УДК 330.46:51-75

С. О. Іллічевський,
аспірант кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

МОДЕЛЬ ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

Дана стаття присвячена дослідженню і розробці актуарних моделей розрахунку ймовірності банкрутства страхової компанії за умови її інвестиційної діяльності. Новизна полягає у поєднанні страхової та інвестиційної діяльності компанії. Прикладом для побудови моделі послужили західноєвропейські страхові ринки.

This article is devoted to the research and development of the new types of models of running the insurance companies' risks. These methods combine the actuarial models and neural networks. This complex approach will allow the uniting of the advantages of both methods and enriching the economic-mathematical instruments of the Ukrainian insurance market.

Ключові слова: інвестиційна діяльність, страхова компанія, ймовірність банкрутства.

ВСТУП

Страхування — це стратегічний сегмент економіки, оскільки воно дозволяє суттєво знизити навантаження на витратну частину бюджетів різних рівнів; сприяє соціально-економічній стабільності в суспільстві, тому що є важливим елементом соціального захисту населення; дозволяє оптимізувати діяльність суб'єктів економіки за рахунок централізованих фондів фінансових ресурсів; забезпечує компенсацію збитків, завданих юридичним і фізичним особам в результаті настання несприятливих подій; є джерелом внутрішніх довгострокових інвестицій в економіку країни.

На сьогоднішній день не можливо собі уявити ринкову економіку без ризику. З ним пов'язана практично будь-яка економічна діяльність. Тому існує велика потреба обрахувати, спрогнозувати і по можливості мінімізувати ризик. Страхування є однією з галузей економіки, котра постійно піддається ризикам банкрутства. Саме це є однією з найголовніших проблем — обчислення ймовірності банкрутства страхових компаній.

Термін "страхування", на думку західних філологів, має латинське походження. В основі його — слова "securus" і "sine cura", які означають "безтурботний". Отже, страхування відбиває ідею застереження, захисту та безпеки. У багатьох слов'янських мовах, у тому числі й в українській, виникнення терміна "страхування" пов'язують зі словом "страх".

У фаховій літературі етимології слова "страхування" також приділено значну увагу. Проте єдиної думки з цього питання не існує.

Аналіз опублікованих визначень поняття "страхування" показує, що кожне з них уточнює або доповнює попередні, залишаючи без змін їх основу.

Страхування — це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів громадян та юридичних осіб у разі настання певних подій (страхових випадків), визначених договором страхування або чинним законодавством за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати громадянами та юридичними особами страхових платежів (страхових внесків, страхових премій) та доходів від розміщення коштів цих фондів.

Одні з перших досліджень у цій сфері проводилися ще на початку XX ст. З того часу математичний апарат обчислення банкрутства весь час еволюціонував і за сотню років накопичилось чимало різноманітних методів і підходів.

З ростом масштабів суспільно-економічних потреб і процесів глобалізації значущість страхування невпинно зростає в економіках всіх країн світу. Україна в цьому плані має досить невеликий досвід через вади перехідної економіки.

У цій роботі вперше поєднуються актуарні дослідження з моделюванням за допомогою штучних нейронних мереж.

Наукова проблема роботи полягає у пошуку та формуванні економіко-математичного апарату для аналізу діяльності страхової компаніїї за умови її інвестиційної активності.

Однією з головних проблем на сьогоднішній для актуарного аналізу українського страхового ринку є відсутність великої статистичної бази, яка необхідна при будь-якому економетричному моделюванні. Цю проблему можна спробувати вирішити за допомогою моделювання штучними нейронними мережами. Прогнози побудовані таким чином можна використовувати як вхідну інформацію для актуарних моделей.

Вагомий вклад у дослідження теоретико-методологічних основ фінансово-економічної страхової діяльності зробили такі вчені, як В.Д. Базидевич [2], К.С. Базилевич [2], Р.В. Пікус [2; 10], А.О. Старостіна [2], О.Ф Філонюк [2], О.І. Черняк [2; 13—15], А.Б. Камінський [8], О.І. Ляшенко [9], В.В. Шпирко [2], М.М. Александрова [1], Н.Н. Внукова [3], О.О. Гаманкова [4], О.А. Гвозденко [5], О.Д. Заруба [7], В. С.С. Осадець [12] та ін.

Об'єкт дослідження — ринок інвестиційно-страхових послуг України в період економічного розвитку, становлення ринкових відносин, міжнародної інтеграції України.

Предмет дослідження — дослідження діяльності страхової компанії на українському страховому ринку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У даній статті розглядається страхова компанія у випадку, коли страхові премії описуються обмеженою невід'ємною функцією C_t, а капітал компанії інвестується у ризиковий портфель, ціна якого описується процесом геометричного Броунівського руху з середнім значенням a, і відхиленням $\sigma > 0$.

Відомо, що актуарний і економіко-математичний аналіз діяльності страхової компанії, пов'язаної з постійними ризиками, є дуже важливим. Проблема її банкрутства, вперше описана в працях Крамера і Ліндеберга на основі стохастичних процесів, і зараз має великий науковий інтерес.

Інвестиційна діяльність страхової компанії є небезпечною: може трапитись, коли прибутковість інвестиційних проектів низька, і компанія не зможе покрити збитки продажем цих проектів через цінові коливання.

РЕЗУЛЬТАТИ

Очевидно, що інвестиції з стохастичною процентною ставкою можуть бути надто небезпечними для компанії. Це може підтвердити математично.

Якщо прийняти $\beta := \frac{2a}{\sigma^2} - 1 > 0$, то можна знайти асимптотичні верхню і нижню межі для ймовірності банкрутства $\Psi(u)$, де u — початковий капітал, що прямує до нескінченності, тобто $C_* u^{-\beta} \le \Psi(u) \le C^* u^{-\beta}$ для достатньо великого u.

Крім того, якщо $C_t = C^* e^{\gamma t}$ з $\gamma \le 0$, можна знайти асимптотичну ймовірність банкрутства, а саме: $\Psi(u) \approx u^{-\beta}$. Якщо $\beta \le 0$, то $\Psi(u) = 1$ для будь-якого $u \ge 0$.

У цій статті розглядається проблема банкрутства страхової компанії, котра здійснює інвестиційний проект, що визначається процесом Броунівського руху: $dV_t = V\,(adt + \sigma dwt)$, де $(wt, t \ge 0)$ — стандартний Броунівський рух, $a > 0, \sigma > 0$.

Виявляється, що у випадку невеликої дисперсії, тобто $0 < \sigma^2 < 2a$, ймовірність банкрутства має не експоненціальний розподіл, а є функцією від початкового капіталу з параметром $\beta := \frac{2a}{\sigma^2} - 1$. До речі, це твердження вірне без накладання умови на додатність параметру загрузки системи.

Водночас, для великої дисперсії $\sigma^2 > 2a$, ймовірність банкрутства дорівнює 1 для будь-якого значення початкового капіталу.

Класична актуарна модель діяльності страхової компанії передбачає опис надходження страхових виплат постійним процесом. На практиці це свідчить про те, що компанія отримує надходження постійно з однаковим рівнем. Насправді це не відповідає дійсності. Ця умова сильно обмежує застосування класичних актуарних моделей на практиці.

Мета цієї статті полягає в тому, щоб розглянути проблему банкрутства страхової компанії за умови, що її премії описуються деякою невід'ємною випадковою функцією.

Для цієї проблеми за умови невеликої дисперсії, ми отримуємо точні верхні і нижні межі ймовірності банкрутства. А у випадку експоненціального процесу надходження премій, тобто $C_t = \exp(\gamma t)$, $\gamma > 0$, ми отримуємо асимптотичну ймовірність банкрутства.

Також ми вказуємо, що при нульовому рівні надходження, тобто $\gamma = -\infty$, асимпотитичні результати співпадають з випадком, коли $-\infty < \gamma < 0$.

Крім того, в цій статті показується, що у граничному випадку $\sigma^2 = 2a$, компанія банкрутує з ймовірністю 1, для будь-якої функції C_t.

Заданий інвестиційний проект, що здійснює страхова компанія, визначається процесом Броунівського руху: $dV_t = V\,(adt + \sigma dwt)$,

де $(wt, t \ge 0)$ — стандартний Броунівський рух, $a > 0, \sigma > 0$.

Побудуємо некласичну модель стохастичного стану капіталу страхової компанії, що здійснює інвестиційну діяльність:

$$X_t = u + a\int X_s ds + \sigma\int_0^t X_s dw_s + \int_0^t c_s ds - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

де a, σ — константи (характеристики Броунівського руху);

N_t — Пуасонівський процес в момент часу t з параметром $\alpha > 0$;

$c_t = c(t, X)$ — обмежена додатна випадкова функція, що описує процес надходження страхових премій.

Нехай $\zeta_u = \inf\{t : X_t^y < 0\}$ — момент банкрутства;

$\Psi(u) = P\{\zeta_u < \infty\}$ — ймовірність банкрутства.

При $a = 0, \sigma = 0, c_t = 0$ ми отримуємо кластичну модель стохастичного стану капіталу страхової компанії без інвестиційної діяльності і з постійним потоком надходжень премій

Верхня межа ймовірності банкрутства страхової компанії:

$P\{T_u < \infty\} \le P\{R > u\}$,

$R = Q + M$,

Q — страхові виплаті;

M — витрати від інвестиційної діяльності.

Нижня межа для ймовірності банкрутства страхової компанії:

$P\{T_u^* < \infty\} \le P\{T_u < \infty\}$,

$T_u^* = \inf\{n \ge 1 : S_n^* < 0\}$,

$S_n^* = \varepsilon_n u + \varepsilon_n \sum \varepsilon_k^{-1} \zeta_k^*$,

де ε_i — надходження від інвестиційної діяльності в і-тий період часу;

ζ_i^* — параметр процесу інвестицій.

Асимптотична оцінка ймовірності банкрутства.

Якщо процес надходження премій описується наступним чином:

$C_t = C^{\gamma}$, то при $\gamma = -\infty, C_t = 0$,

тоді $P\{T_u < \infty\} = P\{R < u\}$.

Нехай Z — випадкова величина, розподілена як Z_1;

θ — випадкова величина, розподілена як θ_1;

$\gamma = EZ$ — математичне сподівання виплат;

$m = E\theta$ — математичне сподівання появи виплат;

Тоді $E(c\theta - Z) = cm - \gamma$ — математичне сподівання доходу компанії після кожної виплати.

$\rho = \dfrac{cm - \gamma}{\gamma}$ — відносний рівень надійності.

Далі введемо поняття функції адаптації:

$I(x) = \dfrac{cm - \gamma}{\gamma} \exp((Z - c\theta))$.

Тоді $\psi_a(x) = I(x)\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(x) + \underline{\psi}(x)\right)$ — найкраще наближення за умови існування $\underline{\psi}(x)$ і $\overline{\psi}(x)$, де $I(x)$ — функція адаптація.

$\Delta(x) = I(x)\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(x) - \underline{\psi}(x)\right)$ — абсолютне відхилення;

$\delta(x) = I(x)\dfrac{\Delta(x)}{\psi_a(x)} = I(x)\dfrac{\overline{\psi}(x) - \underline{\psi}(x)}{\overline{\psi}(x) + \underline{\psi}(x)}$ — відносне відхилення.

Маємо для $\chi \le b = \dfrac{a}{\rho}$

$$\exp(p\chi) = 1 + p\chi + p^2\chi^2 \frac{\exp(p\chi) - 1 - p\chi}{p^2\chi^2} \le 1 + p\chi + p^2\chi^2 \frac{\exp(\frac{pa}{\rho}) - 1 - \frac{pa}{\rho}}{\left(\frac{pa}{\rho}\right)^2}.$$

тому що функція $\dfrac{e^y - 1 - y}{y^2}$ збільшується зі збільшенням y.

Так як $\sqrt{1 + y} \le 1 + \left(\dfrac{y}{2}\right)$, $(y \ge 0)$,

$$R(a) = \frac{1}{2\varphi_2 M(a)}\left(-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\rho\varphi_2 M(a)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varphi_2 M(a)}\left(-\varphi_1 + \varphi_1\sqrt{1 + \frac{4}{\varphi_1^2 \rho \varphi_2 Ь(\phi)}}\right) \le \frac{\rho}{\varphi_1}$$

та

$$\exp(R(a)\chi) \le 1 + R(a)\chi + R(a)^2\chi^2 \frac{\exp\left(\frac{a}{\varphi_1}\right) - 1 - \left(\frac{a}{\varphi_1}\right)}{\left(\frac{a}{\varphi_1}\right)^2} = 1 + R(a)\chi + R(a)^2\chi^2 M(a)$$

По визначенню $R(a)$:

$E\exp(R(a)\chi) \le +\varphi_1 R(a) + \varphi_2 M(a) R(a)^{2} = 1 + \rho$

та $(1-q)E\exp(R(a)\chi) \le (1-q)(1+\rho) = (1-q)\dfrac{1}{1-q} = 1$.

Можемо побудувати верхню оцінку: $\psi(x) \le e^{-R(a)x}$.

Тепер побудуємо нижню оцінку:

$EN(x) \le 1 + \dfrac{x}{E[\chi]} + \dfrac{D[\chi]}{E[\chi]^2} = \dfrac{x}{\varphi_1} + \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1^2}$, і за допомогою нерівності $\psi(x) = E(1-q)^{N(x)} \ge (1-q)^{EN(x)}$.

Отже $\psi(x) \ge \exp\left(\log(1-q)\left(\dfrac{x}{\varphi_1} + \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1^2}\right)\right)$.

Визначимо наступну функцію:

$f(x) = \dfrac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4M(a)\rho t}}{2M(a)\rho t}$.

Оскільки $f(\varphi_2) = R(a)$ і

$f'(t) = \dfrac{\varphi_1\sqrt{\varphi_1^2 + 4M(a)\rho t} - \varphi_1^2 - 2M(a)\rho t}{2M(a)\rho t^2\sqrt{\varphi_1^2 + 4M(a)\rho t}} \le 0$,

для $t \ge 0$, $R(a)$ спадає і верхня оцінка $\psi(x) \le e^{-R(a)x}$ зростає разом з φ_2.

З цього виходить верхня оцінка: $\psi(x) \le \overline{\psi(x)} = e^{-R^u x}$, де $R^u = \dfrac{1}{2\varphi_2 M(a)}\left(-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\rho\varphi_2 M(a)}\right)$.

Оскільки $\log(1-q) < 0$, тоді нижня оцінка спадає по φ_2 і $\psi(x) \ge \underline{\psi}(x) = \exp\left(\log(1-q)\left(\dfrac{x}{\varphi_1} + \dfrac{\overline{\varphi}_2}{\varphi_1^2}\right)\right) \equiv K\exp(-R^l x)$,

де $R^l = \dfrac{\log(1-q)}{\varphi_1}$, $K = \exp\left(\log(1-q)\dfrac{\overline{\varphi}^2}{\varphi_1^2}\right)$.

Класична модель ризику описує стохастичну еволюцію капіталу страхової компанії і формально задається рівністю [3, с. 181]:

$R_t(x) = x + ct - S$,

де t — час;

$x \ge 0$ — початковий капітал страхової компанії;

c — інтенсивність надходження премій;

$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини (страхові виплати);

N_t — кількість виплат на момент t (пуасонівський процес, не залежний від S_t).

Час банкрутства обчислюється за формулою:

$\tau(x) = \inf\{t > 0 : R\ (x) \le 0\}$,

а ймовірність банкрутства: $\psi(x) = P[\tau(x) < \infty]$.

Нехай $B(t)$ — функція розподілу величини виплат, $M[X_i] = \mu$, $D[X_i] = \sigma^2$, $B(0) = 0$, $B(b) = 1$; ρ — рівень надійності, тобто $c = \lambda\mu(1 + \rho)$. Далі обчислюються нижня і верхня межі ймовірності $\psi(x)$, які позначаються $\underline{\psi(x)}$ і $\overline{\psi(x)}$ відповідно.

Позначимо $N_t = \upsilon$, яке має геометричний розподіл:

$P(\upsilon = k) = q(1-q)^k, k \ge 0$, $q = \rho/(1+\rho)$;

Нехай $T_i = \sum_{j=1}^{i} \chi_j$, $N(x) = \inf\{n : T_n > x\}$,

тоді $\psi(x) = P(\sum_{i=1}^{\upsilon} \chi_\nu > x) = E(1-q)^{N(x)}$.

Позначимо $a = b\rho$, $M(a) = \dfrac{\exp\left(\frac{a}{\varphi_1}\right) - 1 - \frac{a}{\varphi_1}}{\left(\frac{a}{\varphi_1}\right)^2}$.

Перші два моменти випадкової величини χ_i можуть бути виражені як:

$$\varphi_1 = E[\chi_i] = \frac{E[X_i^2]}{2\mu} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu},$$

$$\varphi_2 = E[\chi_i^2] = \frac{E[X_i^3]}{3\mu} = \frac{\mu_3}{3\mu},$$

де $\mu_3 = E[X_i^3]$ третій момент функції виплат, який в загальному випадку невідомий. можливо використовувати тільки оцінки $\varphi_2 (\underline{\varphi_2} \le \varphi_2 \le \overline{\varphi_2})$. Але ми отримуємо двосторонню оцінку ймовірності банкрутства, яка залежить лише від $\overline{\varphi_2}$. Отже, найбільш цікаво було б знайти найточнішу оцінку третього моменту $\overline{\mu_3}$.

У випадку відомої функції виплат, її математичного сподівання і дисперсії можемо отримати:

$\overline{\mu}_3 = b(\mu^2 + \sigma^2) - \frac{d^2}{b-\mu}$, де $d = b\mu - \mu^2 - \sigma^2 \ge 0$.

ВИСНОВКИ

Складно застосовувати страхові моделі з урахуванням інвестиційної діяльності за рахунок браку належної вхідної інформації на Українському страховому ринку.

Інші актуарні моделі досить добре моделюють ймовірність банкрутства страхової компанії, але за умови розгляду процесу надходжень страхових премій константою.

Для більш реального моделювання необхідно розглядати процес надходження премій також деякою стохастичною функцією.

Література:

1. Анісімов В.В., Черняк О.І. Математична статистика: Навч. посібник для студентів вузів.— К.: МП "Олеся", 1995. —104 с.
2. Базилевич К.С. Страхування: підручник // Базилевич В.Д., Базилевич К.С., Пікус Р.В., Філонюк О.Ф., Черняк О.І., Старостіна А.О., Шпирко В.В. // В.Д. Базилевич (ред.). — К.: Знання, 2008. — С. 1019.
3. Внукова Н.М., Временко Л.В., Успаленко В.І. Страхування: теорія та практика. — Харків: Бурун-книга, 2004. — 376 с.
4. Гаманкова О.О., Артюх Т.М.: Страхові послуги: навч.-метод.пос. — К.: КНЕУ,2000
5. Гвозденко А.А. Финансово-экономические методы страхования. — М.: Финансы и статистика, 2000.
6. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. — Київ: Вища школа, 2001.
7. Заруба О.Д. Страхова справа: підручн. — К.: Товариство "Знання", КОО, 1998. — 321 с.
8. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ринків: [монографія] /А.Б. Камінський. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. — 304 с.
9. Ляшенко О.І. Математичне моделювання динаміки відкритої економіки // О.І. Ляшенко. — Рівне: Волинські обереги, 2005. — 360 с.
10. Пікус Р.В. Управління фінансовими ризиками: навчальний посібник // Р.В. Пікус, Н.В. Приказюк. — К.: Знання, 2010. — 598 с.
11. Страховое дело: учебник // Рейтман Л.И., Коломин Е.В., Плешков А.П. и др.; Под ред. Рейтмана Л.И. — М.: Банк. и биржевой науч.-кон-сульт. центр, 1992. — 524 с.
12. Страхування: Підручник // Керівник авт. колективу і наук, ред. С.С. Осадець. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 599 с.
13. Черняк О.І. Економетрика // О.І. Черняк, О.В. Комашко, А.В. Ставицький, О.В. Баженова. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2010.
14. Pavlenko T. Credit risk modeling using bayesian networks / T. Pavlenko, O. Chernyak // International Journal of Intelligent Systems. — 2010. — Volume 25, Issue 4. — Wiley Periodicals, Inc., A Wiley Company. — P. 326—344 (USA).
15. Chernyak O.I. Asymptotic behaviour of a complex renewable standby system with fast repair // O.I. Chernyak, J. Sztrik // Problems of Control and Information Theory. — 1991. — v.20 (1). — P. 37—44. Budapest, Hungary.

Стаття надійшла до редакції 26.01.2012 р.