УДК 301.17.15; 301.07.13

П.В. Лукьянов , канд. физ.-мат. наук
Национальный авиационный университет, Киев, Украина

МОДЕЛИ ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ВИНТОВЫХ (БЕЛЬТРАМИ–ГРОМЕКИ) СТАЦИОНАРНЫХ КОМПАКТНЫХ ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ

MODELS OF ADVANCED SCREW (BELTRAMI–GROMEKA) STATIONARY COMPACT VORTEX FLOWS

Цель. В рамках существующих понятий о винтовых течениях получить одновременно компактные распределения полей азимутальной и продольной компонент скорости не представляется математически возможным. Целью представленных исследований является разработка моделей компактных вихревых потоков с винтовыми ядрами (течениями Бельтрами–Громеки) и бездиффузионной периферией (обычное вращение вязкой жидкости, ламинарное течение).

Методы исследований. Эти модели получены на основе теоретических методов с использованием одномерных уравнений Навье–Стокса для периферии течения. Данный подход согласуется с существующим определением винтового (Бельтрами–Громеки) течения как стационарного и невязкого. В результате, вместо игнорирования эффектами вязкости для периферии течения, были использованы решения указанных уравнений.

Результаты исследований. Эти решения отражают подверженные влиянию диффузии, и следовательно сформированные нею, бездиффузионные распределения скорости. Физически, течение становится когерентным и существует очень долго. В качестве примеров рассмотрены две модели вихревых потоков. Распределения для азимутальной и продольной компонент скорости теперь уже имеют конечный размер в радиальном измерении (направлении), то есть компактные. В первой модели, где азимутальная скорость имеет распределение в виде компактного аналога вихря Рэнкина, течение является винтовым лишь в ядре вихря. Во втором примере используется модель обобщенного квазиточечного вихря и течение является винтовым везде кроме тонкой внешней области. Таким образом, в областях, где течение не является винтовым (Бельтрами–Громеки), можно использовать бездиффузионные решения для продольной компоненты скорости.

Заключение. Таким образом, отойдя от требования строгости винтового характера течения во всей области, можно получить, что было и сделано, модели преимущественно винтовых компактных течений.

Ключевые слова: течение Бельтрами–Громеки, компактный компенсированный вихрь, когерентное течение, аналитические модели

Постановка проблемы

Течение жидкости и газа хотя формально и разделяется на турбулентное и ламинарное, в природе часто существует в виде симбиоза ламинарного течения на фоне мелкомасштабной турбулентности. Если при ламинарном течении молекулярная вязкость способна осуществлять лишь диссипацию энергии, то для турбулентных течений — всё иначе. В 2017 году научное сообщество отметило 50-летие выхода в свет статьи Крайчна [1], положившей начало понятию отрицательной турбулентной вязкости.

Теория Колмогорова прямого каскада турбулентной энергии — от больших масштабов к меньшим, не в состоянии объяснить формирование мезомасштабных вихревых структур в развитой турбулентности. Как уже известно [2], механизм образования локальных компактных вихревых структур определяется наличием в турбулентном течении спиральности. Обратный каскад турбулентной энергии — от меньших масштабов к большим, имеет место лишь в течениях с вращением.

Любое течение жидкости, у которого векторы скорости и ротора скорости не являются перпендикулярными, обладает определенной спиральностью — скалярным произведением векторов ротора скорости и самой скорости. Именно спиральность под действием диссипации в меньшие масштабы передаёт свою энергию формированию мезомасштабных когерентных компактных вихревых структур [3,4]. В данном случае говорят об эффекте так называемой отрицательной турбулентной вязкости.

Несмотря на существующую библиографию, посвященную изучению образования и развития компактных вихревых структур, модели компактных вихрей до сих пор слабо представлены. В начале нынешнего десятилетия классические модели точечного вихря и вихря Рэнкина были дополнены их компактными аналогами

— квазиточечным и компактным компенсированными вихрями. На их основе были получены компактные аналоги вихревых течений — винтовых и с винтовой симметрией [5].

Данная работа посвящена винтовым течениям или, как их принято называть, Бельтрами–Громеки. Поскольку у этих течений вектора скорости и завихренности коллинеарны, то они обладают экстремальной (минимальной или максимальной) спиральностью. Далее термин винтовое будет использоваться только для течения с экстремальной спиральностью. Винтовой поток, будучи частным случаем течения Бельтрами–Громеки, согласно определению является невязким [6–8]. В отличие от течений с винтовой симметрией [8] для винтовых течений компактность поля азимутальной скорости автоматически не приводит к компактности продольной скорости. Как оказалось, невозможно получить модели компактных полностью винтовых (БГ) течений, у которых вектор скорости равен нулю на внешней границе. Та же ситуация существует для бесконечной области, когда внешняя граница отсутствует и вихрь свободный. Разработка моделей компактных вихревых течений, таким образом, нуждается в вовлечении дополнительных физических соотношений. В результате можно получить модели течений, близкие к винтовым. Винтовые течения являются стационарными. Поэтому поиск решений на периферии течения, не являющегося течением Бельтрами–Громеки, нужно осуществлять в классе решений стационарных уравнений Навье–Стокса, описывающих исследуемую динамику жидкости в вязком слое.

Использовать подход, предлагаемый в Интернете (Википедия), согласно которому течение Бельтрами–Громеки описывается линейным уравнением теплопроводности, нельзя. Для стационарного течения, согласно Википедии, получаем решения, которые, легко проверить, не согласуются с определением винтовых течений Бельтрами–Громеки. Поэтому в данной работе распределение азимутальной скорости представлено известными решениями для компактных вихревых течений, а осевая (продольная) компонента скорости находится из определения винтового Бельтрами–Громеки течения везде за исключением внешней (периферийной) области.

Поскольку данная тематика слабо представлена в литературе, а в учебной вообще отсутствует, то ниже освещается физическая и математическая сторона компактных вихревых течений. За ними следуют непосредственно предлагаемые простые модели компактных винтовых течений. Несмотря на турбулентный характер образования, их последующая динамика является ламинарной. Наконец, завершают работу выводы с указанием на научную новизну и перспективами дальнейших исследований.

Математическое и физическое обоснование существования компенсированных вихрей

А. Компактность вихря

Для вихревых течений с конечным радиальным размером используется английский термин «zero net circulation» [9], что дословно означает «с нулевой общей циркуляцией». Русскоязычным аналогом является термин «компактный компенсированный» [10,11]. Равная нулю общая циркуляция означает отсутствие вне вихря какого-либо движения, как вихревого так и потенциального. В связи с отсутствием в литературе ниже приводится математическое объяснение этого термина (понятия). Термин «компактный компенсированный» ближе к физике. Для цилиндрических течений нулевая общая циркуляция получается, когда распределение завихренности внутри вихря является компенсированным: ротор скорости должен иметь, по крайней мере, две области завихренности разного знака. Продемонстрируем смысл этого явления.

Азимутальная скорость в цилиндрической системе координат для простейшего течения, у которого все характеристики зависят лишь от радиальной координаты, вычисляется по следующей формуле:

$$V_\theta = \frac{1}{r}\int_0^r \Omega_z r dr \,, \tag{1}$$

где Ω_z — компонента ротора скорости.

Вихрь называется компенсированным, если

$$V_\theta(r \ge R_V) = \frac{1}{r}\int_0^{R_V} \Omega_z r dr = 0 \,, \tag{2}$$

R_V — радиальный размер вихря.

Правая часть соотношения (2) ясно указывает на отсутствие какого-либо движения вне области вихря [12,13].

Б. Когерентная природа течения

Пусть в результате обратного каскада турбулентной энергии образовался уединенный мезомасштабный вихрь. Теперь попробуем объяснить, почему течение жидкости может сохраняться (существовать) в течение долгого времени. Есть два варианта ответа. Первый — непрерывная подкачка энергии от мелкомасштабной турбулентности. При этом диссипация и порождение, очевидно, должны находиться в динамическом равновесии. Второй, неочевидный, состоит в том, что жидкость, независимо от того, какую модель мы используем для формулировки и решения задачи, имеет определенную (конечную, ненулевую) вязкость. Почему же тогда до сих пор существует множество так называемых невязких моделей, и они описывают стационарное течение? В действительности, существуют два пути объяснения физики этого феномена (явления). Первый состоит в простом игнорировании вязких слагаемых в уравнениях Навье–Стокса на основе их относительной (пренебрежимой) малости (большие числа Рейнольдса) по сравнению с инерциальными. Поступая таким образом, мы можем использовать любые функциональные распределения для скорости, предполагая, что течение описывается функциями лишь одной радиальной координаты r. Но, как отмечено выше, вязкость присутствует и должна, по логике вещей, приводить к диссипации.

Предположим далее отсутствие радиальной компоненты скорости и будем считать в целом течение ламинарным. Уравнения Навье–Стокса для стационарного движения жидкости в цилиндрических координатах тогда примут вид:

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \quad 0 = \nu\left(\frac{d^2V_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_\theta}{dr} - \frac{V_\theta}{r^2}\right), \tag{3}$$

$$0 = \nu\left(\frac{d^2V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right).$$

Здесь p, V_Z, ν — давление, осевая скорость и молекулярная диффузия соответственно.

Уравнения (3) подтверждают вышеприведенное состояние распределения скорости. Пренебрежение вязкостью превращает второе и третье уравнения (3) в тривиальные 0=0. Первое из уравнений (3) — просто гидростатический баланс. Тем не менее известно отсутствие большого разнообразия решений (распределений) для функции азимутальной скорости. Объяснение состоит в том, что если произвольное начальное распределение «хочет сохраниться (спастись)», оно должно согласовываться со вторым и третьим уравнениями (3) для азимутальной и осевой компонент скорости соответственно. В результате, когерентные (долгоживущие) вихревые структуры существуют во множестве решений этих уравнений:

$$V_\theta = C_1 r^{-1} + C_2 r, \quad V_z = C_1 \ln r + C_2. \tag{4}$$

Будем считать (4) бездиффузионными решениями. Этот термин означает стационарное во времени распределение скорости, которое не подвержено влиянию диффузии (заметьте: об отсутствии вязкости ничего не говорится).

Для того, чтобы быть (или стать, прежде всего) когерентным, течение подстраивается под действие молекулярной (а возможно и турбулентной) диффузии таким образом, чтобы впоследствии стать бездиффузионным. В этом состоит физика, содержащаяся в формулах (4). В данной работе бездиффузионные решения для азимутальной компоненты скорости используются везде (в объеме вихревого течения), а для осевой компоненты скорости в областях, где течение не является винтовым. Для областей с винтовым течением азимутальная скорость основана на бездиффузионных решениях первого уравнения (4) и их комбинациях в то время как осевая компонента скорости получается из определения (соотношений) винтового течения. В реальных условиях нет ничего идеального и распределения скорости, основанные на решениях (4), следует трактовать как приближенные (модельные).

Когерентные винтовые Бельтрами–Громеки потоки

A. Уравнения винтового Бельтрами–Громеки потока

В криволинейной системе координат общие уравнения для винтового Бельтрами–Громеки течения в соответствии с определением имеют следующий вид [3,10]:

$$\frac{1}{L_2L_3}\left(\frac{\partial L_3V_3}{\partial q_2} - \frac{\partial L_2V_2}{\partial q_3}\right) = \lambda V_1,$$

$$\frac{1}{L_3L_1}\left(\frac{\partial L_1V_1}{\partial q_3} - \frac{\partial L_3V_3}{\partial q_1}\right) = \lambda V_2,$$

$$\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{\partial L_2V_2}{\partial q_1} - \frac{\partial L_1V_1}{\partial q_2}\right) = \lambda V_3, \tag{5}$$

где L_1, L_2, L_3 — коэффициенты Лямэ, q_1, q_2, q_3 — криволинейные координаты. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) уравнения (5) имеют следующую форму

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z}\right) = \lambda V_r, \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \lambda V_\theta,$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) = \lambda V_z. \tag{6}$$

Предположим, что и азимутальная и аксиальная компоненты скорости являются функциями лишь радиальной координаты и $\lambda \neq 0$ в уравнениях (6). В этом случае система уравнений (6) упрощается до следующих двух уравнений [7,13]:

$$-\frac{\partial V_z}{\partial r} = \lambda V_\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \lambda V_z. \tag{7}$$

Исключая параметр λ из (7), получаем

$$-V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r} \text{ или } \frac{\partial V_z^2}{2\partial r} = -V_\theta \Omega_z \,, \qquad (8)$$

где $\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r}$.

Второе из соотношений (8) представляет собой уравнение винтового потока.

Б. Существующие модели винтовых (БГ) потоков

В качестве простейшего винтового потока существует модель, в которой поле азимутальной скорости описывается твердотельным вращением [8]:

$$V_\theta = \alpha r \qquad (9)$$

В (9) α — константа. Подстановка (9) в (8) приводит к

$$V_z = \sqrt{V_0^2 - 2\alpha r^2} \qquad (10)$$

В (10) $V_0 = V_z(r=0)$.

В монографии [8] также приведены еще три модели винтовых потоков. У каждой из них распределение азимутальной скорости является не компактным с асимптотикой точечного вихря. В работе [13] азимутальная скорость уже имеет компактные распределения, основанные на моделях компенсированных вихрей [5,12] с использованием первого бездиффузионного решения (4). Однако, осевая скорость все еще не является в них компактной.

В. Компактный вихревой поток с винтовым Бельтрами–Громеки ядром

Предположим, что вихревое ядро имеет тот же масштаб, что и радиус вихря. В таком случае подходит следующая модель. Пусть азимутальная скорость описывается компактным компенсированным вихрем [12] в качестве обобщенного вихря Штерна [14] :

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{V_0 r}{a}, & 0 \le r \le a; \\ \dfrac{V_0 a}{r}\left(\dfrac{R_V^2 - r^2}{R_V^2 - a^2}\right), & a \le r \le R_V; \\ 0, & r \ge R_V. \end{cases} \qquad (11)$$

$$\Omega_z = \begin{cases} \dfrac{2V_0}{a}, & 0 \le r \le a; \\ \dfrac{-2V_0 a}{R_V^2 - a^2}, & a < r \le R_V; \\ 0, & r > R_V. \end{cases}$$

Будем искать осевую скорость в следующем множестве течений:

Объединяя (8), (11) и (12), можно получить:

$$V_z = \begin{cases} \text{винтовое течение}, & 0 \le r \le a; \\ \text{бездиффуз. вихревое течение}, & a < r \le R_V; \\ 0, & r > R_V. \end{cases} \qquad (12)$$

$$V_z = \begin{cases} \sqrt{V_{z0}^2 - 2\left(V_0 r/a\right)^2}, & 0 \le r \le a; \\ \sqrt{V_{z0}^2 - 2V_0^2}\,\ln\left(\dfrac{R_V}{r}\right)/\ln\left(\dfrac{R_V}{a}\right), & a < r \le R_V; \\ 0, & r > R_V. \end{cases} \qquad (13)$$

Соответствующие азимутальная и осевая компоненты скорости представлены на рисунке 1. Заметим, что их распределения теперь являются оба компактными. Течение имеет винтовое ядро (с экстремальной спиральностью) $0 \le r \le 0.5$ и бездиффузионную периферию $0.5 \le r \le 1$.

Г. Преимущественно винтовое Бельтрами–Громеки компактное течение

Во многих течениях вихревое ядро мало по сравнению с размером самого вихря. В этом случае модель квазиточечного вихря является хорошим приближением внутри множества компактных течений [15]. Для лучшего понимания следующих рассуждений покажем, как модели точечного и квазиточечного вихрей были получены. Рассмотрим вихревую трубку с поперечным сечением *S*. Сжимая эту трубку таким образом, что циркуляция оставалась постоянной

$$\Gamma = \lim_{S \to 0} \int \Omega_0 ds = \text{Const} \,,$$

и поперечное сечение вихря было круглым, так что его площадь $S = \pi\varepsilon^2$, получаем в результате

$$\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \Omega_0 \pi \varepsilon^2 \qquad (14)$$

Используя равенство (14), можно ввести своего рода универсальную модель вихря

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma r}{2\pi\varepsilon^2}, \quad 0 \le r \le \varepsilon << R_V; \\ \dfrac{\Gamma}{2\pi r}\left(\dfrac{R_V^2 - r^2}{R_V^2 - \varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon \le r \le R_V; \\ 0, \quad r \ge R_V. \end{cases} \tag{15}$$

Различные пределы (15) дают в результате точечный вихрь, квазиточечный вихрь и вихрь Рэнкина. В частности, при $\varepsilon \to 0$ решение (15) преобразуется в модель квазиточечного вихря [15]

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2}{R_V^2}\right). \tag{16}$$

Распределение скорости (15) соответствует следующему выражению для завихренности

$$\Omega_z = \begin{cases} \dfrac{\Gamma}{\pi\varepsilon^2}, \quad 0 \le r \le \varepsilon << R_V; \\ -\dfrac{\Gamma}{\pi\left(R_V^2 - \varepsilon^2\right)}, \quad \varepsilon \le r \le R_V; \\ 0, \quad r \ge R_V. \end{cases} \tag{17}$$

Принимая во внимание (15) и (17), получаем:

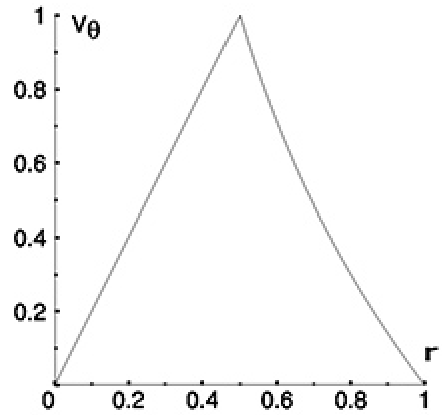
$$-V_z\Omega_z = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Gamma}{\pi\varepsilon^2}\right)^2 r, \quad 0 \le r \le \varepsilon << R_V; \\ \left(\dfrac{\Gamma}{\pi\left(R_V^2 - \varepsilon^2\right)}\right)^2 \dfrac{R_V^2 - r^2}{2r}, \quad \varepsilon \le r \le R_V; \\ 0, \quad r \ge R_V. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение (8) и используя второе уравнение (4) внешней области вихря толщиной δ, получаем распределение для осевой скорости

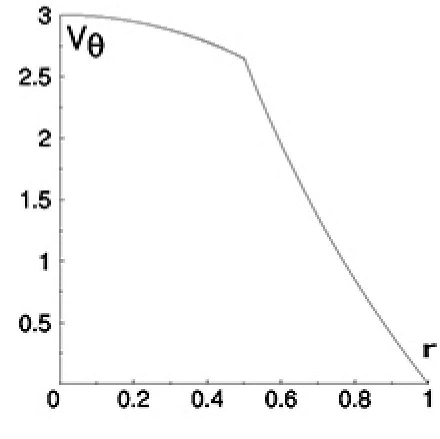
$$V_z = \begin{cases} \sqrt{V_{z0}^2 - 2\left(\dfrac{\Gamma}{\pi\varepsilon^2}\right)r^2}, \quad 0 \le r \le \varepsilon; \\ \sqrt{V_{z0}^2 - 2\left(\dfrac{\Gamma}{\pi\varepsilon}\right)^2 + \varphi(r)}, \\ \varepsilon \le r \le R_V - \delta; \\ V_z(r = R_V - \delta)\cdot \ln\left(\dfrac{r}{R_V}\right) / \ln\left(\dfrac{R_V - \delta}{R_V}\right), \\ R_V - \delta \le r \le R_V; \\ 0, \quad r \ge R_V, \end{cases}$$

где

$$\varphi(r) = \left(\frac{\Gamma}{\pi\left(R_V^2 - \varepsilon^2\right)}\right)^2 \left(R_V^2 \ln\frac{r}{\varepsilon} - \frac{r^2 - \varepsilon^2}{2}\right)^2$$

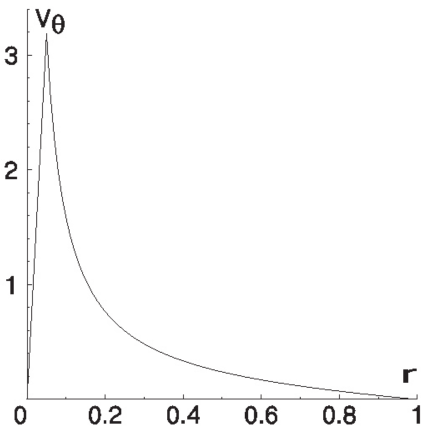


а

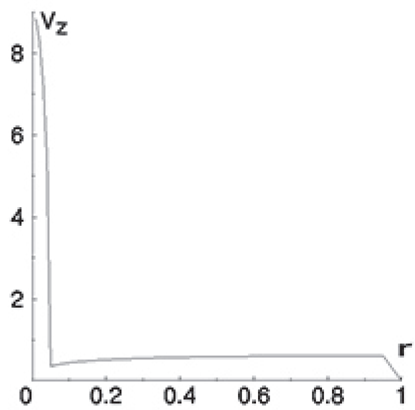


б

Рисунок 1 — Графики зависимости азимутальной (а) и осевой (б) компонент скорости для компактного вихревого потока с винтовым ядром.



а



б

Рисунок 2 — Графики радиальных распределений азимутальной (а) и осевой (б) компонент скорости для компактного квазивинтового течения

Показанное на рисунке 2, а распределение азимутальной скорости, соответствует осевой скорости, рассчитанной по (15), рисунок 2, б. Видно, что осевая скорость почти постоянна внутри средней области, где кривая близка к точечному вихрю и приближенно равна нулю. Такое распределение осевой скорости наблюдается при свертывании вихревой пелены (при обтекании крыла), а также в закрученном течении воды в криволинейном канале.

Выводы

Полностью винтовых Бельтрами–Громеки течений с неподвижной внешней границей не существует. Один из возможных подходов построения представленных в данной работе моделей течений, близких к винтовым, состоит в учёте сил вязкости в уравнениях Навье–Стокса для периферийной области течения вместо трактовки винтовых течений как идельных. Вместо пренебрежения вязкими эффектами предложено использовать бездиффузионные решения, что означает отсутствие (нулевое) влияние вязкости на диффузию поля скорости. С точки зрения математики, пренебрегаем ли мы вязкостью или предполагаем её равной нулю, всё равно. С физической точки зрения — это разные вещи. Пренебрегая вязкостью, мы предполагаем её малость по сравнению с другими силами в уравнениях. В соответствии с предложенным подходом, важно то, что сумма всех слагаемых, отвечающих за вязкость, всегда строго равна нулю, так что течение является когерентным (стационарным, долгоживущим, бездиффузионным). В качестве примеров рассмотрены две модели, в которых азимутальная скорость представлена обобщенным вихрем Штерна и квазиточечным вихрем.

В дальнейшем исследования можно направить на поиск и построение моделей, учитывающих вихревую (турбулентную) вязкость, на фоне которой может существовать когерентное компактное вихревое течение.

Литература

1. Kraichnan, R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence / R. H. Kraichnan // Phys. Fluids — 1967. — Vol. 10. — P. 1417—1423.

2. Колисниченко, А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска /А.В. Колисиниченко. — Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша., 2014. — №70. 36 с.

URL http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014—70

3. Lindborg, Erik. A two-dimensional toy model for geophysical turbulence. / Erik Lindborg and Ashwin Mohanan // Phys. Fluids — 2017. — Vol. 29, 111114.

https://doi.org/10.1063/1.4985990

4. Oks, D. Inverse cascades and resonant rtiades in rotating and stratified turbulence / D. Oks, P.D. Mininni, R. Mariono, and A. Douquet Rosenberg // Phys. Fluids — 2017. — Vol. 29, 11109.https://doi.org/10.1063/1.5001740

5. Лук'янов, П.В. Розвиток аналітичних моделей компактних монопольних вихрових течій. / П.В. Лук'янов, В.М. Турик // Наукові вісті НТТУ «КПІ" — 2017.— том №4(114). — С 81—92. https://doi.org/10.20535/1810-0546.2017.4.102048

6. Громека, И.С. Собрание сочинений / И.С. Громека — М: Изд-во АН СССР, 1952. — 296 с.

7. Васильев, О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. / О.Ф. Васильев — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.

8. Alekseenko, S.V. Theory of Concentrated Vortices: An Introduction / S.V. Alekseenko, P.A. Kuibin, V.L. Okulov — Springer — Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. — 493 p.

9. Hopfinger, E.J. Vorticies in rotating fluids / E.J. Hopfinger , G.J.F. van Heijst // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 25. — P. 241—289.

10. Козлов, В.Ф. Геофизическая гидродинамика вихревых пятен /В.Ф.Козлов// Морской гидрофизический журнал. — 1994. — № 1 — С. 26–35.

11. Козлов, В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей / В.Ф. Козлов // Известия АН, Физика Атмосферы и Океана. — 1992. — т. 28, № 6. — С. 615 –624.

12. Лук'янов, П.В. Одновимірні моделі компактних компенсованих вихорів / П.В. Лук'янов // Наукові вісті НТТУ "КПІ". — 2010. — № 4. — С. 145–150.

13. Лукьянов, П.В. Компактные винтовые вихри / П.В. Лукьянов // Прикладна гідромеханіка. — 2011 — Т. 13(85), № 3. — С. 61—68.

14. Stern, M .E. Minimal properties of planetary eddies / M.E. Stern // J. Marine Res. — 1975. — Vol. 33, No. 1. — P. 1–13

15. Лук'янов, П.В. Модель квазіточкового вихору / П.В. Лук'янов // Наукові вісті НТТУ «КПІ». — 2011 — № 4(78). — С. 139–142.

References

1. Kraichnan, R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence / R. H. Kraichnan // Phys. Fluids — 1967. — Vol. 10. P. 1417—1423.

2. Kolisnichenko, A.V. K teorii inversnogo kaskada energii v spiralnoi turbulentnosti astrofizicheskogo nemagnitnogo diska /A.V. Kolisnichenko — Preprints of Keldysh IPM, 2014. — V. 70. 36 p. URL http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014—70

3. Lindborg, Erik. A two-dimensional toy model for geophysical turbulence. / Erik Lindborg and Ashwin Mohanan // Phys. Fluids — 2017. — Vol. 29, 111114. https://doi.org/10.1063/1.4985990

4. Oks, D. Inverse cascades and resonant rtiades in rotating and stratified turbulence / D. Oks, P.D. Mininni, R. Mariono, and A. Douquet Rosenberg // Phys. Fluids — 2017. — Vol. 29, 11109. https://doi.org/10.1063/1.5001740

5. Lukianov, P.V. Rozvytok analitychnykh modelei kompactnykh monopolnykh vykhrovykh techii / P.V. Lukianov, V.N. Turick // Research Bulletin of NTUU "Kyiv Polytekhnik Institute". — 2017. — v. 4(114), P. 81—92. https://doi.org/10.20535/1810-0546.2017.4.102048

6. Gromeka, I.S. Sobranie sochineniy / I.S. Gromeka — M.: Izd.-vo AN SSSR, 1952. — 296 s.

7. Vasiliev, O.F.. Osnovy mekhaniki vintovykh i tzyrculyatsionykh potokov / O.F. Vasiliev — M.-L.:Gosenergoizdat, 1958. — 144 p.

8. Alekseenko, S.V. Theory of Concentrated Vortices: An Introduction / S.V. Alekseenko, P.A. Kuibin, V.L. Okulov — Springer — Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. — 493 p.

9. Hopfinger, E.J. Vorticies in rotating fluids / E.J. Hopfinger , G.J.F. van Heijst // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 25. — P. 241—289.

10. Kozlov, V.F. Geofysicheskaya gydrodynamika vikhrevykh pyaten / V.F. Kozlov // Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal. — 1994 — Vol. 1 , p. 26 — 35.

11. Kozlov, V.F. Stationarnye modeli baroclinnykh kompensyrovannykh vikhrey / V.F. Kozlov // Izvestiya AN, Fizika Atmosfery i Okeana. — 1992. — V. 28, No 6, p. 615— 624.

12. Lukianov, P.V. Odnovymirni modeli kompaktnykh kompensovanykh vykhoriv / P.V. Lukianov // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute. — 2010— No 4 (72), p. 145-150 .

13. Lukianov, P.V. Compact helical vortexes. / P.V. Lukianov // Applied hydromechanics . — 2011 — V. 13(85). — № 3. — p. 61—68.

14. Stern, M .E. Minimal properties of planetary eddies / M.E. Stern // J. Marine Res. — 1975. — Vol. 33. — №. 1. — P. 1—13.

15. Lukianov, P.V. Model kvazitochkovogo vykhoru / P.V. Lukianov // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine «Kyiv Politechnic Institute». — 2011. — № 4 (78). — S. 139—142.

Надійшла 12.10.2017 року

УДК 301.17.15;301.07.13

Моделі переважно гвинтових (Бельрамі–Громеки) стаціонарних вихрових потоків

П.В. Лук'янов

Мета. Метою представлених досліджень є розроблення моделей компактних вихрових потокових течій із гвинтовою (Бельтрамі–Громеки) внутрішньою частиною та бездифузійною периферією.

Методи дослідження. Гвинтові течії традиційно вважаються нев'язкими і це не дозволяє описувати реальні вихорові структури скінчених, у радіальному напрямку розмірів. В рамках існуючих понять про гвинтові течії неможливо отримати одночасно компактні розподіли полів азимутальної та поздовжньої компонент швидкості.

Результати дослідження. Ці моделі були отримані на основі теоретичних методів шляхом використання розв'язків одновимірних рівнянь Нав'є–Стокса для периферійної області. У результаті обраний підхід замість нехтування в'язкими доданками у рівняннях руху використовує розв'язки, що перетворюють дифузійний оператор на нуль. Знаходячись під впливом, а отже сформовані дифузією розподіли швидкості є бездифузійними. З фізичної точки зору, течія стає когерентною, відтак існує упродовж тривалого часу. У якості прикладів розглянуто дві моделі вихрових

потоків. Розподіли швидкості як для азимутальної, так і для аксіальної складових швидкості мають скінчений розмір у радіальному напрямку, тобто є компактними. У першому прикладі, де азимутальна швидкість має розподіл компактного аналогу вихора Ренкіна, течія має гвинтову форму лише всередині вихрового ядра. Другий приклад використовує узагальнену модель квазіточкового вихора і течія є гвинтовою скрізь, крім тонкої зовнішньої області. В обох випадках, де течія не є гвинтовою (Бельтрамі–Громеки), використовуються недифузійні розв'язки для осьової складової швидкості.

Висновки. Таким чином, відійшовши від вимоги суто гвинтового характеру течії у всій області, можна отримати моделі переважно гвинтових компактних течій, що було и зроблено.

Ключові слова: течія Бельтрамі–Громеки, компактний компенсований вихор, когерентна течія, аналітичні моделі.

UDC 301.17.15;301.07.13

Models of advanced screw (Beltrami–Gromeka) stationary compact vortex flows

P.V. Lukianov

Aim. The aim of investigations to elaborate compact vortex flux flows with Beltrami–Gromeka like helical core and non-diffusive periphery models.

Research method. Helical flows are traditionally treated as non-viscous ones. That does not afford to describe real vortex structures with finite radial scale. In other words, it is not possible to obtain purely helical compact vortex flow models.

Research results. These models were obtained by theoretical methods with the use of one-dimensional Navier-Stokes equations' solutions for the flows' periphery. This approach does not contradict with the existing definition for helical (Beltrami–Gromeka) flow as steady non-viscous one. As results, instead of viscous term ignoring for flow periphery domain, the solutions transforming the equations into trivial identities were used. Being affected and thus formed by diffusion, the velocity distributions are non-diffusive. Physically, the flow become coherent that is exists for a long time. As the examples, two vortex flux models were considered. The distributions of velocity for both azimuthal and axial velocity components have finite size in radial direction that is compact. In first example, where azimuthal velocity has Rankin vortex compact analog (Stern vortex) distribution, the flow is only helical within vortex core. The second example uses generalized quasi-point vortex model and the flow is helical everywhere except thin external domain. For both examples, non-diffusive solutions for axial velocity component are used in domains where flow is not helical (Beltrami–Gromeka). Thus, if one does not treat whole flow as helical one it is possible to obtain mainly Beltrami–Gromeka steady compact vortex flux models.

Key words: Beltrami–Gromeka flow, compact compensated vortex, coherent flow, analytical models.