вязкой жидкости ведет к резкому изменению кинематической структуры течения. Поэтому особое место в числе задач, решаемых приближенными методами, могут занимать те, в которых можно разделить поле течения вязкой жидкости на две характерные области:

1) внешнюю, где влияние вязкости мало и поток можно приближенно считать квазипотенциальным, в которой течение вихревое, но выполняется условие

$$\bar{V} \operatorname{rot} \bar{V} = V_1 \Omega_1 + V_2 \Omega_2 + V_3 \Omega_3 = 0, \quad (14)$$

2) пристеночную, называемую пограничным слоем, где существенно проявление вязкости, а условие прилипания $V_r = 0$ обеспечивается непрерывным вихревым слоем, интенсивность которого его обеспечивает.

Так как $\operatorname{rot}(V_1 \Omega_1 + V_2 \Omega_2 + V_3 \Omega_3) = 0$, (15) то предлагаемая модель течения описывается гармонической функцией, которая имеет единственное решение и будет удовлетворять системам Эйлера и Навье–Стокса, а так же новым эффективным численным методам. Модель течения, удовлетворяющей уравнениям (14), (15) называют квазипотенциальной или на «заданную форму потока».

Предложенная в 1966 году модель течения жидкости «заданная форма потока» [7] наиболее полно отвечает задачам проектирования гидравлических машин:

1. Выполнение «живых сечений», существования поверхностей, ортогональных к линиям тока [8].

2. При течении несжимаемой жидкости в неподвижном объеме полное количество рассеиваемой механической энергии будет зависеть только от интенсивности вихрей внутри объема и не удовлетворять условию развития вторичных течений, если представить вектор вихря в виде суммы двух векторов

$$\bar{\Omega} = \Omega_\tau + \Omega_n = \left(\frac{\bar{V} \cdot \bar{\Omega}}{V \cdot V} \right) \bar{V} + \frac{\bar{V} \times (\bar{\Omega} \times \bar{V})}{\bar{V} \cdot \bar{V}}, \quad (16)$$

где Ω_τ и Ω_n — проекция вектора вихря по линии тока и нормали к ней.

3. Удовлетворять уравнению Эйлера преобразования энергии для рабочего колеса гидравлической машины [1].

4. Вязкость, будучи диссипативной, не создает дополнительную закрутку или противотоки вторичных течений, определяемых касательной составляющей вектора вихря,

хотя и является причиной резкого градиента скорости. В общем случае течения жидкости величина

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_\tau}{V} \right) = \frac{1}{V} \operatorname{div} \left[\frac{\bar{V} \times (V \times \Omega)}{V^2} \right] \quad (17)$$

равняется нулю лишь при условиях

$$\Omega \times V = 0 \text{ и } \Omega \cdot V = 0.$$

5. Для квазипотенциального потока в случае осесимметричного течения жидкости, записанного в естественной ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 когда q_1 — линия тока, q_2 — вихревая линия, q_3 — ортогональная линиям q_1 и q_2 условие (4) имеет вид [9]

$$\frac{V_1}{H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 V_3)}{\partial q_2} - \frac{V_2}{H_1 H_3} \frac{\partial(H_3 V_3)}{\partial q_1} + \frac{V_3}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_2} \right] = 0. \quad (18)$$

Так как в выбранной системе координат ось q_1 совпадает с линией тока, тогда $V_1 = V_m, V_3 = V_u, H_3 = r, V_2 = 0$. В этом случае уравнение (18) принимает вид

$$H_1 V_m \frac{\partial(V_u r)}{\partial q_2} + V_u r \left(- \frac{\partial(H_1 V_m)}{\partial q_2} \right) = 0,$$

решением которого будет

$$V_u r = \psi(q_1),$$

где $\psi(q_1)$ — произвольная постоянная функция q_1 .

Для определения $\psi(q_1)$ принимают, что на граничной линии тока (например «А») величина $V_u r$ известна. Тогда на соседней

$$(V_u r)_B = \frac{(V_u r)_A}{(H_1 V_m)_A} (H_1 V_m)_B,$$

где $(V_u r)_A$ — граничное условие, задаваемое из условия требуемых качеств проектируемой лопасти, H_1 — коэффициент Лямэ.

Опытные данные показывают, что предлагаемая модель течения является приемлемой при решении многих задач теории гидравлических машин: получения высоких энергетических, кавитационных и силовых характеристик, а результаты проектирования, достаточно хорошо согласуются с расчетными.

Таким образом, модель квазипотенциального потока течения идеальной жидкости удовлетворяет всем свойствам вязкой жидкости и может описываться уравнениями Навье–Стокса.

Профилирование лопасти рабочего колеса [10]

1. Задаются, как это принято, формой проточной части: подвода, рабочего колеса, отвода и меридианным потоком с рекомендуемым количеством линий тока.

2. Для принятой схемы проточной части решают прямую задачу на требуемый расход с учетом взаимного влияния всех элементов.

3. На одной из граничных линий тока рабочего колеса принимают закон изменения момента количества движения жидкости $V_u r$ в соответствии с уравнением Эйлера для заданного напора, учетом поправок на количество лопастей, гидравлических и механических потерь и выполнения необходимого и достаточного условий существования «живых сечений».

4. Вычисляют функцию $\psi(q_1)$ и распределение V_{ur} на остальных линиях тока, и в результате определяют бесконечно тонкую поверхность тока, удовлетворяющую всем законам сохранения, которую принимают за одну из поверхностей бесконечно тонких лопастей.

5. Для выбранного расположения одной из кромок лопасти с учетом имеющихся рекомендаций определяют координаты остальных линий тока.

6. Для принятого количества лопастей рабочего колеса толщину лопасти в сечениях $R = \text{const}$ определяют по формуле $\delta_u = \frac{2\pi r \mu - 1}{Z \mu}$,

где μ — интегрирующий множитель.

7. После выполнения всех операций оформляют теоретический чертеж лопасти.

На рисунках 1—4 показаны результаты этапов автоматизированного профилирования лопасти рабочего колеса центробежного насоса, выполненных согласно предложенной методике.

Выводы

1. Наиболее предпочтительным является профилирование лопастной системы обеспечивающей поток с взаимно-ортогональным расположением векторов скорости и присоединенного вихря, в котором вторичные течения развиваться не могут и обусловленные ими вихревые потери должны быть минимальными.

2. Модель жидкости на заданную форму потока, называемую квазипотенциальной, отличается от модели реальной жидкости тем, что для идеальной жидкости позволяет удовлетворить условию прилипания.

3. Условие перпендикулярности вектора скорости вектору вихря скорости не способствует развитию вторичных течений, а удовлетворяет условию изменения момента количества жидкости вдоль линии тока и выполнить условие Эйлера для передачи энергии.

4. В отличие от модели Навье–Стокса, единственность и существование решения которой до сих пор оспаривается,

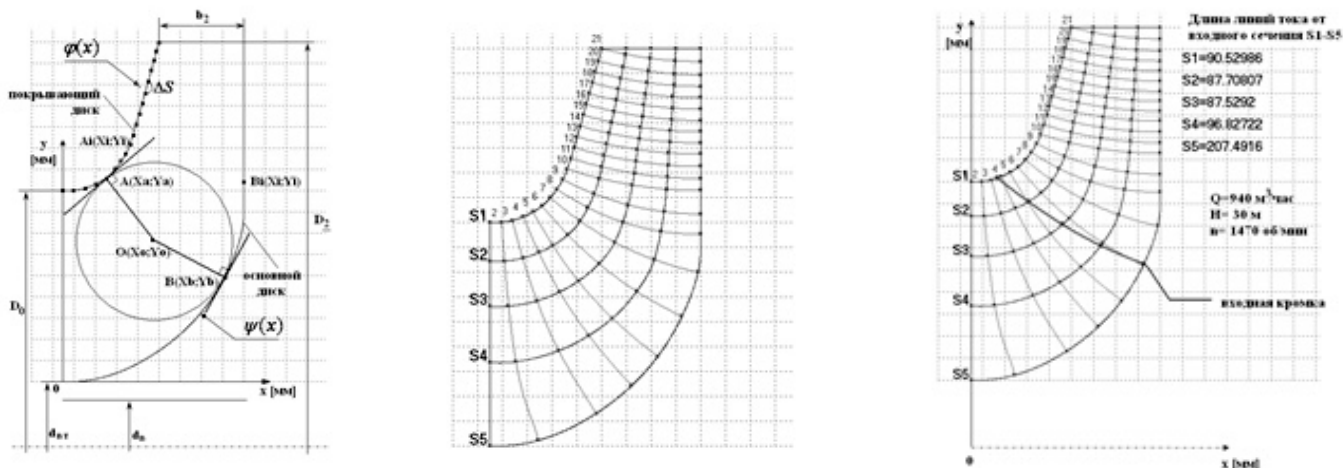


Рисунок 1 — Автоматизация профилирования лопасти рабочего колеса — построение меридианных сечений

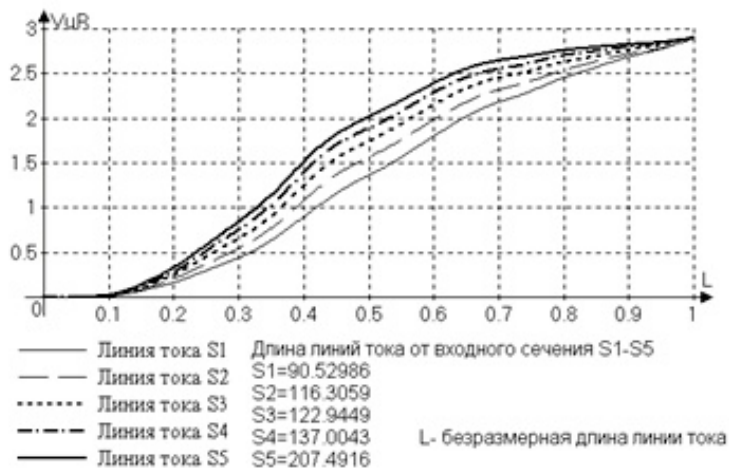


Рисунок 2 — Распределение VuR от входной кромки лопасти по линиям тока

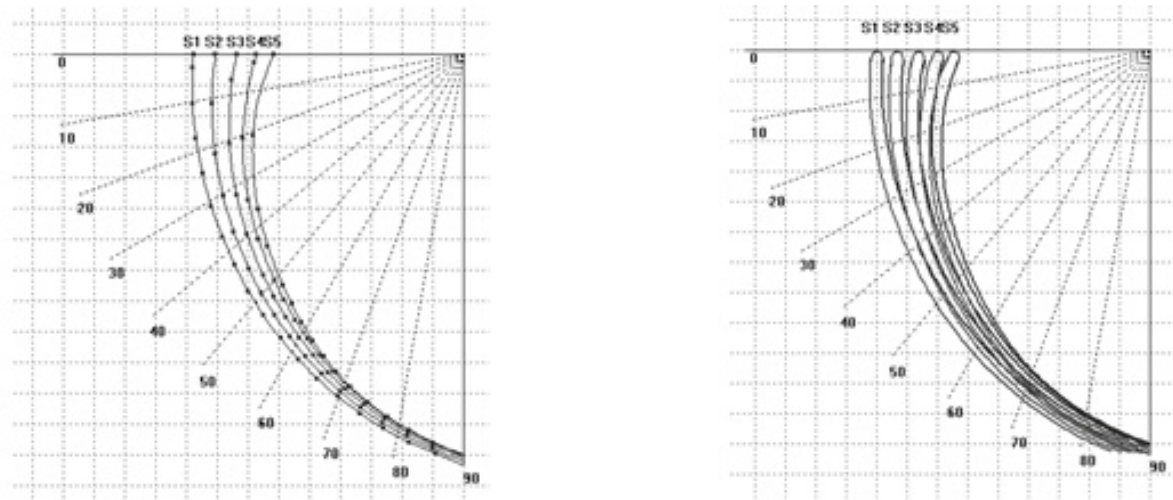


Рисунок 3 — Автоматизация профилирования лопасти рабочего колеса — бесконечно тонкая лопасть и лопасть с постоянной толщиной

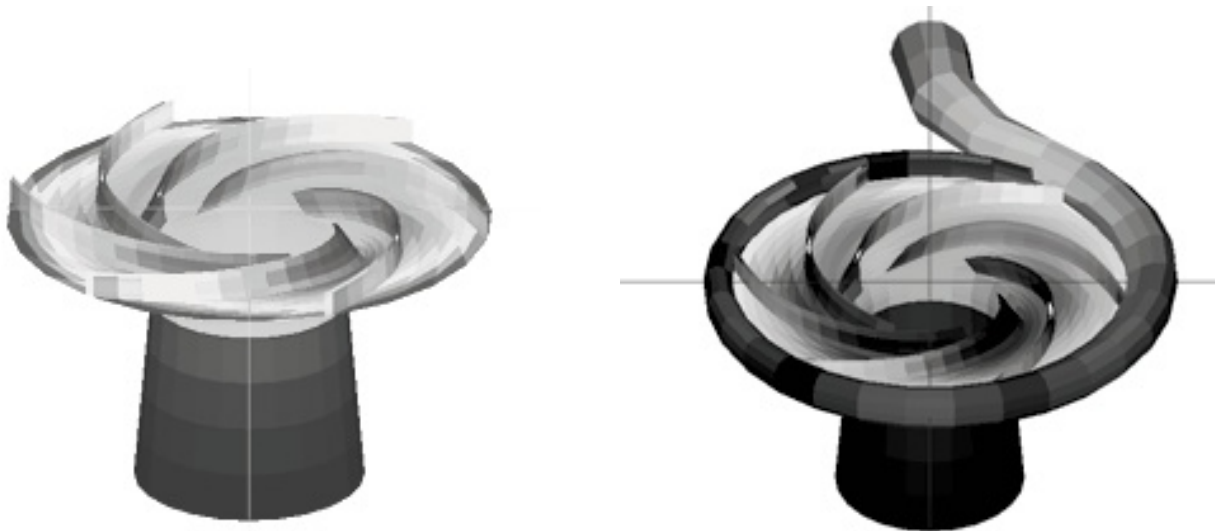


Рисунок 4 — Визуализация 3D модели спроектированного рабочего колеса

поток с моделью квазипотенциальной формой течения имеет единственное решение и позволяет применить практически полностью разработанный математический аппарат решения теории потенциала.

Литература

1. Грянко, Л. П. Лопастные насосы / Л. П. Грянко, А. Н. Папира. — Л.: Машиностроение, 1975. — 432 с.
2. Этинберг, И. Э. Гидродинамика гидравлических турбин / И. Э. Этинберг, Б. С. Раухман. — Л.: Машиностроение, 1978. — 280 с.
3. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
4. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
5. Ames, W. F. Nonlinear partial differential equations / W. F. Ames. — New York: Barnes and Noble, Inc, 1965. — P. 55—72.

6. Косторной, С. Д. Модель течения, учитывающая особенности граничных условий реальной жидкости / С. Д. Косторной // Серия энергетические и теплотехнические процессы и оборудование, Вісник НТУ «ХПИ». — 2014. — 14(988). — С. 33—38.

7. Косторной, С. Д. Профилирование лопасти рабочего колеса радиально-осевой турбины из условия ортогональности линий тока и вихревых линий в абсолютном движении / С. Д. Косторной // Научно-техническая конференция по итогам научной работы за 1966 год. Рефераты докладов. «ХГУ». — 1968. — С. 118.

8. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

9. Косторной, С. Д. Новый подход к решению обратной задачи центробежного насоса / С. Д. Косторной, А. К. Давиденко Л. К. Марченко // Серия энергетические и теплотехнические процессы и оборудование, Вісник НТУ «ХПИ». — 2014. — 11(985). — С. 53—58.

10. Косторной, С.Д. Автоматизированное проектирование рабочего колеса центробежного насоса / С.Д. Косторной, А.О. Бондарев, Л.К. Марченко // Серия энергетические и теплотехнические процессы и оборудование, Вісник НТУ «ХПІ». — 2014. — 14(988). — С.89—95.

References

1. Grianko, L.P. Lopastnye nasosy / L.P. Grianko, A.N. Papira.— L.: Mashinostroyeniye, 1975. — 432 s.
2. Etinger, I.E. Gidrodinamikagidravlicheskihturbin. / I. E. Etinger, B. S. Rauchman. — L.: Mashinostroyeniye, 1978. — 280 s.
3. Loytsianskiy, L.G. Mekhanika zhidkosti gaza.— M.: Nauka, 1987. — 840 s.
4. Ladyzhenskaya, O.A. Matematicheskiye voprosy dinamiki viazkoy neszhyamayemoy zhidkosti. — M.: Nauka. 1970. — 288 s.
5. Ames, W.F. Nonlinear partial differential equations / W.F. Ames. — New York: Barnes and Noble, Inc, 1965. — S. 55—72.
6. Kostornoy, S.D. Model techeniya, uchityvayushchaya osobennosti granichnykh usloviy realnoy zhidkosti / S.D. Kostornoy // Seriya energeticheskiye i teplotekhnicheskiye protsessy i oborudovaniye, Visnyk NTU «KhPI». — 2014. — 14(988). — S. 33—38.
7. Kostornoy, S. D. Profilirovaniyelopastiraboche-gokolesaradialno — oseyoturbinyizusloviyaortogonalnostiliniyotokavikhrevykhliniy v absolutnomdvizhenii / S. D. Kostornoy // Nauchno-tekhnikeskayakonferentsiyapoitog-amnauchnoyrabotyza 1966 god.Referatydokladov. «KhGU». — 1968. — S. 118.
8. Elsholz, L.E. Differentsialnye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye / L.E. Elsholz. — M.: Nauka, 1965. — 424 s.
9. Kostornoy, S. D. Novyepodkhod k resheniyuobratnoyzadachitsentrobezhnogonasosa / S. D. Kostornoy, A. K Davidenko, L. K. Marchenko// Seriyaenergeticheskiyeiteplotekhnicheskiyeprotsessyioborudovaniye, Visnyk NTU «KhPI». — 2014. — 11(985). — P.53-58.
10. Kostornoy, S. D. Avtomatizirovannoyeproektirovaniyeraboche-gokolesatsentrobezhnogonasosa / S. D. Kostornoy, A. O. Bondarev, L. K. Marchenko// Seriyaenergeticheskiyeiteplotekhnicheskiyeprotsessyioborudovaniye, Visnyk NTU «KhPI». — 2014. — 14(988). — S. 89—95.

Надійшла

УДК 621.671

Про деякі похибки рішення рівняння руху рідини при проектуванні гідравлічних машин

С.Д. Косторной, А.С. Косторной, А.Ю. Хатунцев

Запропоновано модель квазіпотенційної течії ідеальної рідини, яка задовольняє усім властивостям в'язкої рідини рівняння Ейлера передачі енергії у робочому колесі. Задачу проектування лопасті робочого колеса на задані параметри у відповідності до гіпотези безкінечно великого числа безкінечно тонких лопастей зводиться до рішення деякої зворотної осесиметричної задачі, в якій визначається форма потоку, осередненого по коловій координаті і часу. Поле течії рідини поділяється на дві характерні області: область нев'язкої течії і граничний шар). Вихрові витрати, зумовлені розвитком вторинних течій, можуть бути мінімізовані в потоці із взаємно-ортогональним розташуванням векторів швидкості і приєднаного вектора. Профілювання лопастної системи з урахуванням цих умов дозволяє покращити характеристики гідравлічної машини.

Ключевые слова: ідеальна та в'язка рідина, рівняння Нав'є-Стокса, квазіпотенційний потік, робоче колесо, профілювання лопасті.

UDC 621.671

On the certain discrepancies occurred in the process of solving of the equations of motion of the fluid while designing of hydraulic machines

S.D. Kostornoy, A.S. Kostornoy, A.Y. Khatuntsev

The model of the quasi-potential flow of an ideal fluid satisfying all the properties of viscosity and the basic Euler equation of energy transfer in the impeller is shown in the article. The problem of designing of the impeller blades according to the specified parameters and the flow speed in accordance with the hypothesis of an infinite number of infinitely thin blades is generally reduced to solving some inverse axisymmetric problems determining the shape of the surface of the current flow. The fluid flow field divides into two distinct areas: the core stream (where the effect of viscosity is insignificant) and the boundary layer (where the vortex flow and the slip conditions are presented). The flow losses caused by the development of the secondary flows may be minimized in a stream with mutually orthogonal arrangement of the velocity vectors and the bound vortex vector. Blade system profiling considering these conditions allows the improvement of the characteristics of the designed hydraulic machine.

Keywords: ideal fluid, viscous fluid, Navier-Stokes equations, quasi-potential flow, impeller, profiling of the blade system.