

**Обобщение численного моделирования нелинейных колебаний
полуцилиндра на плоскости****Generalisation of numerical modelling of nonlinear oscillations
of a semi-cylinder on a plane**

*Е. С. Лапишин, д-р техн. наук, Е. В. Семенов, д-р техн. наук,
Институт геотехнической механики НАН Украины, Днепр, Украина
Л. Г. Татарко Украинский государственный химико-технологический университет,
Днепр, Украина*

Цель работы. *Определить рациональные параметры динамического гасителя колебаний с телом качения обеспечивающие требуемую собственную частоту нелинейных колебаний и обобщение численных результатов.*

Методы исследования. *Аналитический и численный методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Результаты исследования. *Исследован один из простейших гасителей, выполненный в виде полуцилиндра. Его колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением. Для настройки гасителя на частоту близкую к частоте основного тона колебаний сооружения важно знать собственную частоту гасителя колебаний. Ее, как правило, определяют в предположении о малости амплитуды колебаний, что позволяет линеаризовать уравнение движения. Численные методы, которые применяются для решения нелинейных дифференциальных уравнений движения при больших амплитудах, позволяют найти только частные решения для конкретных условий. Возникает необходимость в обобщении частных решений. В работе выполнено сравнение собственных частот, определенных из аналитического решения линеаризованного уравнения колебаний (колебания с малой амплитудой) и численного решения нелинейного уравнения методом Рунге—Кутты—Фельдберга порядка 4—5. Показано, что отношение собственной частоты линеаризованной системы к собственной частоте нелинейной системы не зависит от массы и радиуса полуцилиндра. Этот вывод сделал возможным обобщить результаты частных численных решений и получить формулу, которая учитывает влияние амплитуды на частоту собственных колебаний и позволяет по собственной частоте, определенной аналитически, для малых начальных углов (менее двадцати градусов) определить собственную частоту для начальных углов до девяноста градусов.*

Выводы. *Получены формулы, определяющие влияние радиуса полуцилиндра на собственную частоту как при малых (менее 20 градусов), так и больших амплитудах колебания. В первом случае колебания линейные, а во втором — нелинейные, зависящие от амплитуды. Влияние амплитуды на относительную частоту описывается полиномом второй степени.*

Ключевые слова: *полуцилиндр, радиус, нелинейные колебания, собственная частота.*

Введение

Оптимизация и интенсификация ряда процессов добычи и переработки нерудных материалов, а также первичных и техногенных месторождений требуют использования гидротранспорта для перемещения материалов содержащих фракции более 5 мм. Однако, существующие методики расчета параметров гидротранспорта разработаны для материалов с твердыми частицами менее 3 мм. Поэтому они не учитывают специфическую способность процесса транспортирования сыпучих материалов крупностью более 5 мм напорными и безнапорными потоками воды — критические режимы течения определяются колебательным процессом взаимодействия твердых частиц, как правило овальной или сферической формы, с турбулентным потоком. В этих условиях возможность отрыва твердых частиц от твердой стенки и начала их перемещения во многом зависит от соотношения собственных частот колебания частиц, лежащих на поверхности трубопровода, и вихревых структур потока, который их обтекает. Если частотные характеристики турбулентных потоков чистой воды и суспензии достаточно изучены, то собственные колебания частицы, лежащей на твердой стенке, практически неизвестны. Похожие задачи исследовались при разработке динамических гасителей колебаний, которые широко используются для снижения нагрузок в различных механизмах и инженерных сооружениях [1].

Для крупногабаритных сооружений: опоры ветроэлектрических установок, высотные здания, антенны и т.д. — характерны низкочастотные собственные колебания (менее 10 Гц, а нередко и меньше 1 Гц [2, 3]). В этом случае применяют гасители колебаний с телами качения [2—6], которые имеют простую конструкцию и высокую надежность. Их обзор приведен в работах [2, 6]. Параметры гасителя должны быть такими, чтобы его собственная частота была близка к частоте основного тона колебаний сооружения [2]. Для этого важно знать собственную частоту гасителя колебаний.

Собственную частоту, как правило, определяют в предположении о малости амплитуды колебаний, что позволяет линеаризовать уравнение движения. При больших амплитудах нелинейное дифференциальное уравнение движения решают численными методами, которые, однако, позволяют найти только частные решения для конкретных условий. Возникает необходимость в обобщении частных решений.

Цель работы — определить рациональные параметры динамического гасителя колебаний с телом качения, обеспечивающие требуемую собственную частоту нелинейных колебаний и обобщение численных результатов.

Постановка задачи

Рассмотрим один из простейших гасителей [6], выполненный в виде полуцилиндра 1, совершающего колебания на плоскости 2 (рисунок 1). При решении ряда прикладных задач, связанных с вибрационным воздействием на сыпучую среду [4, 5], колебания полуцилиндра могут служить в качестве модельного представления движения твердых частиц.

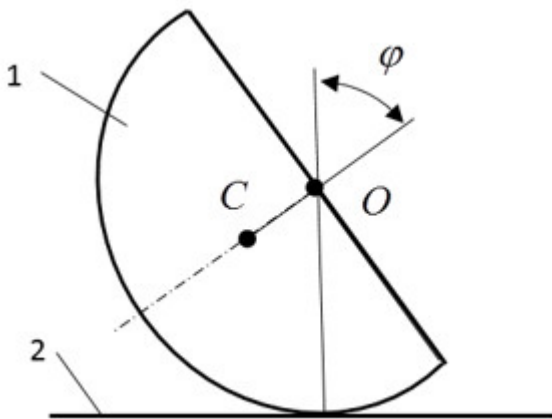


Рисунок 1 — Расчетная схема гасителя колебаний
1 — полуцилиндр; 2 — плоскость

При качании полуцилиндра предположим, что отсутствуют диссипация энергии, проскальзывание и опрокидывание на основание.

Уравнение колебаний полуцилиндра [9]

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \varphi\right) \ddot{\varphi} + \left(\frac{4}{3\pi} \sin \varphi\right) \dot{\varphi}^2 + \frac{4g}{3\pi r} \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

где φ — угол, r — радиус полуцилиндра, g — ускорение свободного падения. Точка над буквами означает дифференцирование по времени. Начальные условия: $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = 0$. Поскольку диссипация не учитывается, то φ_0 — амплитуда собственных колебаний.

Уравнение (1) запишем в таком виде

$$(9\pi - 16 \cos \varphi) \ddot{\varphi} + (8 \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{8g}{r} \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Собственная частота линеаризованной системы

Нелинейное уравнение (2) не имеет аналитического решения. Для его линеаризации предполагают, что угол φ мал и принимают $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$.

В результате получают

$$(9\pi - 16) \ddot{\varphi} + \frac{8g}{r} \varphi = 0. \quad (3)$$

Разделив (3) на множитель перед второй производной получим $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$.

где $\omega_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2g}{r(9\pi - 16)}}$ — собственная круговая частота.

Тогда частота и период собственных колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{(9\pi - 16)r}}, \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{(9\pi - 16)r}{2g}}. \quad (4)$$

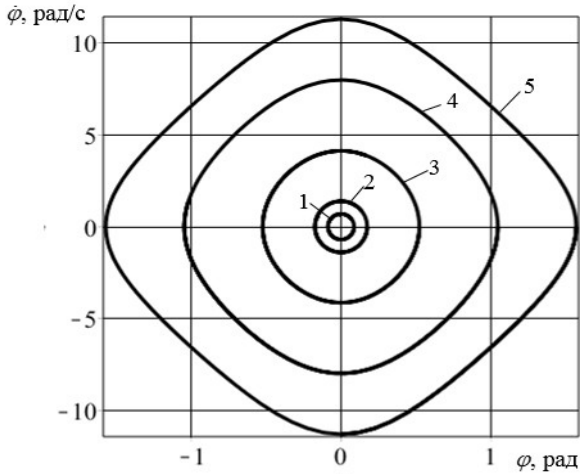


Рисунок 2 — Характерный вид фазового портрета колебаний полуцилиндра: $r = 0,1$ м, где 1, 2, 3, 4 и 5 — $\varphi = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90°

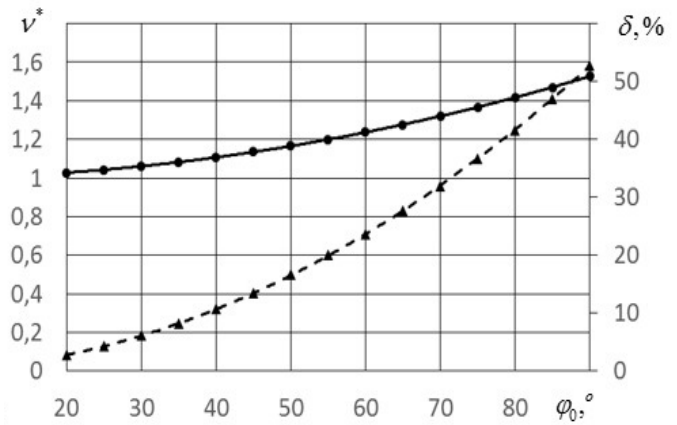


Рисунок 3 — Зависимость относительной собственной частоты (сплошная линия) и погрешность (пунктир) от начального угла

Собственная частота нелинейной системы

Для определения собственной частоты нелинейных колебаний можно для каждого конкретного значения r и φ_0 численно решать уравнение (2), однако, это делает трудоемким обобщение результатов. Задача упрощается, если учесть, что на основании теоремы об изменении кинетической энергии, имеем

$$\dot{\varphi} = 4 \cdot \sqrt{\frac{g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{r(9\pi - 16 \cos \varphi)}}.$$

Полуцилиндр поворачивается на угол $d\varphi$ за время $dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$. (5)

Интегрируя обе части уравнения (5), определим период T колебаний и собственную частоту ν с учетом нелинейности

$$T = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{r(9\pi - 16 \cos \varphi)}{g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} d\varphi, \quad \nu = \frac{1}{T}. \quad (6)$$

При интегрировании учтена симметрия фазового портрета относительно осей координат, что позволило задать пределы 0 и φ_0 , а для получения периода результат увеличить в четыре раза. На рисунке 2 показан характерный вид фазового портрета, который получен численным интегрированием уравнения (2) методом Рунге—Кутты—Фельдберга порядка 4—5 при $r = 0,1$ м, $\varphi_0 = 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90° . Здесь и далее вычисления выполнены в математическом пакете Maple.

Обобщение частных численных решений

Найдем отношение собственных частот

$$\nu^* = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{2(9\pi - 16 \cos \varphi)}{(9\pi - 16)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} d\varphi. \quad (7)$$

Эту величину назовем относительной собственной частотой. Акцентируем внимание на том, что ν^* не зависит от массы и радиуса полуцилиндра.

Относительная погрешность, обусловленная линеаризацией уравнения (2),

$$\delta = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \cdot 100\% = (1 - \nu^*) 100\%.$$

На рисунку 3 круглими маркерами представлені результати численного інтегрування методом Ньютона-Котеса вираження (7), а трикутними — погрешності. При амплітудах більше 60 градусів погрешність перевищує 20 %. Лініями зображені результати апроксимації функціями ($20^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$)

$$\nu^* = 6 \cdot 10^{-5} \varphi_0^2 + 10^{-4} \varphi_0 + 0,9996; \quad (8)$$

$$\delta = 6,4 \cdot 10^{-3} \varphi_0^2 + 1,38 \cdot 10^{-2} \varphi_0 - 4,4 \cdot 10^{-2}. \quad (9)$$

Апроксимація виконана в інтервалі $20^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ методом найменших квадратів і забезпечує високу точність (коефіцієнт детермінації 0,999).

Формули (8) і (9) дозволяють визначити власну частоту коливань поциліндра і погрешність при лінеаризації рівняння коливань. Оскільки, як показано вище ν не залежить від маси і радіуса поциліндра, урахувавши (7) і (8), одержимо вираження для визначення власної частоти нелінійних коливань

$$\nu = \nu_0 \left(6 \cdot 10^{-5} \varphi_0^2 + 10^{-4} \varphi_0 + 0,9996 \right)^{-1}. \quad (10)$$

Формула (10) узагальнює результати чисельних експериментів, направлених на дослідження впливу початкового кута φ_0 на власну частоту коливань поциліндра. Вона дозволяє аналітично визначити частоту ν для малих початкових улов ($\varphi_0 < 20^\circ$) визначити частоту ν для початкових улов до 90° .

Висновки

Отримано формули (4), (6), визначаючі вплив радіуса r поциліндра на власні частоти ν_0 і ν як при малих, так і великих амплітудах φ_0 коливань. В першому випадку коливання лінійні, а во другому — нелінійні, залежачі від амплітуди.

Показано, відношення частот $\nu^* = \nu_0 / \nu$ не залежить від радіуса поциліндра. Це дозволило узагальнити результати чисельних експериментів і встановити — вплив амплітуди на відносну частоту описується поліномом другої ступені (8).

Література

1. Челомей, В. Н. Вибрации в технике. Том 6. Защита от вибрации и ударов, 1981 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html> — Загл. с экрана.
2. Legeza, V. P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations / V. P. Legeza. // Strength of Materials. — 2004. — №2 (36). — P. 186—194.
3. Takei, H. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper / H. Takei, Y. Shimazaki // Journal of Applied Mechanics. — 2010. — №13. — P. 587—594.
4. Legeza, V. P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder / V. P. Legeza. // Mechanics of Solids. — 2012. — Vol. 47, №4. — P. 380—384.
5. Obata, M. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper / M. Obata, Y. Shimazaki. // Journal of Vibration and Control. — 2008. — №14. — P. 867—884.
6. Bransch, M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations / M. Bransch // Journal of Sound and Vibration. — 2016. — №368. — P. 22—35.
7. Надутый, В. П. Вероятностные процессы вибрационной классификации минерального сырья / В. П. Надутый, Е. С. Лапшин. — К.: «Наукова думка», 2005 — 180 с.
8. Лапшин, Е. С. Вероятностная оценка скорости вибротранспортирования слоя сыпучего материала / Е. С. Лапшин // Вибрации в технике и технологиях: Всеукр. науч.-техн. журн. — Винница, 2004. — № 3(35). — С. 64—67.
9. ESM 3124 Intermediate Dynamics, HW7 Solutions [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www2.esm.vt.edu/~sdross/pub/3124_2012/lectures/hw7_esm3124_2012_sol.pdf — Загл. с экрана.

References

1. Chelomej V. N. — Vibratsii v tekhnike. Tom 6. Zashchita ot vibratsii i udarov, 1981 [Elektronnyi resurs]. — Rezhim dostupa: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html> — Zagl. s ekrana.
2. Legeza, V. P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations / V. P. Legeza. // Strength of Materials. — 2004. — №2 (36). — P. 186—194.
3. Takei, H. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper / H. Takei, Y. Shimazaki // Journal of Applied Mechanics. — 2010. — №13. — P. 587—594.
4. Legeza V. P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder / V. P. Legeza. // Mechanics of Solids. — 2012. — Vol. 47, №4. — P. 380—384.
5. Obata M. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper / M. Obata, Y. Shimazaki. // Journal of Vibration and Control. — 2008. — №14. — P. 867—884.
6. Bransch, M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations / M. Bransch // Journal of Sound and Vibration. — 2016. — №368. — P. 22—35.
7. Nadutyi, V. P. Veroyatnostnye protsessy vibracionnoi klassifikatsii mineralnogo syria / V. P. Nadutyj, E. S. Lapshin. — К.: «Naukova dumka», 2005 — 180 s.
8. Lapshin, E. S. Veroyatnostnaja ocenka skorosti vibrotransportirovaniya sloja sy-puchego materiala / E. S. Lapshin // Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh: Vseukr. nauch.-tekhn. zhurn. — Vinnica, 2004. — № 3(35). — S. 64—67.
9. ESM 3124 Intermediate Dynamics, HW7 Solutions [Elektronnyj resurs]. — Rezhim dostupa: http://www2.esm.vt.edu/~sdross/pub/3124_2012/lectures/hw7_esm3124_2012_sol.pdf — Zagl. s jekrana.

Надійшла 28.02.2018

УДК 534.1:621

UDC 534.1:621

Узагальнення чисельного моделювання нелінійних коливань напівциліндра на площині

Generalisation of numerical modelling of nonlinear oscillations of a semi-cylinder on a plane

**Е. С. Лапшин, Е. В. Семененко,
Л. Г. Татарко**

**E. S. Lapshin, Ye. V. Semenenko,
L. G. Tatarko**

Мета. Визначити раціональні параметри динамічного гасителя коливань з тілом кочення, які забезпечують необхідну власну частоту нелінійних коливань і узагальнення чисельних результатів.

Методи дослідження. Аналітичний і чисельний методи вирішення звичайних диференціальних рівнянь.

Результати дослідження. Досліджено один з найпростіших гасителів, який виконаний у вигляді напівциліндра. Його коливання описуються нелінійним диференціальним рівнянням. Для налаштування гасителя на частоту близьку до частоти основного тону коливань споруди важливо знати власну частоту гасителя коливань. Її, як правило, визначають у припущенні про малість амплітуди коливань, що дозволяє лінеаризувати рівняння руху. Чисельні методи, які застосовуються для вирішення нелінійних диференціальних рівнянь руху при великих амплітудах, дозволяють знайти лише окремі рішення для конкретних умов. Виникає необхідність узагальненні частинних рішень. В роботі виконано порівняння власних частот, які визначені

Aim. It is to determine the rational parameters of a dynamic vibration damper with a rolling body that provide the required natural frequency of nonlinear oscillations and generalization of numerical results.

Methods of research. Method that were used are analytical and numerical methods for solving ordinary differential equations.

Results of research. One of the simplest absorbers, made in the form of a half-cylinder, was investigated. In order to tune the damper to a frequency close to the main intrinsic frequency of oscillations of the facility, it is important to know the intrinsic frequency of oscillation damper. This frequency is usually determined under assumption of small-amplitude oscillations, which allows one to linearise the associated equation of motion. Numerical methods that are used for solving nonlinear differential equations for large amplitudes only yield solutions for particular choices of initial conditions. This necessitates the generalisation of these particular solutions. We show that the ratio of the intrinsic frequency of the linearised system to the intrinsic frequency of the nonlinear system does not depend on the mass or radius of the semicylinder. This conclusion allowed

на підставі аналітичного розв'язку лінеаризованого рівняння коливань (коливання з малою амплітудою), і чисельного розв'язку нелінійного рівняння методом Рунге–Кутта–Фельдберга порядку 4-5. Показано, що відношення власної частоти лінеаризованої системи до власної частоти нелінійної системи не залежить від маси і радіусу напівциліндра. Цей висновок зробив можливим узагальнення результатів частинних чисельних рішень і отримання формули, яка враховує вплив амплітуди на частоту власних коливань та дозволяє по власній частоті, що визначена аналітично, для малих початкових кутів (менше двадцяти градусів) визначити власну частоту для початкових кутів до 90° .

Висновки: Отримано формули, що визначають вплив радіуса напівциліндра на власну частоту коливань як при малих (менше 20°), так і великих амплітудах коливання. У першому випадку коливання лінійні, а в другому - нелінійні, які залежать від амплітуди. Вплив амплітуди на відносну частоту описується поліномом другого ступеня.

Ключові слова: напівциліндр, радіус, нелінійні коливання, власна частота.

us to generalise the results of particular numerical solutions and derive an expression for the intrinsic frequency of non-linear oscillations with initial angles up to 90° .

Conclusion of the work is that this expression takes into account the effects of the amplitude of oscillations, and is expressed through an analytically derived intrinsic frequency of oscillations for small initial angles (less than 20 degrees).

Keywords: semicylinder, radius, nonlinear oscillations, intrinsic frequency/