

ДИНАМІКА ОБ'ЄМНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ШВИДКОСТІ ГІДРОМОТОРА

DYNAMICS OF HYDRAULIC MOTOR SPEED VOLUMETRIC REGULATION

Мета. Теоретичне дослідження об'ємного регулювання швидкості обертання вала гідромотора. Створення математичної моделі.

Методи дослідження. Спрощення аналізу динаміки шляхом введення припущень, які не мають значного впливу на результат дослідження, але значно ускладнюють його рішення, якщо взяти їх до уваги. Використання перетворень Лапласа для створення передатних функцій та застосування діаграми Найквіста.

Результати дослідження. Створено математичну модель та проведено теоретичне дослідження об'ємного регулювання швидкості обертання вала гідромотора.

Висновки. Динаміка об'ємного регулювання швидкості гідромотора у найпростішому випадку описується лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами другого порядку за рахунок вибору вихідного параметра гідромотора. У такому простому випадку підвищення підсилення в прямій ланці регулювання (наприклад, підвищення робочого об'єму насоса) або збільшення маси в навантаженні не призводить до втрати стійкості, що зазвичай має місце в системах автоматичного регулювання, які описуються диференціальними рівняннями третього і більш високих порядків.

Ключові слова: гідромотор, лінійні диференціальні рівняння, зведений робочий об'єм, перетворення Лапласа, передатна функція, частотний метод аналізу, діаграма Найквіста.

Вступ

У Національному авіаційному університеті на кафедрі гідрогазових систем ведуться роботи з дослідження динаміки гідроагрегатів. На сьогоднішній день гідроагрегати мають широкий діапазон застосування в промисловості як для виробництва, так і вже на готових машинах. Одним з таких агрегатів є гідромотор, який перетворює гідравлічну енергію у механічну.

Постановка задачі

Об'ємне регулювання швидкості гідромотора у найпростішій постановці є одним з об'єктів динаміки пристроїв і машин.

У якості основної регульованої величини обрано кутову швидкість обертання вала гідромотора $\omega(t)$, залежну від часу, яку представлено сумою постійної ω_0 і змінної складових $\omega(t)$ (рисунок 1).

Вирішення поставленої задачі

Для спрощення запису рівнянь динаміки замість загальноприйнятого робочого об'єму гідромашин вводиться поняття зведених робочих об'ємів насоса V_n і гідромотора V_m , віднесених до одного радіана повороту вала гідромашини, що виключають множник 2π у записах теоретичної подачі і моменту. З метою спрощення аналізу динаміки прийнято припущення [1]:

- пульсація подачі насоса й нерівномірність напору гідромотора не враховуються,

- гідравлічні втрати й хвильові процеси в напірному трубопроводі невеликої довжини не враховуються, тому поле тисків стисливого середовища прийнято однорідним, залежним тільки від часу, а не від координат простору,

- кутова швидкість обертання вала насоса прийнята строго постійною, яка не залежить від змін навантажень насоса,

- гідравлічні втрати й інерційні напори, а також невеликі тиски стовпа рідини у всмоктувальному і зворотному трубопроводах в розрахунок не приймаються через їхню малість у порівнянні з динамічною складовою тиску в напірному трубопроводі,

- моменти активного навантаження на валу гідромотора приймаються лінійно-залежними тільки від швидкості обертання,

- об'ємні й механічні втрати гідромашин ураховуються за допомогою постійних чисел-коефіцієнтів, що представляють співвідношення:

$k_{вн} = Q_{вн} / (V_{нп} p)$, $k_{вм} = Q_{вм} / (V_{м} p)$, $k_{вмех} = M_{вмех} / (V_{м} p)$,
де $k_{вн}$, $k_{вм}$, $k_{вмех}$ — коефіцієнти витоків насоса, гідромотора та механічних втрат відповідно.

- основне збурення — східчасте, позитивне, збільшення регульованого робочого об'єму насоса $V(t)$, додаткове східчасте зниження моменту навантаження гідромотора $M(t)$ розглядаються роздільно без взаємних зв'язків між ними,

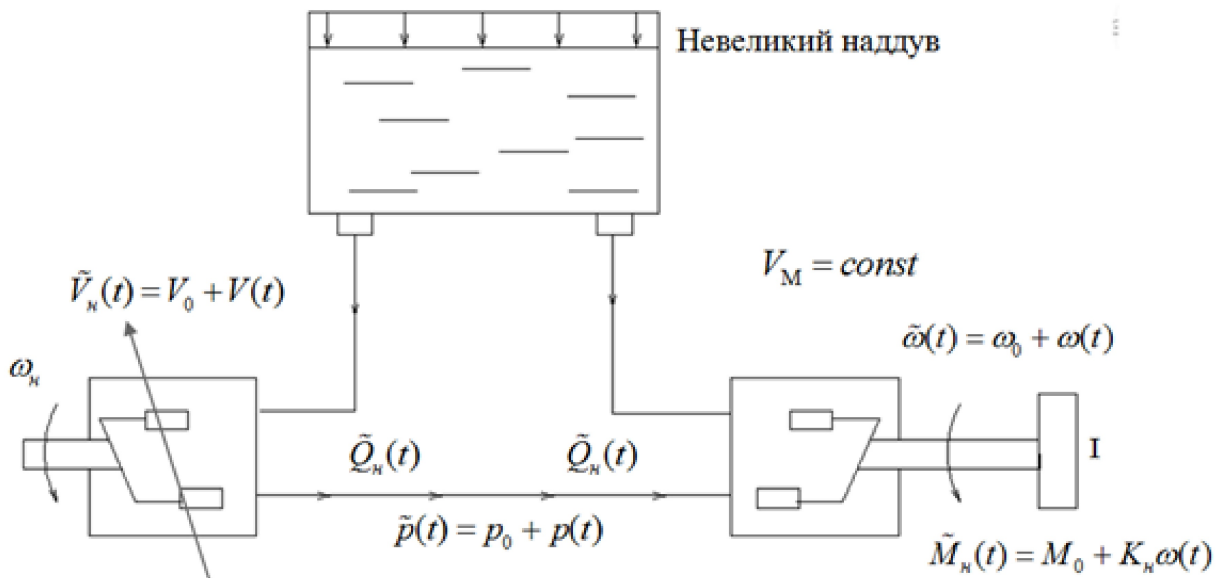


Рисунок 1 — Принципова схема для дослідження динамічних характеристик гідромотору

• глибина (інтенсивність) збурень приймається малою, відповідно до лінійної моделі динаміки досліджуваних процесів.

Інші припущення формулюються у відповідних місцях виводу розрахункових залежностей[2,3].

Основні розрахункові залежності [4].

Рівняння нерозривності потоку стисливої рідини у строгій постановці для змінної маси $M(t)$ контрольного об'єму напірного трубопроводу повинне бути записане у вигляді

$$dM(t)/dt = m_{\text{світ}}(t) - m_{\text{світ}}(t), \quad (1)$$

де $m_{\text{світ}}$, $m_{\text{світ}}$ — маси втоку і витоку системи.

Переноси мас втоку і витоку з контрольного об'єму пов'язано з оптимальними потоками у двох розрахункових перетинах співвідношеннями

$$m_{\text{світ}}(t) = \rho_{\text{н}}(t) \tilde{Q}_{\text{н}}(t), \quad m_{\text{світ}}(t) = \rho_{\text{м}}(t) \tilde{Q}_{\text{м}}(t), \quad (2)$$

а похідну за часом у лівій частині рівняння (1) можна представити добутком

$$dM(t)/dt = d(\rho(t)V_0)/dt = \rho(t)(dV_0(t))/dt + V_0 dp/dt \quad (3)$$

Приймаючи допущення про малість деформацій контрольного об'єму можна знехтувати першим добутком правої частини рівняння (3). Змінну густину рідини можна прийняти лінійнозалежною від тиску $d\rho = (\rho_{\text{ср}}/E)d\rho$ при постійному модулі пружності й середньою за об'ємом густиною $\rho_{\text{ср}}$. Тільки за таких припущень підстановка рівняння (3) у ліву частину рівняння (1) після скорочення його на змінну густину з припущенням $\rho_{\text{ср}}(t) \approx \rho_{\text{н}}(t) \approx \rho_{\text{м}}(t)$ дозволяє отримати рівняння нерозривності (1) з його спрощенням і перехід до об'ємних потоків у вигляді

$$\tilde{Q}_{\text{н}}(t) = \tilde{Q}_{\text{м}}(t) + V_0 dp(t)/Edt \quad (4)$$

У свою чергу об'ємні потоки в формулі (4) зручно записати сумами, у яких $V_{\text{нт}}$ є найбільшим з наведених об'ємів насоса:

$$\tilde{Q}_{\text{н}}(t) = V_{\text{но}} \omega_{\text{но}} - k_{\text{вн}} V_{\text{нм}} p(t) + \omega_{\text{но}} V(t) \quad (5)$$

В останній рівності добуток $\omega_{\text{но}} V(t)$ враховує основне східчасте збурення регульованого робочого об'єму насоса $V(t)$. Перепишемо його у вигляді:

$$\tilde{Q}_{\text{н}}(t) = V_{\text{м}} \omega_0 + V_{\text{м}} \omega(t) + k_{\text{вм}} V_{\text{м}} p_0 + k_{\text{вм}} V_{\text{м}} p(t) \quad (6)$$

Підстановки (5) і (6) у рівняння (4) дають можливість розділити описи постійних і змінних складових окремими рівностями. Першою рівністю для постійних складових знайдемо постійну частину кутової швидкості обертання гідромотора ω_0

$$\omega_0 = (V_{\text{но}} \omega_{\text{но}} - k_{\text{в}} V_{\text{м}} p_0) / V_{\text{м}} \quad (7)$$

Складові члени, що залишилися, для змінних рівняння нерозривності (4) описують динамічні добавки потоку рідини, викликані східчастим збуренням $V(t)$:

$$\omega_{\text{но}} V(t) = V_{\text{м}} \omega(t) + k_{\text{в}} V_{\text{м}} p(t) + k_{\text{с}} dp/dt, \quad (8)$$

де $k_{\text{с}} = V_0/E$ — коефіцієнт стисливості.

У рівняннях (7) і (8) коефіцієнт витоку рідини враховує сумарні витоки у насосі й гідромоторі:

$$k_{\text{в}} = k_{\text{вм}} + V_{\text{н}} / V_{\text{м}} k_{\text{вн}} \quad (9)$$

Рівняння моментів зовнішніх сил на валу гідромотора без урахування його деформацій кручення має вигляд:

$$M_{\text{м}}(t) - M_{\text{нав}} = I d\omega(t)/dt, \quad (10)$$

де I — момент інерції обертаючих мас гідромотора і його навантаження. З урахуванням механічних втрат і постійної складової тиску p_0 момент запишемо сумою чотирьох доданків:

$$M_{\text{м}}(t) = V_{\text{м}} p_0 + V_{\text{м}} p(t) - k_{\text{вп}} V_{\text{м}} p_0 - k_{\text{вп}} V_{\text{м}} p(t) \quad (11)$$

Момент навантаження повинен враховувати постійну складову M_0 , швидкісну добавку $k_{\text{н}} \omega(t)$ й негативний момент збурення $M(t)$ у випадку східчастого зниження моменту на валу гідромотора:

$$\tilde{M}_{\text{нагр}}(t) = M_0 + k_{\text{н}} \omega_0 + k_{\text{н}} \omega(t) - M(t). \quad (12)$$

Підстановки виразів (11) і (12) у рівняння моментів (10) дають можливість розділити рівняння для постійних

і змінних складових. З першого рівняння такого рішення неважко знайти постійну складову тиску

$$p_0 = (M_0 + k_H \omega_0) / ((1 - k_{\text{вмех}}) V_M) \quad (13)$$

Змінні складові рівняння (10) після підстановок (11) і (12) описують перехідний процес підвищення кутової швидкості, викликане східчастим зниженням навантаження й зниженням динамічної складової тиску у вигляді

$$M(t) = I d\omega(t)/dt + k_H \omega(t) - (1 - k_{\text{вмех}}) V_M p(t). \quad (14)$$

Якщо немає збурення по моменту навантаження і збурення по регульованому об'єму насоса, то в лівій частині рівності (8) або (14) ці збурення відповідно дорівнюють нулю.

Перетворення Лапласа вихідних рівнянь при нульових початкових умовах

Ці перетворення істотно спрощують процедуру рішення диференціальних рівнянь за допомогою їхньої алгебраїчної форми. Так, наприклад, рівняння нерозривності (8) і моментів зовнішніх сил (14) перетворимо по Лапласу й одночасно перепишемо їх у систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \omega_{\text{но}} V(s) = V_M \Omega(s) + k_B V_M P(s) + k_C S P(s) \\ M(s) = I(s) \Omega(s) + k_H \omega(s) - (1 - k_{\text{вмех}}) V_M P(s). \end{cases} \quad (15)$$

У системі (15) вже немає функцій часу, через те що їх замінено функціями оператора $s = d/dt$. При збуренні по робочому об'єму насоса немає збурення по моменту навантаження і тому в другому рівнянні системи (15) $M(s) = 0$. При збуренні по навантаженню гідромотора в першому рівнянні цієї системи потрібно вважати $V(s) = 0$.

Чотири передатні функції об'ємного регулювання швидкості обертання гідромотора

Підстановка зображення тиску $P(s)$, отриманого із другого рівняння при відсутності збурення по моменту навантаження $M(s) = 0$, перше рівняння (15) призводить до попереднього виразу

$$\omega_{\text{но}} V(s) = V_M \Omega(s) + (k_C s + k_B V_M) (I + k_H) / ((1 - k_{\text{вмех}}) V_M) \Omega(s) \quad (16)$$

Після множення отриманого виразу на постійний знаменник дроби в правій частині (16) і почленного множення в круглих дужках, одержимо першу передатну функцію у вигляді раціонального дроби

$$W_{\Omega V}(s) = \Omega(s) / V = ((1 - k_{\text{вмех}}) \omega_{\text{но}} V_M) / (I k_C s^2 + (k_H k_C + k_B V_M) I s + (1 - k_{\text{вмех}}) V_M^2 + k_H k_B V_M) \quad (17)$$

Другий індекс у позначенні першої передатної функції означає вибір основного збурення по робочому об'єму насоса. Ділення чисельника й знаменника дроби (17) на $r^2 k_C$ (r – деякий довільний радіус інерції у відомому співвідношенні) надає передатній функції $W_{\Omega V}(s)$ фізичний зміст коливальної ланки поступального руху деякої маси m . Введення чотирьох постійних чисел

$$\begin{aligned} m &= I/r^2, \quad k_B = k_H/r^2 + (m k_B V_M)/k_C \\ c &= [(1 - k_{\text{вмех}}) V_M + k_H k_B V_M] / (r^2 k_C), \\ b &= [(1 - k_{\text{вмех}}) V_M \omega_{\text{но}}] / (r^2 k_C) \end{aligned}$$

значно спрощує запис рівняння (17)

$$W_{\Omega V}(s) = \Omega(s) / V(s) = b / (m s^2 + k_B s + c) \quad (18)$$

Іншу передатну функцію одержимо із рівняння системи (15) після заміни в ньому зображення тиску $p(s)$ знайденого з першого рівняння цієї системи при виборі в ньому $V(s) = 0$. Після перетворень подібних до виводу (16) одержимо проміжне вираження моменту, що збурює, у вигляді $M(s)$

$$M(s) = (I s + k_H) \Omega(s) + ((1 - k_{\text{вмех}}) V_M^2) (k_C s + k_B V_M) \Omega(s) \quad (19)$$

Множення останньої рівності на знаменник другої, після розкриття дужок призводить до отримання другої передатної функції при збуренні по моменту навантаження гідромотора:

$$\begin{aligned} (W_{\Omega M}(s) = (\Omega(s)) / (M(s)) = \\ (k_C s + k_B V_M) / (I k_C s^2 + (k_H k_C + k_B V_M) I s + (1 - k_{\text{вмех}}) V_M^2 + k_H k_B V_M) = \\ = (a s + d) / (m s^2 + k_B s + c), \end{aligned} \quad (20)$$

де дві додаткові постійні позначені: $a = r^2, d = (k_B V_M) / (r^2 k_C)$.

Третя й четверта передатні функції описують коливання динамічної добавки тиску рідини у напірному трубопроводі в перехідних процесах при збуренні регульованого робочого об'єму насоса (третя передатна функція) і ступічастого зниження навантаження гідромотора (четверта передатна функція)

$$(W_{V M}(s) = P(s) / V(s) = (f(s) + q) / (m s^2 + k_B s + c), \quad (21)$$

$$W_{P M}(s) = P(s) / M(s) = (-h) / (m s^2 + k_B s + c) \quad (22)$$

У двох останніх рівностях три останні постійні залежать від вибору r^2 параметрів системи $f = I \omega / (r^2 k_C), q = (k_H \omega) / (r^2 k_C), h = V / (r^2 k_C)$.

Неважко помітити однакові знаменники усіх чотирьох передатних функцій (18), (20), (21) і (22), що описують динамічні властивості того самого фізичного об'єкта. Однак дві із чотирьох передатних функцій (20) і (21) містять оператор диференціювання в чисельнику, що вказує на деякі відмінності їх у порівнянні із передатними функціями (18) і (22), у яких немає оператора диференціювання в їхніх чисельниках. Ці відмінності розглянуто нижче в частотному аналізі.

Частотний метод аналізу передатних функцій

Якщо розглядати гармонійні збурювання, то в передатних функціях прийняти $s = j\omega$ та розділити дійсну й уявну частини. Виконаємо ці перетворення на прикладі першої передатної функції (18)

$$\begin{aligned} W_{\Omega V}(j\omega) &= b / (-m\omega^2 + jk_B \omega + c) = \\ &= (b(-m\omega^2) - jbk_B \omega) / ((c - m\omega^2) + jk_B \omega) \quad (23) \end{aligned}$$

Множення й ділення на комплексне поєднане виконано з метою звільнення знаменника від його уявної частини. Почленне множення в знаменнику за схемою $(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$ призводить до суми квадратів і можливості поділу запису дійсної й уявної частин передатних функцій:

$$W_{\Omega V}(j\omega) = b(c - m\omega^2) / ((c - m\omega^2)^2 + k_B^2 \omega^2) + j(-bk_B \omega) / ((c - m\omega^2)^2 + k_B^2 \omega^2) \quad (24)$$

Для побудови діаграми Найквіста [5] варто визначити вираження дійсної Re й уявної Im частин на характерних частотах. Так для нульової частоти $\omega = 0$ у першому

доданку правої частини (24) $Re(0)=b/c$, а другий уявний доданок дорівнює нулю $Im(0) = 0$, що відповідає точці a дійсної осі діаграми (рисунок 2)

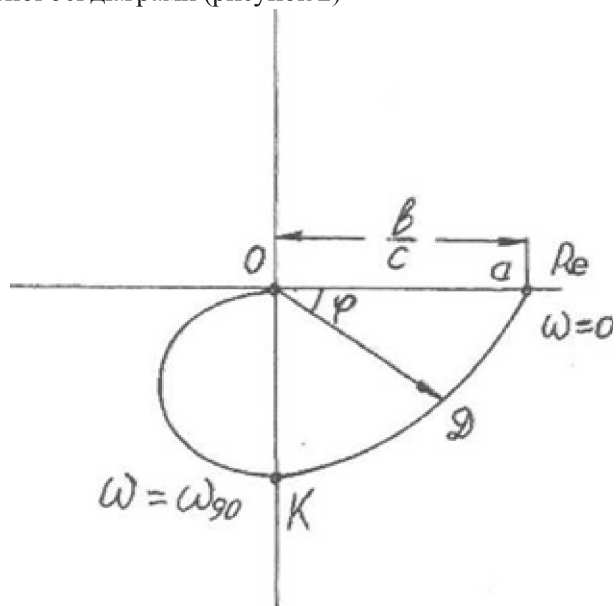


Рисунок 2 — Діаграма Найквіста

Другу особливу частоту визначають із умови рівності нулю дійсної частини. З останньої рівності знайдемо частоту, коли

$$c - m\omega^2 = 0, \quad \omega^2 = c/m$$

за якою неважко знайти уявну частину. Для цього в знаменнику другого доданка правої частини (24) варто записати:

$$c - m\omega_{90}^2 = 0 \quad \omega_{90}^2 = c/m,$$

а в його чисельнику $\omega_{90} = \sqrt{c/m}$. У результаті після скорочень одержимо вираження уявної частини на частоті ω_{90} : $Im(\omega_{90}) = (-b)/k_b \sqrt{m/c}$

Ця уявна частина на другій особливій частоті $\omega > \omega_{90}$ є відрізком ОК на рисунку 2. При подальшому збільшенні частоти $\omega > \omega_{90}$ дійсна частина стає від'ємною, оскільки у її чисельнику $m\omega^2 > C$. Уявна частина при $\omega > \omega_{90}$ зберігає від'ємний знак у своєму чисельнику. Тому точки кінця вектора модуля на більших частотах розміщуються в третьому квадранті на рисунку 2.

Модуль комплексної величини передатної функції (24) на деякій довільній частоті, представлений модулем вектора ОД на рисунку 2 і за формулою Піфагора дорівнює радикалу

$$W_{\Omega V}(j\omega) = \sqrt{(Re^2(\omega) + I_T^2 \omega)}. \quad (25)$$

Модуль комплексного виразу (24) у вигляді (25) є залежністю амплітуди змущених коливань кутової швидкості вала гідромотора $\omega(t) = \omega_0 + \omega(t)$ від кругової частоти цих змущених коливань. Цю залежність називають амплітудно-частотною (або іноді амплітудною) характеристикою. Залежність кута φ між вектором OD і дійсною віссю OA на рисунку 2 називають фазочастотною (або фазовою характеристикою). Для слабодемпфированих систем має місце яскраво виражений резонансний пік і

стрибок фази. З рівняння неважко бачити, що на границі стійкості ($k_b = 0$, частоти $\omega_{90} = \sqrt{c/m}$) знаменник дробу дорівнює нулю, тому що $C - m\omega^2 = 0$, й тому дійсна частина стає безкінечно зростаючою. Уявна частина на цій же частоті $\omega_{90} = \sqrt{c/m}$ також стає від'ємною необмежено зростаючою величиною.

Висновки

Динаміка об'ємного регулювання швидкості гідромотора у найпростішому випадку описується лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами другого порядку. У такому простому випадку збільшення підсилення в прямій ланці регулювання (наприклад, підвищення робочого об'єму насоса) або збільшення маси в навантаженні не призводить до втрати стійкості, що зазвичай має місце в системах автоматичного регулювання, які описуються диференціальними рівняннями третього і вищих порядків.

Друга особливість динаміки об'ємного регулювання швидкості вала гідромотора в порівнянні з коливальною ланкою другого порядку заключається у неможливості вивчення роздільного впливу майже усіх параметрів жорсткості C , маси m , коефіцієнта лінійного тертя та ін. Так, наприклад, момент інерції одночасно збільшує масу і демпфірування системи, робочий об'єм гідромотора одночасно підвищує жорсткість C та демпфірування системи.

Для вибору цих параметрів необхідно розглядати питання оптимального перехідного процесу проектованої гідравлічної системи.

Література

1. Объемные гидравлические приводы / [Башта Т.М. и др.] Под ред. Т.М. Башты. — М., «Машиностроение», 1968, 628 стр.
2. Сю, Д., Мейер, А. Современная теория автоматического управления и ее применение. Перевод с англ. Под ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1972. — С. 544.
3. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп / Пер. с англ. Б.И. Копылова. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. — 832 с.
4. Паллю де Ла Барьер, Р. Курс теории автоматического управления / Пер. с франц. Под. ред. П.И. Кузнецова. — М.: Машиностроение, 1973. — 396 с.
5. Иващенко, Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 606 с.

References

1. Obiomnye gydravlycheskie privody / [Bashta T.M. i dr.] Pod red. T.M. Bashty. — М.: Mashynostroenye, 1968. — 628 s.
2. Syu, D., Meyer, A. Sovremennaya teoriia avtomaticheskogo upravleniia i yeio prymerenie / Perevod s angl.; pod red.

d-ra tekhn. nauk, prof. Yu.Y. Topcheeva. — М.: Mashynostroenye, 1972. — S. 544.

3. Dorf, R. *Sovremennye systemy upravleniya*/ R. Dorf, R. Byshop; per. s angl. B.Y. Kopylova. — М.: Laboratoria Bazovykh Znaniy, 2004. — 832 s.

4. R. Pallyu de La Barer. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya*. Per. s frants. Pod. red. P.Y. Kuznetsova. М., «Mashynostroenye», 1973, 396 s.

5. Ivashchenko, N.N. *Avtomaticheskoye regulirovaniye. Teoria i elementy sistem*. — М., Mashynostroenye, 1973. — 606 s.

Надійшла 11.01.2017 року

УДК 629.735.054.3-33

Динамика объемного регулирования скорости гидромотора

В.С. Бутько, Д.Н. Хоменко

Цель. Теоретическое исследование объемного регулирования скорости вращения вала гидромотора. Создание математической модели.

Методы исследования. Упрощение анализа динамики путем введения предположений, которые не имеют значительного влияния на результат исследования, но значительно усложняют его решение, будучи взятыми во внимание. Использование преобразований Лапласа для создания передаточных функций. Применение диаграммы Найквиста.

Результаты. Создана математическая модель и проведено теоретическое исследование объемного регулирования скорости вращения вала гидромотора.

Выводы. Динамика объемного регулирования скорости гидромотора в простейшем случае описывается линейными дифференциальными уравнениями с

постоянными коэффициентами второго порядка за счет выбора выходного параметра гидромотора. В таком простом случае повышения усиления в прямой звене регулирования (например, повышение рабочего объема

насоса) или увеличение массы в нагрузке не приводит к потере устойчивости, обычно имеет место в системах автоматического регулирования, которые описываются дифференциальными уравнениями третьего и более высоких порядков.

Ключевые слова: гидромотор, линейные дифференциальные уравнения, приведенный рабочий объем, преобразования Лапласа, передаточная функция, частотный метод анализа, диаграмма Найквиста.

UDC 629.735.054.3-33

Dynamics of hydraulic motor speed volumetric regulation

V.S. Butko,
D.M. Khomenko

Aim. Theoretical study of volumetric regulation of rotation speed of hydraulic motor. Creating a mathematical model.

Methods of research. Simplifying the analysis of dynamics by introducing assumptions that do not have a significant effect on the result of the study, but essentially complicate its solution, being taken into account. Usage Laplace transforms to create transfer functions. Application of the Nyquist diagram.

Results. A theoretical study of volumetric regulation of the rotation speed of a hydraulic motor has been carried out, and a mathematical model has been created.

Conclusions. The dynamics of hydraulic motor volumetric speed regulation in the simplest case is described by constant coefficient second order linear differential equations due to the choice of the output parameter of the hydraulic motor. In such a simple case, increasing the gain in the direct regulating link (for example, increasing the working volume of the pump) or increasing the mass in the load does not lead to a loss of stability, with usually occurs in automatic control systems, described by differential equations of the third and higher orders.

Keywords: hydraulic motor, linear differential equations, reduced working volume, Laplace transform, transfer function, frequency analysis method, Nyquist diagram.