УДК 330.356

В. С. Саженюк,
к. физ.-мат. наук., доцент кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

РЕАЛІЗАЦІЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО ІНВЕСТУВАННЯ МЕТОДОМ ФІКТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ

V. Sazheniuk,
PhD, Associate Professor, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Economics,
Economic Cybernetics Department

ECONOMICS AND MATHEMATICAL MODELS IMPLEMENTATION OF OPTIMAL INVESTMENT BY FICTITIOUS DOMAIN METHOD

Пропонується застосовувати для побудови чисельних алгоритмів розв'язування класу економіко-математичних моделей оптимального керування інвестиціями метод фіктивних областей. Побудована та досліджена апроксимуюча модель задача. Розроблено метод чисельної реалізації моделей та надано математичне обгрунтування методу .

The article depicts the application of fictitious domain method for construction of numerical algorithms for solving a class of economic-mathematical models of optimal control investments. The article shows constructed and investigated approximating model problem. The author developed the method of numerical models and provided mathematical justification of the method.

Ключові слова: Економіко-математична модель оптимального інвестування, фінансові ресурси, варіаційна нерівність, метод фіктивних областей.
Key words: economic-mathematical model of optimal investment, financial resources, variational inequalities, fictitious domains method, difference scheme.

ВСТУП

У статті розглядається клас нелінійних економіко-математичних моделей широкого кола практично важливих економічних задач [1, 55—58] (задачі оптимального керування виробництвом, задачі керування фінансами в умовах невизначеності, ієрархічне керування запасами, тощо). Такі моделі зводяться до параболічних варіаційних нерівностей з обмеженням у середині області довільної форми. Параболічна нерівність являє собою нелінійну крайову задачу , яка містить частинні похідні з додатковими обмеженнями . У загальному випадку розв'язок такої задачі не може бути знайдено у явному вигляді. Це потребує розробки та застосування чисельних методів розв'язування. Раніше, в роботах [2, с. 57—58; 3, с.16—17] досліджувались, з цієї точки зору, економіко-математичні моделі зокрема оптимального інвестування на фінансових ринках, у випадку коли розв'язок моделі шукається в канонічній області. Однак зазвичай на практиці, доводиться шукати відповідні розв'язки в областях з складною геометрією. Складна геометрія області значно ускладнює процес побудови чисельних алгоритмів розв'язування моделей. У статті пропонується метод апроксимації економіко-математичних моделей у випадку пошуку розв'язків в областях довільної форми, який використовує метод фіктивних областей. Досліджується збіжність відповідного розв'язку апроксимуючої задачі до розв'язку моделі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо клас нелінійних економіко-математичних моделей, що зводиться до наступної варіаційної нерівності

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \ + q(x,t)u + F(x,t,u) \geq 0,\ u(x,t) \geq 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \ + q(x,t)u + F(x,t,u)\right) u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_t \quad (1)$$

$$u\ (x,t) = 0,\ (x,t) \in S_t$$

$$u\ (x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega.$$

Використані наступні позначення: $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T)\}$ — циліндр, $\Omega \in R^2$ — область з границею Г, $S_T = \{(x,t) : x \in \Gamma, \quad t \in (0,T)\}$ — бокова поверхня Q_T, $Q^0{}_T = \{(x,t) : x \in \Omega_0, \quad t \in (0,T)\}$ — паралелепіпед, Ω_0 — прямокутник з границею Γ_0, $S^0{}_T = \{(x,t) : x \in \Gamma_0, \quad t \in (0,T)\}$ — бокова поверхня $Q^0{}_T$, $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega$; $Q_T^1 = \{(t,x), x \in \Omega_1, t \in (0,T)\}$; $Q_T^0 = Q_T^1 + Q_T$,

$$A(t)v = -\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_i a_i(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Припустимо, що $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\,\xi\,|^2,\ \forall \xi \in R^2,$

$$q(x,t) \geq q_0 > 0, \quad q(x,t) \in L_\infty(Q_T),$$

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \quad a_i(x,t), a_{ij}(x,t) \in L_\infty(Q_T),$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial t} \in L^\infty(Q_T),$$

функція $F(x,t,u)$ — вимірна на $Q_T \times R$ та задовольняє умовам

$$\forall v_1, v_2 \in W_2^{1,0}(Q_T), \left|F(x,t,v_1) - F(x,t,v_2)\right| \le M_1 \left|v_1 - v_2\right|,$$

$$(F(x,t,v_1) - F(x,t,v_2))(v_1 - v_2) \ge 0,$$

$$\left|F(x,t,u)\right| \le M_2 f(x,t).$$

де $f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Щоб позбутися обмежень на шукану функцію та перейти до канонічної області, до задачі (1) застосуємо метод фіктивних областей. Апроксимуюча задача має вигляд:

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} + A(t)u_\delta + q_\delta(x,t)u_\delta + g_\delta(x,t,u_\delta) + \bar{F}(x,t,u_\delta) = 0, \ (x,t) \in Q_T^0 \quad (2)$$

$u_\delta(x,t) = 0$, $(x,t) \in S_Q^0$,
$u_\delta(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega_0$,
де позначено

$$g_\delta(x,t,u_\delta) = \begin{cases} -\delta^{-\frac{1}{2}} u_\delta^-, (x,t) \in Q_T \\ 0, \quad (x,t) \in Q_T^1 \end{cases}, \quad q_\delta(x,t) = \begin{cases} q(x,t), \ (x,t) \in Q_T \\ \delta^{-1}, \quad (x,t) \in Q_T^1 \end{cases},$$

$$\bar{F}(x,t,u_\delta) = \begin{cases} F(x,t,u_\delta), (x,t) \in Q_T \\ 0, \quad (x,t) \in Q_T^1 \end{cases}, \quad u_\delta^- = \begin{cases} -u_\delta, u_\delta < 0 \\ 0, \ u_\delta \ge 0 \end{cases}, \ \delta > 0.$$

Справедлива наступне твердження.

Твердження 1. Розв'язок задачі (2) збігається при $\delta \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1). Справедлива оцінка.

$$\left\|u - u_\delta\right\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le M_3 \sqrt[4]{\delta} \cdot (\left\|f\right\|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (3).$$

Наступний етап в процесі побудови алгоритму розв'язування моделі (1) є етап дискретизації та отримання розрахункових формул для програмування і написання комп'ютерного коду. Для цього можна використовувати методи сіток або скінчених елементів. На наш погляд, оскільки відповідна крайова задача (2) поставлена у канонічній області, то більш природно для дискретизації і побудови різницевої схему, використовувати метод сіток.

У подальшому будемо розглядати випадок, коли $a_{ij} = 1$, $i = j$, $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, $i, j = 1,2$. Розглянемо задачу (2), отриману за допомогою комбінації методів штрафу та фіктивних областей. Задачу (2), з урахуванням припущень, перепишемо у такому вигляді

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} - \Delta u_\delta + q_\delta(x,t)u_\delta + g_\delta(x,t,u_\delta) = \bar{F}(x,t,u_\delta), \ (x,t) \in Q_T^0 \quad (4)$$

$u_\delta(x,t) = 0$, $x \in S_T^0$, $u_\delta(x,0) = u_0$, $x \in \Omega^0$.

Можна перевірити, що функція $g_\delta(x,t,v)$ задовольняє співвідношенням

$$(g_\delta(x,t,v_1) - g_\delta(x,t,v_2))(v_1 - v_2) \le \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}(v_1 - v_2)^2,$$

$$(g_\delta(x,t,v_1) - g_\delta(x,t,v_2))(v_1 - v_2) \ge 0, \quad \forall v_1, v_2 \in W_2^{1,0}(Q_T^0).$$

Проведемо дискретизацію області. Для цього у прямокутнику $\overline{\Omega}^0$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}^0 = \omega^0 \cup \gamma^0$, де ω^0 — внутрішні, а γ^0 — граничні вузли.

Позначимо:

$$\omega^0{}_\tau = \{t = t_j = j\tau, j = 1, N; \tau = \tfrac{T}{N}\}, \ \omega^0{}_T = \omega^0 \times \omega^0{}_\tau, \ \gamma^0{}_T = \gamma^0 \times \omega^0{}_\tau,$$

$$(y_1, y_2) = \sum_{\omega_\tau} \tau (y_1, y_2), \ \left\|y\right\|^2 = (y,y), \ \| y \|_{L_2(\omega_T)} = \left(\sum_{\omega_\tau} \tau \| y \|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\| y |]_{L_2(\omega_T)} = \left(\sum_{\omega_\tau} \tau \| y |]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \| y] |_{L_2(\omega_\tau)} = \left(\sum_{\omega_\tau} \tau \| y] |^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\| y \|_{W_2^{1,0}(\omega_T)}^2 = \| y \|_{L_2(\omega_T)} + | y |_{W_2^{1,0}(\omega_T)}^2.$$

Апроксимуємо задачу (4) такою неявною різницевою схемою:

$$y_{\bar{t}} - \sum_{i=1}^{2} y_{\bar{x}_i x_i} + \bar{q}_\delta \tilde{y} + P_0 T_1 T_2 g_\delta(\cdot, \tilde{y}) = P_0 T_1 T_2 (\bar{F}), \ (x,t) \in \omega_T^0,$$
$$\mathrm{y(x,t)} = 0, \ (\mathrm{x,t}) \in \gamma_T^0, \quad y(x,0) = T_1 T_2 u_0, \quad x \in \omega^0, \quad (5)$$

де

$$T_\alpha v(\cdot) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|) v(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha - 1)th_2) dt, \quad \alpha = 1,2;$$

$P_0 u(x,t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} u(x,\xi)d\xi$, $\quad t = \tau, ..., N\tau$; — оператори усереднення.

$\bar{q}_\delta \tilde{y} = P_0 T_1 T_2 (q_\delta(\cdot)\tilde{y})$,

$\tilde{y}(x,t)$ — полілінійне по x та кусково-стале по t поповнення сіткової функції $y(x,t)$. У різницевій схемі використовуються оператори усереднення оскільки коефіцієнти та права частина задачі (4) мають кусково-неперервний характер. Це обумовлено самою математичною моделлю та процесом побудови апроксимуючих задач, а саме використанню при побудові методу фіктивних областей. Можна довести, що різницева схема є стійкою за початковими даними та правою частиною. Збіжність розв'язку різницевої схеми випливає з наступного твердження та відповідної оцінки.

Твердження 2. Розв'язок різницевої схеми (5) при $\tau = h^2$, $\delta = h^{\frac{4}{3}}$ та $h \to 0$ збігається до розв'язку варіаційної нерівності (1) ($a_{ij} = 1$, $i = j$, $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, $b_i = 0$, $i, j = 1,2$). Виконується оцінка

$$\left\|y - \bar{u}\right\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)} \le M_4 h^{\frac{1}{3}} (\left\|f\right\|_{L_2(Q_T)} + \| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (6)$$

ВИСНОВКИ

Оцінка (6) збігається з оцінками, які мають місце для моделей, що являють собою відповідний клас крайових задач. Викладений метод для класу економіко-математичних моделей, які інтерпретуються як варіаційні нерівності з розв'язками з класів узагальнених функцій, раніше не застосовувався і є доволі ефективним зокрема у випадку складної геометрії області де шукається розв'язок. Хоча, як видно з оцінки (6), швидкість збіжності не висока (порядку $O(\sqrt[3]{h})$), при практичному використані запропонованого методу, вдається отримати чисельні результати з достатньою для практики точністю .

Література:

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. — М.: Наука, 1987. — 600 с.

2. Саженюк В.С. Метод чисельного розв'язування одного класу економіко — математичних моделей. — Інвестиції: практика та досвіт. — 2013 №9 — С. 57—58.

3. Саженюк В.С. Метод реалізації математичних моделей оптимального інвестування на фінансових ринках. — Інвестиції: практика та досвіт. — 2013. — №19 — с. 16—17.

References:

1. Bensoussan, A., Lions, J.L. (1982), "Controle impulsionnel et inequations quasivariationnelles", Bordas, Paris, Une France.

2. Sazheniuk, V. S.(2013), "Metod of numerical solution for one class economic-mathematical models", Investments: practice and dosvit, vol. 9, pp. 57—58

3. Sazheniuk, V. S.(2013), "Optimal investment mathematical models implementation method in financial markets", Investments: practice and dosvit , vol. 19, pp. 16—17.

Стаття надійшла до редакції 30.10.2013 р.