

РАСЧЕТ ПОТОКА В ЦЕНТРОБЕЖНОМ НАСОСЕ С УЧЕТОМ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

FLOW CALCULATION IN A CENTRIFUGAL PUMP CONSIDERING TURBULENCE

Цель. Подавляющее большинство реально встречающихся течений в проточной части гидравлических машин являются турбулентными. Изучение турбулентности с учетом особенностей турбулентного течения – важнейшая практическая задача для улучшения гидродинамических показателей энергетических машин и их надежности.

Методы. Обоснованная математическая модель течения жидкости в проточной части лопастной гидравлической машины (турбины или насоса), способствует развитию методов ее проектирования и определения гидродинамических параметров для целенаправленного совершенствования энергетических, кавитационных и силовых характеристик, что позволяет сократить термін выполнения технического задания и заменить дорогостоящий физический эксперимент вычислительным.

Результаты. Рассмотрены модели турбулентности, которые используются для расчета различных характеристик турбулентных течений. На основе приближенной модели течений вязкой жидкости проведено тестовое моделирование вихревого следа за цилиндром. Получены результаты моделирования развития вихревого следа за лопастями за один оборот рабочего колеса центробежного насоса.

Заключение. Результаты могут быть применены при расчете нестационарных нагрузок, действующих на элементы проточной части центробежного насоса.

Ключевые слова: математическая модель, турбулентность, центробежный насос.

Введение

Считая коэффициент $\mu = \text{const}$, а $\text{div} = 0$, система уравнений движения вязкой жидкости, называемая уравнениями Навье–Стокса, в векторной форме имеет вид:

$$-\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} V_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} V_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} V_z \right) = \rho \vec{F} - \text{grad} P + \mu \Delta \vec{V} \quad (1)$$

В системе уравнений (1) совместно с уравнением неразрывности число неизвестных (V_x, V_y, V_z, p) совпадает с числом уравнений, и поэтому она может быть решена.

Уравнения Эйлера для течения идеальной жидкости имеют вид:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

$$\text{т.е. } \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

$$\text{или } \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \frac{V^2}{2} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\Omega},$$

где $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V}$.

Если течение идеальной жидкости потенциальное, т.е. $\text{rot} \vec{V} = 0$, тогда существует потенциал скорости ϕ и вектор скорости \vec{V} равен $\text{grad} \phi = 0$, а уравнение неразрывности $\text{div} = 0$ получает вид

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

которое называют уравнением Лапласа.

Вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. Критерий практики позволяет сравнить различные гипотетические модели и выбрать из них ту, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого физического явления.

Поток, протекающий в машине, имеет сложную пространственную структуру. Течение жидкости в общем виде поддается математическому описанию уравнениями вязкой жидкости Навье–Стокса. Однако на практике пока не представляется возможным, учитывая уровень развития численных методов расчета уравнений Навье–Стокса и вычислительной техники, провести достаточно точный гидродинамический расчет пространственного течения

жидкости как во всей машине в целом, так и в ее отдельных элементах.

При проектировании гидравлических машин (турбин и насосов) выбор геометрических размеров и формы проточной части с учетом взаимного влияния всех элементов проточной части для получения высоких энергетических и динамических характеристик все еще представляет собой сложную научно-техническую задачу. Она решается, в основном, на основании опыта и интуиции конструктора с использованием упрощенных математических моделей турбулентного течения рабочей жидкости в проточной части.

Дифференциальное уравнение (1) в частных производных второго порядка нелинейное. Нелинейность его обусловлена членом с конвективным ускорением $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$. Решение векторного уравнения (1) необходимо подчинить граничному условию на поверхности тела при обтекании его потоком вязкой жидкости наряду с условием безотрывного обтекания, условию прилипания (смачивания) жидкости, т.е. нормальная и касательная составляющие скорости $V_n = 0$ и $V = 0$.

Постановка задачи и математическая модель

К основным численным методам можно отнести:

- Метод конечных разностей (FDM – Finite Differences Method) является одним из самых первых и самых простых методов решения дифференциальных уравнений, особенно в случае его использования в задачах с простой геометрией,

- Метод конечных объемов (FVM – Finite Volume Method) представляет собой главный способ решения связанных уравнений переноса импульса и турбулентности,

- Метод конечных элементов (FEM – Finite Element Method). Важным преимуществом методов конечных методов является их применимость для задач со сложными пространственными конфигурациями.

При конечно-разностном решении этой задачи положение может ещё более усложняться из-за неясности граничных условий. Для определения турбулентных напряжений используются приближенные модели турбулентности, которых на сегодняшний день насчитывается свыше 100 и существует утверждение, что каждая новая модель на кладбище теорий добавляет еще одну свежую могилу.

Исходя из сказанного выше, учет особенностей турбулентного течения наиболее полно описывается моделью пограничного слоя.

В настоящее время в силу большой практической значимости поиск эффективных разностных схем и алгоритмов решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости интенсивно продолжается, а оценка их качества определяется сопоставлением результатов расчетов с другими известными расчетными и экспериментальными данными.

Лагранжево и Эйлерово описания сплошной среды

Описать сплошную среду — это значит задать ее числовые характеристики. Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами: привязывать характеристику к частице в данный момент времени и привязывать характеристику к точке пространства, в которой в данный момент находится частица. Эти два способа называются, соответственно, лагранжевым и эйлеровым описаниями сплошной среды.

Таким образом, в лагранжевом подходе все характеристики задаются в переменных $(\xi, t) \in \Omega_0 \times \mathbb{R}$, а в эйлеровом — в переменных $(x, t) \in \{\Omega t \times \{t\} : t \in \mathbb{R}\}$. Соответственно, координаты (ξ, t) называются лагранжевыми координатами (или переменными), а (x, t) — эйлеровыми.

Эти два описания, разумеется, эквивалентны. Если известна некоторая характеристика F в лагранжевом описании, то можно найти ее представление в эйлеровом, и наоборот. Например, если $v^L(\xi, t)$ и $v^E(x, t)$ — лагранжево и эйлерово представления скорости, то, очевидно, что $v^L(\xi, t) = v^E(\gamma(\xi, t), t)$, и, наоборот, $v^E(x, t) = v^L(\gamma^{-1}(x, t), t)$.

Чтобы найти движение сплошной среды, т.е. траектории каждой частицы, в случае, когда известно поле скоростей в лагранжевом описании, достаточно найти интеграл от скорости

$$\gamma_1(\xi) = \xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \xi'(s) ds = \xi + \int_0^t v^L(\xi, s) ds$$

Если же поле скоростей задано в эйлеровом описании, то приходится решать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi'(t) = v^E(\xi(t), t), \quad \xi(0) = \xi$$

Каждое из этих описаний имеет свои преимущества и недостатки. В частности, основные дифференциальные уравнения сплошной среды проще в эйлеровом описании.

Классификация моделей турбулентности

Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM)

Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса

- Алгебраические модели
- Модели с одним уравнением
- модель Спаларта-Аллмареса SA
- модель Секундова vt-92
- Модели с двумя уравнениями
- Модели типа k-ε
- Модели типа k-ω
- Модель Ментера SST

*Модели рейнольдсовых напряжений
(нелинейные модели)*

- Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
 - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
 - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
 - Нелинейные модели (NLM)
- Рассмотрим некоторые из них.

Алгебраические модели турбулентности

Алгебраические модели принадлежат к простейшим типам моделей турбулентности, в которых связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного потока задается алгебраическими соотношениями. Отсюда следуют основные достоинства моделей такого типа вычислительная эффективность, простота калибровки и модификаций с учетом специфики рассматриваемых течений. Однако очевидна и узкая специализация этих моделей, поскольку они опираются на априорную (эмпирическую) информацию о структуре конкретного рассматриваемого течения.

Модель пути смешения Прандтля (Prandtl, 1925)

Модель для описания распределения v_t впервые была предложена Прандтлем в 1925 году и известна как модель пути смешения. Доказано, что она довольно хорошо воспроизводит тонкие вязкие слои. Рассматривая осредненные сдвиговые течения без градиента давления, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости равен градиенту осредненной скорости, умноженному на характерный масштаб длины l_m , который он назвал путем смешения

$$v_t = l_m^2 \partial \bar{v} / \partial y \quad (3)$$

Длина пути смешения определяется эмпирически. При рассмотрении течения в пограничном слое полагается

$$l_m \approx ky \quad (4)$$

где $k = 0,39$ универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от числа Рейнольдса. Таким образом, путь перемешивания пропорционален расстоянию от стенки y .

Успех модели, предложенной Прандтлем, определяется тем обстоятельством, что для многих типов сдвиговых течений l_m может быть выражена относительно несложными формулами.

*Модель Болдуина-Ломакса
(Baldwin-Lomax, 1978)*

Модель была сформулирована для расчета потока в тех случаях, когда параметры пограничного слоя (толщина и скорость на границе) трудно определить. Такая ситуация часто возникает при численном моделировании отрывных течений, в особенности, течений со скачками уплотнения.

Турбулентная вязкость определена следующим соотношением

$$v_t \begin{cases} v_i, y \leq y_m \\ v_o, y > y_m \end{cases} \quad (5)$$

где v_{ti} и v_{to} являются значениями v_t во внутреннем и внешнем слоях, а y_m есть наименьшее значение y , при котором $v_{ti} = v_{to}$. Вязкости во внутреннем и внешнем слоях принимаются так

внутренний слой

$$l_m - ky \left(1 - e^{-y^+ / A_0^+} \right) \quad (6)$$

внешний слой

$$v_{to} = \alpha C_{cp} F_{wake} F_{kiesb} \quad (7)$$

$$F_{wake} = \min \left(y C_{max}, C_{wik} y_{max} U_{div}^2 / F_{max} \right)$$

$$F_{max} = \frac{1}{k} \left[\max (l_m | \omega |) \right]$$

где $|\omega|$ — величина вектора завихренности, y_{max} — величина y , при котором $l_m | \omega |$ достигает максимальной величины, U_{div} — максимальная величина скорости в пограничном слое. Функция F является функцией перемежаемости Клебанова

Коэффициенты замыкания

$$\begin{cases} k = 0,40, \alpha = 0,0168, A_0^+ = 26 \\ C_{cp} = 1,6, C_{kiesb} = 0,3, C_{wik} = 1 \end{cases}$$

Алгебраические модели, безусловно, являются наиболее простыми из всех турбулентных моделей. Они концептуально очень просты и редко вызывают неожиданные вычислительные трудности. Однако следует всегда помнить о проблеме неполноты информации, получаемой с их помощью. Эти модели хорошо работают только при анализе тех потоков, на которые они были предварительно настроены.

Ограниченность моделей такого типа заключается в их природе — в локальном равновесии моделируемой турбулентности. Это означает, что в каждой точке пространства наблюдается баланс генерации и диссипации турбулентной энергии, на который не влияют ни перенос из соседних точек, ни предыдущее развитие процесса. Трудности для сложных типов течений представляет задание пути смешения. Однако для простых ситуаций, в частности при описании сдвиговых слоев, модель вполне пригодна.

Модели одного уравнения

Такие модели дают описание турбулентности с помощью одной переменной величины, для которой строится дифференциальное уравнение переноса. Другие турбулентные характеристики связываются с ней при помощи алгебраических или иных соотношений. К данному классу относится модель Спаларта-Аллмараса.

Модель Спаларта-Аллараса (Spalart-Allmaras, 1992)

Данная модель относится к классу низкорейнольдсовых. Первоначально она была развита для получения разумных расчетных оценок для двумерных смешанных течений, следов и пограничного слоя на плоской пластине. Испытания показали достоинство этой модели при расчете потоков с неблагоприятными градиентами давления по сравнению с $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделями. Определяющие уравнения модели таковы:

— кинематическая турбулентная вязкость

$$v_t = \tilde{\nu} f_{v_1} \quad (8)$$

— уравнение турбулентной вязкости

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b_1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{a_1} f_{\omega} \tilde{\nu} O d^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(v + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + \frac{c b_2}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \quad (9)$$

— коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения

$$\begin{cases} c_{b_1} = 0,1355, c_{b_2} = 0,622, c_{v_1} = 7,1, \sigma = 2/3 \\ c_{a_1} = 3,239, c_{a_2} = 0,3, c_{a_3} = 2, k = 0,41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, f_{v_1} = \chi^3 \chi^3 + c_{v_1}^3, f_{v_2} = 1 - \chi - \chi f_{v_1} \\ f_{\omega} = [1 + c_{a_2} \varepsilon^6 + c_{a_3} \varepsilon^6]^6, r = \frac{\tilde{\nu}}{S k^2 d^2}, g = r + c_{a_3} (r^6 - r) \\ \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v_2}, S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \end{cases}$$

где d — расстояние до ближайшей стенки, Ω_{ij} — тензор вращения.

Опыт использования модели Спаларта-Аллараса показал, что ее реальные возможности значительно шире, чем предполагалось при ее создании. Более того, после введения в нее поправок на кривизну линий тока и вращения, границы применимости модели заметно расширились. Модель является удовлетворительной для многих инженерных приложений. В особенности она применима для расчета обтекания профилей и крыльев, для которых она была калибрована.

Резюмируя, следует отметить, что класс моделей с одним дифференциальным уравнением обладает большой приемлемостью к описанию турбулентных течений с учетом сжимаемости, кривизны линий тока и отрыва потока. Однако, объектами их приложения, как правило, являются простые конфигурации потоков с минимальным набором структурных элементов.

Модели с двумя уравнениями

Модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями являются наиболее представительной группой дифференциальных моделей. Первая модель такого типа была предложена в классической работе Колмогорова. В качестве одного из уравнений все развитые модели, также как и Модель Колмогорова, используют уравнение переноса k — кинетической энергии турбулентных пульсаций. Причиной применения этого уравнения является то, что оно строго следует из уравнений Навье-Стокса, а также то, что для его замыкания необходимо промоделировать только два члена: диффузионный и диссипативный. В качестве примера рассмотрим $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ модели.

$k-\varepsilon$ модель Лаундера-Шармы (Launder-Sharma, 1974)

Моделирование турбулентности осуществляется на основе стандартного или низкорейнольдсового вариантов $k-\varepsilon$ модели. Уравнения модели включают формулу Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости и уравнения переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости ее диссипации.

Кинематическая турбулентная вязкость

$$v_t = C_{\mu} f_{\mu} k^2 \varepsilon \quad (10)$$

Кинетическая энергия турбулентности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon_1} f_1 \tau_{ij} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t / \sigma_{\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

коэффициенты замыкания

При постановке граничных условий на твердых поверхностях в рамках стандартной $k-\varepsilon$ модели предполагается, что в турбулентном пограничном слое имеет место универсальный логарифмический профиль скорости. При этом полагается $f_{\mu} = f_1 = f_2 = 1$.

При использовании низкорейнольдсового варианта $k-\varepsilon$ модели, вблизи твердой поверхности принимается

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \varepsilon = C_{\mu}^{3/4} \frac{k^{3/2}}{k \Delta x} \quad (13)$$

а также

$$f_{\mu} = e^{-2,5/(1+0,02 Re_t)}, f_1 = 1,0, f_2 = 1 - 0,3 e^{-Re_t^2} \quad \text{где } Re_t =$$

$k^2 / \nu \varepsilon$ — турбулентное число Рейнольдса.

$k-\omega$ модель Вилкокса (Wilcox, 1998)

Данная модель может применяться как в потоках с твердыми стенками, так и в течениях без касательных напряжений. Использование модели оказывается численно более устойчивым, чем упомянутых моделей. Соответствующие определяющие уравнения следующие:

— кинематическая турбулентная вязкость

$$v_t = k\omega \tag{14}$$

где ω — удельная диссипация турбулентности.

— кинетическая энергия турбулентности

$$\tag{15}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma^* v_i) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

— скорость диссипации

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{k}{\omega} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_i) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

— коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения

где составляющие осредненных тензоров вращения и

$$\alpha = 0,52, \beta_0 = 0,072, \beta_0^* = 0,09, \sigma = 0,5, \sigma^* = 0,5$$

$$\beta = \beta_0 f_{\beta} \chi_{\omega} = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_0 \omega)^3} \right|, f_{\beta} = \frac{1 + 70 \chi_{\omega}}{1 + 80 \chi_{\omega}}$$

$$\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*} \chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, f_{\beta^*} = \begin{cases} 1, & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2}, & \chi_k > 0 \end{cases}$$

скоростей деформации определяются

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), S_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Информация о правомерности численного решения уравнений Навье–Стокса

Хотя накладываемые ограничения значительно упрощают анализ, результаты технических исследований необходимо оценивать с точки зрения возможных последствий этих предположений. Если при теоретическом исследовании не принимались во внимание обнаруженные экспериментально существенные свойства явления, то нельзя рассчитывать, что такое исследование будет правильно отражать характеристики реальных течений. В частности, турбулентные течения никогда не бывают двумерными, даже если накладываемые на них граничные условия позволяют на это надеяться. Но

во всех предлагаемых коммерческих пакетах программ применяются только двумерные модели турбулентности без объяснения правомерности такой операции.

Таким образом, в уравнениях движения появляется шесть новых членов турбулентных напряжений, для вычисления которых необходимо устанавливать связь между пульсационными и осредненными скоростями в турбулентном потоке. Эту связь устанавливают модели турбулентности, которые основаны не на законах сохранения, а на более или менее простых физических гипотезах о характере процессов турбулентности. Датированное 1932 годом высказывание Г. Ламба остается актуальным и поныне: «Я старый человек и, когда после смерти попаду на небеса, то спрошу у Всевышнего две вещи: что такое квантовая электродинамика и что такое турбулентность. В отношении первого я настроен более оптимистически».

Цена, которую платят за новую упрощенную модель течения жидкости, является весьма высокой и дорогой, так как все модели турбулентности являются полуэмпирическими, а не моделями фундаментальных законов сохранения. Все уравнения динамики жидкости основаны на универсальных законах сохранения: массы, количества движения и энергии, а для получения конкретных числовых значений приближенных моделей, необходимо знать некоторые величины, определяемые на основе эксперимента, который весьма трудоемок и дорог. В общем случае турбулентная вязкость не постоянна. Она резко меняется по сечению потока или пограничного слоя от очень малых значений вблизи стенки до некоторого максимума на его половине, а затем вновь достигает минимума в центре. В настоящее время известно около ста моделей турбулентности, которые в целом делают задачу расчета турбулентного потока весьма приближенной и технически сложной. Все существующие модели турбулентности имеют недостатки, а для трехмерных течений они вообще отсутствуют и поэтому можно считать, что окончательная модель турбулентности еще не создана. Поэтому проблема решения уравнения Навье–Стокса в настоящее время привлекает ведущих ученых всего мира, так как в таких случаях численно решать уравнения Навье–Стокса нельзя.

Приближенная модель течения вязкой жидкости [6, 7, 9, 10]

Выше было показано, что уравнения движения вязкой жидкости отличаются от уравнений движения идеальной жидкости только наличием члена вида $\nabla^2 v^2 V$, учитывающего вязкость. Если допустить, что существует потенциальное течение вязкой жидкости, т.е. $V = grad \phi$, причем в силу уравнения непрерывности $\nabla^2 \phi = 0$, тогда $v grad \nabla^2 \phi = 0$, т.е. вязкий член в уравнении движения не входит и течение вязкой жидкости описывается теми же уравнениями, что и течение идеальной жидкости. Таким образом, предположение о возможности безвихревого

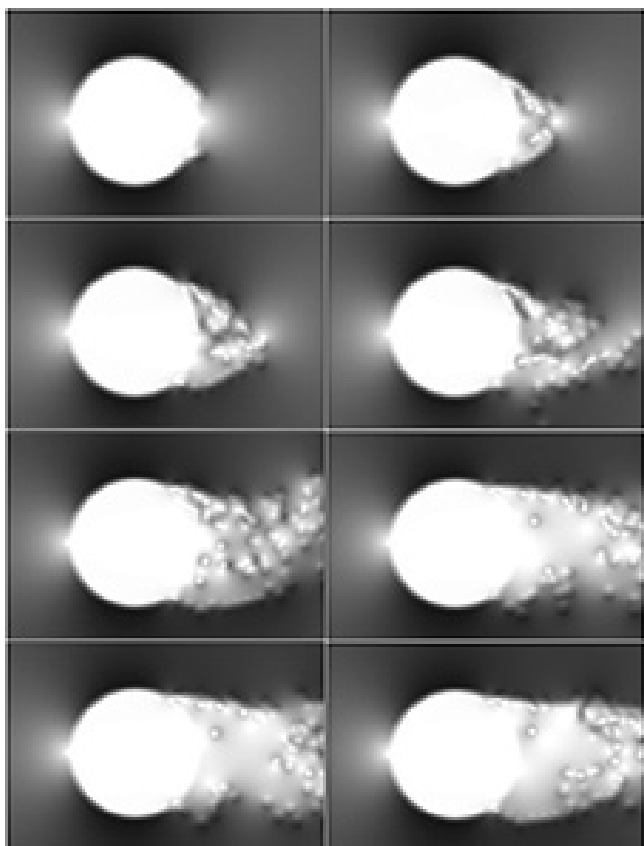


Рисунок 1 — Развитие вихревого следа за цилиндром



Рисунок 3 — Развитие вихревого следа за лопастями за один оборот рабочего колеса центробежного насоса

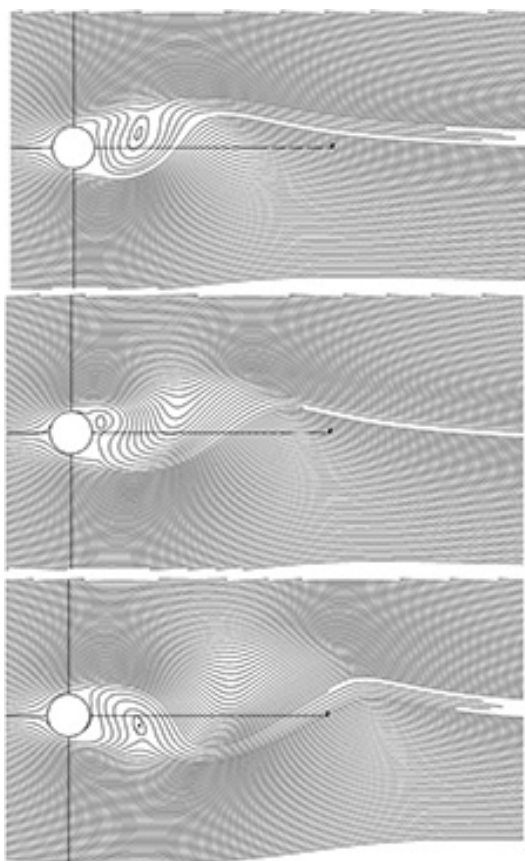


Рисунок 2 — Нестационарное течение возле цилиндра

течения вязкой жидкости не противоречит уравнениям движения и, казалось бы, что задачу можно свести к решению уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Но помимо уравнений движения должны удовлетворяться еще и граничные условия. Для идеальной жидкости эти условия заключаются в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на твердой неподвижной стенке. Для вязкой жидкости, кроме того, должна равняться нулю касательная к стенке составляющая скорости, т.е. $V_t=0$. Первое из условий вместе с уравнением Лапласа составляет классическую задачу Неймана, для которой доказана теорема существования и единственности. Иными словами, это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы существовало единственное решение уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$. Но такое решение не удовлетворяет, вообще говоря, второму условию, тогда как для всякой реальной (вязкой) жидкости это условие обязательно выполняется. Следовательно, для течения таких жидкостей потенциал скорости не существует. Кроме того, силы вязкости не являются потенциальными, а потому, течение вязкой жидкости вблизи твердых стенок должно быть вихревым. Тем не менее, если в частном случае воспроизвести на твердой поверхности такое же граничное условие, как и для идеальной жидкости, то движение вязкой жидкости окажется безвихревым. Оценивая качество

описанной приближенной модели, которая поддается сравнительно несложному теоретическому описанию и имеет численное решение, укажем на ее ограниченность и неспособность отразить все многообразие процессов и структуры потока. В большей степени это относится к центробежным (насосным) рабочим колесам, где еще не накоплен достаточный материал из опыта для разработки уточненных моделей. Торможение потока в каналах насосных колес приводит к интенсивному нарастанию пограничного слоя и в большинстве случаев к отрыву потока от стенок, образованию зон заторможенного потока (следа), нестационарным явлениям и дополнительным потерям. Весьма заметное влияние здесь оказывают вращение канала, кривизна его стенок, а также вторичное течение.

Сейчас нет недостатка в попытках построить замкнутую теорию турбулентности, основанную на попытках использования уравнений Больцмана.

Однако природа турбулентности такова, что ожидать быстрого решения этой задачи, используя физические методы и методы статистического анализа, едва ли было бы обоснованным. В отличие от тех задач, с которыми встречается молекулярная физика, теория турбулентности имеет дело с беспорядочно перемещающимися массами различных размеров, а пути их применения сравнимы с размерами перемещающихся масс. Это приводит к крайнему усложнению проблемы.

Экспериментальные данные обобщаются при помощи современных методов механики и математики. Для изучения турбулентности используется богатый арсенал физических приборов и методов.

Состояние проблемы турбулентности в настоящее время можно охарактеризовать как период зрелости этой науки. Накапливается и обобщается большой фактический материал, строятся практические приемы использования этих данных и создается основа для будущей стройной теории турбулентности течения.

Особое место в числе задач, решаемых приближенными методами, могут занимать те, в которых можно разделить поле течения вязкой жидкости на две характерные области: внешнюю, где влияние вязкости мало и поток можно приближенно считать квазипотенциальным, в котором течение вихревое, но выполняется условие

$$\vec{V} \operatorname{rot} \vec{V} = V_1 \Omega_1 + V_2 \Omega_2 + V_3 \Omega_3 = 0, \quad (17)$$

и пристенную, называемую пограничным слоем, где существенно проявление вязкости, а условие прилипания $V_{\tau} = 0$ обеспечивается непрерывным вихревым слоем, который назовем присоединенным. Интенсивность такого слоя определяется величиной скорости на обтекаемой поверхности, а индуцируемая им скорость условием прилипания.

Практические примеры приближенной модели получили развитие в работах [6—10].

На рисунках 1, 2 изображено развитие вихревого следа и мгновенные линии тока за цилиндром в различные моменты времени, полученные по методике описанной в работе [11]. На рисунке 3 — смоделировано развитие вихревого следа за лопастями за один оборот рабочего колеса центробежного насоса. Светлыми точками помечены вихри с закруткой по часовой стрелке, темными — против.

Выводы

1. Рассмотренные в работе понятия и модели турбулентности характеризуют существующие методы, которые в настоящее время используются для расчета различных характеристик турбулентных течений.

2. На основе приближенной модели течения вязкой жидкости проведено тестовое моделирование вихревого следа за цилиндром.

3. Приведены результаты моделирования развития вихревого следа за лопастями за один оборот рабочего колеса центробежного насоса.

4. Полученные результаты могут быть использованы при расчете нестационарных нагрузок, действующих на элементы проточной части центробежного насоса.

Литература

1. Темам, Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Наука, 1986. — 362 с.
2. Госмен, А.Д., Пан, В.М., Ранчел, А.К., Сполдинг, Д.В., Вольфштейн, М. Численные методы исследования течения вязкой жидкости. — М.: Мир, 1972. — 322 с.
3. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
4. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. — М.: Наука. — 1970. — 288 с.
5. Ames, W. F. Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Academic Press, 1965. — 120p.
6. Косторной, С.Д. Профилирование лопасти рабочего колеса радиально-осевой турбины из условия ортогональности линий тока и вихревых линий в абсолютном движении / С.Д. Косторной. Науч.-техн. конф. по итогам науч. работы за 1966 год. Рефераты докладов. «ХГУ». — 1968. — С.118.
7. Давиденко, А.К. Численное решение прямой задачи течения жидкости в проточной части центробежного насоса / А.К. Давиденко, А.С. Косторной // Насосы и оборудование. Отраслевой журнал. — 2004. — №2(25). — С. 32—35.
8. Давиденко, А.К. Численное моделирование течения жидкости в проточной части центробежного насоса с целью получения требуемой формы рабочей характеристики // Институт проблем машиностроения. — Харьков. — 2003. — Т. 2. — С.577—581.

9. Косторной, С.Д. Выбор толщины лопасти рабочего колеса при проектировании лопастной гидравлической машины / С.Д. Косторной, Н.С. Мартынова // Вестник Сумского гос. ун-та. — 2013. — № .

10. Косторной, С.Д. О некоторых неточностях решения уравнения движения жидкости при проектировании гидравлических машин / С.Д. Косторной, А.С. Косторной, А.Ю. Хатунцев // Промислова гідроліка і пневматика. — 2016. — №1 (51). — С. 33—40.

11. Косторной, С.Д. Компьютерное проектирование проточной части центробежных насосов / С.Д. Косторной, А.О. Бондарев, Л.К. Марченко // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. — 2012. — № 2 (10). — С. 305—311.

References

1. Temam, R. Uravnenia Navie–Stoksa. Teoria i chislennyi analiz. — M.: Nauka, 1986. — 362 s.

2. Gosmen, A.D., Pan, V.M., Ranchel, A.K., Spolding, D.V., Volfshstein, M. Chislennye metody issledovaniya techeniya v yazykoi zhidkosti. — M.: Mir, 1972. — 322 s.

3. Rouch, P. Vychislitel'naya gidrodinamika / P. Rouch. — M.: Mir, 1980. — 608 s.

4. Ladyzhenskaya, O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki v yazykoi neszhyamayemoy zhidkosti / O.A. Ladyzhenskaya. — M.: Nauka, 1970. — 288 s.

5. Ames, W. F. Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Academic Press, 1965. — 120 p.

6. Kostornoy, S.D. Profilirovanie lopasti rabocheho kola radialno-osevoi turbiny iz usloviya ortogonalnosti liniy toka i vikhrevykh liniy v absolyutnom dvizhenii / S.D. Kostornoy // Nauch.-tekhn. konf. po itogam nauchn. raboty za 1966 god. Referaty dokladov. — Kh.: «KhGU», 1968. — S. 118.

7. Davidenko, A.K. Chislennoye reshenie priamoi zadachi techeniya zhidkosti v protochnoi chasti tseentrobezhnogo nasosa / A.K. Davidenko, A.S. Kostornoy // Nasosy i oborudovanie. Otrazhevo zhurnal. — 2004. — №2 (25). — S. 32—35.

8. Davidenko, A.K. Chislennoye modelirovanie techeniya zhidkosti v protochnoi chasti tseentrobezhnogo nasosa s tseliu polucheniya trebuemoi formy rabochei kharakteristiki // Inzhinirskiy problem mashinostroyeniya. — Kharkov. — 2003. — T. 2. — S. 577—581.

9. Kostornoy, S.D. Vybor toshchiny lopasti rabocheho kola pri proektirovanii lopastnoy gidravlicheskooy mashiny / S.D. Kostornoy, N.S. Martynova // Vestnik Sumskogo gos. un-ta. — 2013. — № 1.

10. Kostornoy, S.D. O nekotorykh netochnostyakh resheniya uravneniya dvizheniya zhidkosti pri proektirovanii gidravlicheskiykh mashin / S.D. Kostornoy, A.S. Kostornoy, A.Yu. Khatuntsev // Promyslova gidravlika i pnevmatyka. — 2016. — №1 (51). — S. 33—40.

11. Kostornoy, S.D. Kompyuternoye proektirovanie protochnoi chasti tseentrobezhnykh nasosov / S.D. Kostornoy, A.O. Bondarev, L.K. Marchenko // Современная наука: issledovaniya, idei, rezultaty, tekhnologii. — 2012. — № 2 (10). — S. 305—311.

Надійшла 21.12.2016 року

УДК.621.671

Розрахунок потоку у відцентровому насосі з урахуванням турбулентності

А.К. Давиденко

Мета. Переважна більшість реально існуючих течій в проточній частині гідролічних машин є турбулентними. Вивчення турбулентності та врахування особливостей турбулентної течії – надважлива практична задача для покращення гідродинамічних показників енергетичних машин та їх надійності.

Методи. Обґрунтовано математичну модель течії рідини у проточній частині лопатевої гідролічної машини (турбіни або насоса), що сприяє розвитку методів проектування і визначення гідродинамічних параметрів для цілеспрямованого удосконалення енергетичних, кавітаційних і силових характеристик, які дозволяють скоротити термін виконання технічного завдання і замінити витратний фізичний експеримент розрахунковим

Результати. Розглянуто сучасні моделі турбулентності, які використовуються для розрахунку різних характеристик турбулентних течій. На основі наближеної моделі течії в'язкої рідини проведено тестове моделювання вихрового сліду за циліндром. Отримано результати моделювання розвитку вихрового сліду за лопатями упродовж одного оберту робочого колеса відцентрового насоса.

Висновки. Результати можуть бути використані при розрахунках нестационарних навантажень, що діють на елементи проточної частини відцентрового насоса.

Ключові слова: математична модель, турбулентність, відцентровий насос.

UDC.621.671

Flow calculation in a centrifugal pump considering turbulence

A.K. Davidenko

Aim. The majority of flows presented in the hydraulic passage of the hydraulic machines is turbulent. The study of turbulence and consideration of peculiarities of the turbulent

How is a very important practical task for improving the hydrodynamic parameters of the power machines and their reliability.

Methods. The numerical validated model of fluid flowing through hydraulic passage of the vane-type hydraulic machine (turbine or pump) contributes to the development of methods for its designing and defining of hydrodynamic parameters for the improvement of energy, cavitation and power characteristics at the design stage, which allows to reduce the time of the technical assignment fulfillment and replace the costly physical experiment with numerical one.

The paper considers turbulence models, which are currently used to calculate various characteristics of turbulent flows.

Results. On the basis of an approximate model of viscous fluid flow, a test simulation of the vortex wake behind the cylinder was performed.

Conclusion. The results of simulation of the generation of the vortex wake behind the blades in one revolution of the impeller of a centrifugal pump are presented. The obtained results can be used in the calculation of non-stationary loads acting on the hydraulic parts of a centrifugal pump.

Keywords: numerical model, turbulence, centrifugal pump.