УДК 330.356

В. С. Саженюк,
канд. фіз.-мат. наук., доцент кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО ІНВЕСТУВАННЯ НА ФІНАНСОВИХ РИНКАХ

V. Sazheniuk,
PhD, Associate Professor, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Economics, Economic Cybernetics Department

OPTIMAL INVESTMENT MATHEMATICAL MODELS IMPLEMENTATION METHOD IN FINANCIAL MARKETS

Розглянуто проблему побудови чисельного алгоритму для задачі оптимального керування інвестиціями та фінансовими ресурсами інвестиційних фондів та банків згідно економіко-математичних моделей, які являють собою варіаційні нерівності. Розроблено метод чисельної реалізації таких моделей, якій базується на методі скінчено-різницевої апроксимації. Надано обгрунтування методу у вигляді оцінок швидкості збіжності.

The article depicts the problem of constructing a numerical algorithm for optimal financial resources control, investment funds and banks control by economic and mathematical models that represent the variational inequality. The article shows a method for the numerical implementation of these models, which is based on the method of finite-difference approximation. The article explains method as estimates of the convergence rate.

Ключеві слова: економіко-математична модель, фінансові ресурси, інвестування, оптимальне керування, варіаційна нерівність, різницева схема.

Key words: economic mathematical model, financial resources, investment, optimal control, variational inequalities, difference scheme.

ВСТУП

Під час своєї діяльності в умовах ринкової економіки комерційні банки інвестиційні фонди, страхові та інвестиційні компанії стикаються з задачами формування розміру та розподілу власного капіталу з метою оптимізації величини часток капіталу, який використовується для придбання активів та резервування. Резервний капітал, зокрема є необхідним для покриття виникаючих ризиків. У зв'язку з цим, перед менеджерами фінансових інститутів постає задача оцінки фінансових ризиків та оптимального керування капіталом. Теоретичною та практичною основою для побудови інформаційно-аналітичних систем автоматичного контролю та керування фінансовими ресурсами є економіко- математичні моделі. Оскільки на практиці діяльность фінансової компанії відбувається в умовах наявності невизначенності, то відповідні математичні моделі у загальному випадку є задачами стохастичного керування. Зазвичай математична задача оптимального стохастичного керування являє собою задачу знаходження екстремуму деякого функціоналу при додаткових обмеженнях на розв'язок. У багатьох випадках задача на екстремум може бути замінена на еквівалентну задачу знаходження розв'язку деякої варіаційної нерівності. Відповідна варіаційна нерівність еквівалентна крайовій задачі з обмеженнями для оператора з частиними похідними параболічного типу і не може бути розв'язана у явному вигляді. Для чисельної реалізації такої моделі достатньо ефективним є метод сіток у комбінації з методом штрафу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо наступну задачу керування фінансовими ресурсами. Потрібно оптимальним чином здійснювати вкладення капіталу в акції чи інструменти інвестування. Позначимо

$x_i(t)$ – сума коштів, яка вкладається в *i*-тий інструмент в момент часу t;

$y(t)$ – наявний капітал в момент t,

$y(t)-\sum_i x_i(t)$ — резервний капітал.

Згідно математичної моделі [1, с. 55—58], інвестиційний капітал у момент часу t визначається рівнянням

$dy = r(x,y,t)dt + \lambda(x,y,t)d\omega$, $\omega(t)$ – випадковий процес.

Керування відбувається шляхом придбання або продажу пакетів акцій в моменти часу $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r,\ldots$. Розглянемо задачу визначення оптимального часу зупинки t^*, коли інвестиційний портфель вважається сформованим . У цьому випадку вартість портфеля у момент t^* дорівнює $\varphi(x,y,t^*)$. Мінімум $u(x,y,t)$ функціонала вартості задовольняє наступній варіаційній нерівності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u - f(x,y,t) \le 0,\quad u(x,y,t) \le \varphi(x,y,t) \quad (1),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u - f(x,y,t)\right),\ (u(x,y,t) - \varphi(x,y,t)) = 0,\ (x,t)\in Q_t$$

$$u(x,y,t) = 0,\ (x,y,t)\in S_t,$$

$$u(x,y,0) = u_0(x),\ x\in\Omega,$$

$$A(t)u = -\frac{1}{2}\lambda(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u$$

Розв'язок шукається у паралелепіпеді $Q_T = \{(x,t): x\in\Omega, t\in(0,T)\}$. Через $S_T = \{(x,t): x\in\Gamma,\quad t\in(0,T)\}$ позначено бокову поверхню Q_T, а Ω — прямокутник з границею Г.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Зробимо заміну невідомої функції, поклавши $u \leftarrow (\varphi - u)$. За новою функцією збережемо старе позначення. Тоді задача (1) перепишеться наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u-f(x,y,t)\le 0,\ u(x,y,t)\ge 0 \qquad (2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u-f(x,y,t)\right),\ u(x,y,t)=0,\ (x,t)\in Q_t$$

$$u(x,y,t)=0,\ (x,y,t)\in S_t,$$

$$u(x,y,0)=u_0(x),\ x\in\Omega.$$

Для побудови чисельного методу розв'язування задач (1) застосуємо методи штрафу та сіток. Задача зі штрафом, асоційована з задачею (2), має вигляд:

знайти функцію u_ε таку, що

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+A(t)u_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-=f(x,t),\ (x,t)\in Q_t,$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\ (x,t)\in S_t,\ (3)$$

$$u_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega.$$

$$u_\varepsilon^-=\begin{cases}-u_\varepsilon, & u_\varepsilon<0\\ 0, & u_\varepsilon>0\end{cases}.$$

Нехай виконуються умови

$$\alpha-\frac{|r(x,y,t)|}{\delta}>0,\ \frac{1}{2}\lambda(x,y,t)-\sigma|r(x,y,t)|>0,\ \delta>0 \quad (4).$$

Можна довести, що розв'язок задачі (3) збігається при $\varepsilon\to 0$ до розв'язку задачі (1), при чому має місце оцінка [2, с. 20]

$$\|u-u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}\le M_1\sqrt{\varepsilon}\cdot(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (5).$$

Введемо нову функцію $g_\varepsilon(u_\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-$ і перепишемо задачу зі штрафом (3) у наступному вигляді

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\frac{1}{2}\lambda(x,y,t)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}-r(x,y,t)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}+\alpha u_\varepsilon+g_\varepsilon(u_\varepsilon)=f(x,t),$$

$$(x,t)\in Q_T \qquad (6),$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\ x\in S_T,\ u_\varepsilon(x,0)=u_0,\ x\in\Omega.$$

Для функції $g_\varepsilon(\zeta)$ легко перевіряються умови:

$$\int_{Q_T}[g_\varepsilon(v_1)-g_\varepsilon(v_2)](v_1-v_2)dxdt\ge\frac{1}{\varepsilon}\|v_1^- - v_2^-\|^2_{L_2(Q_T)},$$

$$|g_\varepsilon(v_1)-g_\varepsilon(v_2)|\le\frac{1}{\varepsilon}|v_1-v_2|,\quad \forall v_1,v_2\in W_2^{1,0}(Q_T).$$

У прямокутнику $\overline{\Omega}$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}=\omega\cup\gamma$, та апроксимуємо задачу (6) неявною різницевою схемою

$$y_{\bar t}-\frac{1}{2}cy_{x\bar x}-c_1 y_{\bar x}+\alpha y+P_0T_1T_2 g_\varepsilon(\tilde y)=P_0T_1T_2(f),\ (x,t)\in\omega_T,$$

$$\mathrm{y(x,t)}=0,\ (\mathrm{x,t})\in\gamma_T,\quad y(x,0)=T_1T_2u_0,\quad x\in\omega. \qquad (7)$$

$$T_\alpha v(x,t)=\int_{-1}^{1}(1-|\theta|)v(x_1+(2-\alpha)\theta h_1,x_2+(\alpha-1)\theta h_2)d\theta,\quad \alpha=1,2$$

$$P_0v(x,t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}v(x,\xi)d\xi,\quad t=\tau,\ldots,N\tau.$$

$$P_i v(x,t)=\int_{-1}^{0}v(x_1+(2-i)\theta h_1,x_2+(i-1)\theta h_2)d\theta,\quad \mathrm{i}=1,2$$

$$c_1=P_1T_2P_0r(\cdot),\ c=P_1T_2P_0\lambda(\cdot),$$

$\tilde y(x,t)$ — поповнення сіткової функції $y(x,t)$.

В силу монотонності функції $g_\varepsilon(v)$ справедлива наступна нерівність:

$$\sum_{\omega_\tau}\tau(P_0T_1T_2g_\varepsilon(\tilde y),y)=\sum_{\omega_\tau}\tau\cdot P_0\int_\Omega g_\varepsilon(\tilde y)\tilde y dx=\int_{Q_T}g_\varepsilon(\tilde y)\tilde y dxdt\ge 0.$$

Використовуючи тотожність $y_{\bar t}y=\frac{1}{2}(y^2)_{\bar t}+\frac{\tau}{2}y_{\bar t}^2$, методом енергетичних нерівностей, можна отримати апріорну оцінку [2, с. 22]

$$|y|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\le M_2(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}),$$

з якої випливає стійкість різницевої схеми (7) за початковими даними та правою частиною. Дослідимо збіжність послідовності розв'язків різницевої схеми при $h\to 0$.

Твердження. Розв'язок різницевої схеми (7) ($\tau=h^2,\ \varepsilon=h^2$) збігається при $h\to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (2), при цьому має місце оцінка

$$\|y-\overline{u}\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\le M_3h(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \qquad (8).$$

Для того щоб довести твердження та отримати оцінку (8) потрібно дослідити на збіжність та отримати оцінку швидкості збіжності послідовності розв'язків різницевої схеми до розв'язку задачі зі штрафом (6). У цьому випадку справедлива наступна оцінка [2, с. 23; 3, с. 58]

$$|y-\overline{u}_\varepsilon|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\le M_4\left(h+\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{h^2}{\sqrt{\tau}}+\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\tau}\right)(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (9),$$

де $\overline{u}_\varepsilon(x,t)=\begin{cases}P_0u_\varepsilon, & (x,t)\in\omega_T,\\ 0, & (x,t)\in\gamma_T,\\ T_1T_2u_0, & x\in\omega, t=0.\end{cases}$

Після цього, використовуючи оцінки (5) та (9) можна отримати оцінку (8) .

ВИСНОВКИ

Суттєвими проблемами , що виникають при побудові методів реалізації економіко-математичних моделей виду (1) є наявність обмежень та приналежність функцій до класів не гладких функцій ($f\in L_2(Q_T)$, $u\in W_2^2(Q_T)$). У запропонованому алгоритмі задача з обмеженням (1) заміняється задачею зі штрафом, що дає можливість позбутись обмежень. Отримана таким чином крайова задача для оператора параболічного типу є нелінійною та апроксимується різницевою схемою за методом сіток. Оскільки права частина $f\in L_2(Q_T)$, в різницевій схемі використовуються оператори усереднення . Такий підхід дає змогу отримати стійку різницеву схему та надати узгоджені оцінки швидкості збіжності, узгодивши відповідні параметри ε,τ,h , що дає можливість практичного використання запропонованого алгоритму.

Література:

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. — М.: Наука, 1987. — 600 с.

2. Саженюк В.С. Алгоритм чисельного розв'язування одного класу варіаційних параболічних нерівностей. — Математические машины и системы. — 2007.— № 2. — С. 19—25.

3. Саженюк В.С. Метод чисельного розв'язування одного класу економіко — математичних моделей. — Інвестиції: практика та досвіт. — 2013. — № 9 — С. 57—58.

References:

1. A. Bensoussan, J.L. Lions (1982), "Controle impulsionnel et inequations quasivariationnelles " , Bordas, Paris, Une France.

2. Sazheniuk ,V. S. (2007), "The algorithm of numeral solution of one class of variational parabolic inequalities", Mathematical machines and systems ,vol. 2, pp. 19—25.

3. Sazheniuk ,V. S.(2013), "Metod of numerical solution for one class economic-mathematical models", Investments: practice and dosvit , vol. 9, pp. 57—58.

Стаття надійшла до редакції 05.09.2013 р.