УДК 519.85

Медведєв М. Г.,
д.техн.н., професор кафедри вищої математики
Мулява О. М.,
к. фіз.-мат. н., доцент кафедри вищої математики,
Національний університет харчових технологій, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглянуті питання застосування систем диференційних рівнянь для моделювання та прогнозування динаміки розвитку показників соціально-економічних систем. Враховується, що деякі показники таких систем зростають із швидкістю пропорційною їх наявній кількості, але водночас впливають на інші показники які зменшують кількість перших з швидкістю пропорційною кількості першого і другого показників. Швидкість утворення другого пропорційна наявній кількості першого. Коефіцієнти пропорційності залежать від виду показників та умов, в яких вони перебувають і визначаються статистичними методами або експертним шляхом.

Ключові слова: *соціально-економічні системи, диференційні рівняння, математичні моделі. динаміка розвитку, прогнозування, обчислювальні методи.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Медведев Н. Г., Мулява О. М.

В статье рассмотрены вопросы применения систем дифференциальных уравнений для моделирования и прогнозирования динамики развития показателей социально-экономических систем. Учитывается, что некоторые показатели таких систем растут со скоростью пропорциональной их количеству, но в то же время влияют на другие показатели, которые уменьшают количество первых со скоростью пропорциональной количеству первого и второго показателей. Скорость образования второго пропорциональна фактическому количеству первого. Коэффициенты пропорциональности зависят от вида показателей и условий, в которых они находятся и определяются статистическими методами или экспертным путем.

Ключевые слова: *социально-экономические системы, дифференциальные уравнения, математические модели. динамика развития, прогнозирование, вычислительные методы.*

MATHEMATICAL MODELING OF SOCIOECONOMIC SYSTEMS USING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Medvedev M., Mulyava O.

Mathematical models in the form of equations, which, in addition to the independent variables and dependent on their desired functions include derivative (differential) of a certain procedure desired functions, are being used during the mathematical description of different processes, phenomena and dependencies that contain elements of "movement", "growth". This

equation is called the differential. Using them - an effective tool for solving applied problems. The questions about the use of differential equations to model the dynamics of the socio-economic systems are being considered in this article. Taken into account that some figures such systems are growing at a speed proportional to their existing amount, but also affect other indicators that reduce the number of first rate proportional to the amount of the first and second parameters, and the rate of the second proportional to the current number of the first. The proportionality factor depends on the type of performance and the conditions in which they are defined and statistical methods or by expert.

Keywords: *socio-economic systems, differential equations, mathematical models. dynamics of development, forecasting, numerical methods.*

Постановка проблеми. При математичному описі різноманітних процесів, явищ і залежностей, що містять елементи «руху», «росту», користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні (диференціали) певного порядку від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференційними. Використання їх - ефективний засіб розв'язування прикладних задач. Багато реальних процесів за допомогою диференційних рівнянь описуються достатньо просто і повно.

Усяка математична модель повинна задовольняти двом основним вимогам:

1. Адекватність процесу. Модель повинна відбивати найбільш характерні зв'язки між величинами, що беруть участь у процесі, враховувати властивості середовища, у якому відбувається процес і інформацію про початковий стан процесу. Тільки тоді по поводженню моделі можемо судити про поводження самого процесу.

2. Можливість розв'язання моделі. Модель повинна бути не занадто складною, щоб з неї можна було одержати потрібну нам інформацію. Зокрема, для моделювання реальних процесів можуть бути використані диференційні рівняння, що описують систему. Розв'язуючи їх, з урахуванням додаткових умов, одержують аналітичний вираз для функції, яка описує стан системи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблеми моделювання складних соціально-економічних систем розглянуті в роботах зарубіжних та вітчизняних авторів. Дж.Х. Мура, Ларрі Д., Уедерфорда В.А., Колемаєва, В.І. Малихіна, С.О Гуткевич, Лебедєва В.В., Шишкіна Є.В., Чхартішвілі А.Г., О.Н. Салманова, К. Карлберга та ін..

Нагромаджений досвід застосування математичного моделювання до рішення соціально-економічних задач показує, що поряд з розробкою ефективних обчислювальних методів і засобів рішення цих задач все більшу роль відіграють якісні методи дослідження їх властивостей, особливо дослідження результатів розв'язання.

Мета статті. Проілюструвати застосування систем диференціальних рівнянь для моделювання та прогнозування динаміки розвитку показників соціально-економічних систем.

Основні результати дослідження. Розглянуто застосування систем диференційних рівнянь для моделювання динаміки розвитку соціально-економічних систем. Враховується, що деякі показники таких систем зростають із швидкістю пропорційною їх наявній кількості (з коефіцієнтом a), але водночас впливають на інші показники які зменшують кількість перших з швидкістю пропорційною кількості першого і другого показників (з коефіцієнтом b), а швидкість утворення другого пропорційна наявній кількості першого (з коефіцієнтом c). Коефіцієнти пропорційності a, b, c залежать від виду показників та умов, в яких вони перебувають і визначаються статистичними методами або експертним шляхом.

Позначимо через N значення першого показника у момент часу t, а через T - кількість другого.. $\frac{dN}{dt}$ і $\frac{dT}{dt}$ - відповідні швидкості зростання першого та другого показників. Маємо систему диференційних рівнянь:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNT, \frac{dT}{dt} = cN \tag{1}$$

Поділимо почленно рівняння системи (1) одне на одне. Отримаємо диференційне рівняння:

$$\frac{dN}{dT} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}T$$

або

$$dN = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}T\right)dT.$$

Звідси після інтегрування

$$N = \frac{a}{c}T - \frac{b}{2c}T^2 + C,$$

де C–довільна константа , яку визначимо з початкових умов: $T = 0$, коли $N = 0$. Маємо $C = 0$. Отже, залежність між першим та другим показниками така:

$$N = \frac{a}{c}T - \frac{b}{2c}T^2 \tag{2}$$

Найбільше значення N:

$$N_{\max} = M = \frac{a^2}{2bc}. \tag{3}$$

Визначимо закон, за яким змінюється значення першого показника, встановивши залежність величини N від часу t, припускаючи, що час вимірюється з того початкового моменту $t = 0$, коли $N = M$. Із співвідношення (2) маємо

$$T = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{a^2 - 2bcN}.$$

Підставивши цей вираз у перше з рівнянь (1), дістанемо з урахуванням (3) таке диференційне рівняння:

$$\frac{dN}{dt} = \mp aN\sqrt{1-\frac{N}{M}} \tag{4}$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи це рівняння, маємо:

$$\int \frac{dN}{N\sqrt{1-\frac{N}{M}}} = \mp at$$

Використаємо підстановку $x^2 = 1-\frac{N}{M}\ \left(|x|<1\right)$, звідки $dN = -2Mxdx$, $N = M\left(1-x^2\right)$. Отже,

$$\int \frac{dN}{N\sqrt{1-\frac{N}{M}}} = -2\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\frac{1-x}{1+x} + C_1.$$

Загальний інтеграл рівняння (4) такий:

$$\ln\frac{1-x}{1+x} + \ln C_2 = \mp at,$$

де $C_1 = \ln C_2$. Після потенціювання маємо:

$$C_2\frac{1-x}{1+x} = e^{\mp at}.$$

Зауважимо, що при $t=0$, $N=M$ і, отже, $x=0$, а тому $C_2 = 1$, звідки:

$$\frac{1-x}{1+x} = e^{\mp at} \text{ і } x = \frac{e^{\pm\frac{at}{2}} - e^{\mp\frac{at}{2}}}{e^{\pm\frac{at}{2}} + e^{\mp\frac{at}{2}}}.$$

З того, що $x = \pm\sqrt{1-\frac{N}{M}}$, піднісши до квадрату праві частини останніх двох співвідношень і розв'язуючи їх відносно N, отримаємо:

$$N = \frac{4M}{\left(e^{\frac{at}{2}} + e^{-\frac{at}{2}}\right)^2}.$$

З останньої формули видно, що при $t \to +\infty$, наявна кількість N першого показника спадає до нуля.

Висновки: Математичні моделі побудовані на основі систем диференційних рівнянь допомагають зрозуміти процес, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики системи і на їх основі передбачити подальший її розвиток.

1. Модель розвитку галузей економіки України : [монографія] / за ред. С.О. Гуткевич. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 472 с.

2. Колемаев В.А. Математическая экономика : [уч. пос.] / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 399 с.

3. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel: [пособ.] / К. Карлберг; [пер с англ.]. – М.: ИД «Вильямс», 2008. – 464 с.

4. Лебедев В. В. Математическое моделирование социально-економическихх процессов: [учеб.] / В.В. Лебедев. – М.: Дело, 1992. – 324 с.

5. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики : [уч.-практ. пос.] / В.И. Малыхин. – М.: УРАО, 1998. – 160 с.

6. Экономическое моделирование в Microsoft Excel : [уч. пос.] / [Дж. Мур, Л.Уэдерфорд и др.]; [пер. с англ.]. – М: ИД «Вильямс», 2004. – 1024 с.

7. Салманов О. Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel : [уч. пос.] / О. Н. Салманов. – СПб: БХВ, 2003. – 464 с.

8. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении / Е.В.Шикин, А.Г. Чхартишвили. – М.: Дело, 2001. – 440 с.