УДК 330.4

В. С. Саженюк,
к. физ.-мат. н., доцент кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

V. S. Sazheniuk,
PhD, Associate Professor, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Economics, Economic Cybernetics Department

METHOD OF NUMERICAL SOLUTION FOR ONE CLASS ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS

Розглядається клас економіко-математичних моделей, який складають задачі визначення часу зупинки динамічних систем з обмеженням. Пропонується метод чисельного розв'язування цього класу моделей, який базується на застосуванні методів штрафу та скінчено-різницевої апроксимації. Надається обгрунтування методу.

The article depicts a class of economic-mathematical models that constitute the task timing stops of dynamic systems with constraints. The article shows a numerical method for solving this class of models, based on the application of penalties and finite difference approximation. The article provides the substantiation of the method.

Ключові слова: економіко-математична модель, різницева схема, чисельний метод.
Key words: economic-mathematical model, difference scheme, the numerical method.

ВСТУП

Важливий клас економіко-математичних моделей складають задачі стохастичного оптимального керування динамічними системами з обмеженням та визначення часу зупинки. Під час розв'язування таких задач основним є не визначення еволюції стану, а знаходження моменту зупинки цієї еволюції, який називається часом зупинки. Цей момент є невідома змінна, яка підлягає визначенню в процесі розв'язування задачі оптимального керування.

У статті розглядаються задачі з оптимальним часом зупинки, які є математичними моделями широкого кола практично-важливих економічних задач. До таких задач зокрема відносяться задачі оптимального керування виробництвом (оптимальне використання різних процесів виробництва, виробництво та керування сировинними ресурсами, задача вибору між виробництвом та закупівлею товарів, керування якістю виробництва товарів залежно від зносу засобів виробництва). Ієрархічне керування запасами для мереж супермаркетів. Задачі керування фінансами в умовах невизначеності (оцінка оптимальної необхідності у капіталі суб'єктів підприємницької діяльності, задача оптимального вибору між вкладенням та утриманням грошових коштів, оптимальне керування інвестиційним портфелем фінансових інститутів, побудова оптимальної стратегії розподілу дивідендів суб'єктів підприємницької діяльності при наявності ризику банкрутства).

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є побудова та обгрунтування алгоритму чисельного розв'язування задач з оптимальним часом зупинки, які є економіко-математичними моделями. Такі задачі зводяться до варіаційних нерівностей. Запропонованим методом, до задачі з обмеженням, якою є варіаційна нерівність, застосовується метод штрафу. Отриману таким чином нелінійну крайову задачу, пропонується апроксимувати за методом сіток різницевою схемою.

У статті надається теоретичне обгрунтування методу у вигляді теорем про збіжність та отримуються оцінки швидкості збіжності. Для практичного використання побудованого алгоритму, встановлюються оптимальні співвідношення між параметрами методів штрафу та сіток.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Клас економіко-математичних моделей, що досліджується, являє собою клас варіаційних нерівностей з обмеженням у середині деякої області Q_T. Нехай $Q_T=\{(x,t): x\in\Omega,\ t\in(0,T)\}$ — паралелепіпед, а $S_T=\{(x,t): x\in\Gamma,\quad t\in(0,T)\}$ — бокова поверхня Q_T, де Ω — прямокутник з границею Г. Введемо у розгляд оператор

$$A(t)v=-\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_i}+q(x,t)v\ .$$

Тоді мінімум $u(x,t)$ функціоналу витрат є розв'язком варіаційної нерівності

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u-f(x,t)\geq 0,\ u(x,t)\geq 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u-f(x,t)\right),\ \ u(x,t)=0,\ (x,t)\in Q_t \qquad (1)$$

$$u\ (x,t)=0,\ (x,t)\in S_t,\ u\ (x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega.$$

де $f(x,\ t)\in L_2(Q_T)$, $\sum_{i,j}a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\alpha\,|\,\xi\,|^2$, $\forall\xi\in R^2$

$$q(x_1,x_2,t)\geq q_0>0,\quad q(x_1,x_2,t)\in L_\infty(Q_T),$$

$$a_{ij}(x_1,x_2,t)=a_{ji}(x_1,x_2,t),\quad a_{ij}(x_1,x_2,.t)\in W^1_\infty(Q_T), \qquad (2).$$

Для побудови чисельного методу розв'язування задач (1) застосуємо методи штрафу та сіток. Задача зі штрафом, яка апроксимує задачу (1), має вигляд:

знайти функцію $u_\varepsilon\in \overset{o}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ таку, що $u_\varepsilon(0,x)=u_0(x)$,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+A(t)u_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-=f(x,t),\ (x,t)\in Q_t,$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\ (x,t)\in S_t, \qquad (3).$$

$$u_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega.$$

Якщо виконуються умови (2), то послідовність розв'язків задачі (3) збігається при $\varepsilon\to 0$ до розв'язку задачі (1), причому має місце оцінка

$$\|u-u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}\leq M_1\sqrt{\varepsilon}\cdot(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \qquad (4).$$

Позначимо $g_\varepsilon(u_\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^-$. Задачу зі штрафом (3) перепишемо у наступному вигляді

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}+q(x,t)u_\varepsilon+g_\varepsilon(u_\varepsilon)=f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T \qquad (5),$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\ x\in S_T,\ u_\varepsilon(x,0)=u_0,\ x\in\Omega.$$

У прямокутнику $\overline{\Omega}$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}=\omega\cup\gamma$, де ω — множина внутрішніх, а γ — множина граничних вузлів відповідно. Позначимо $\omega_\tau=\{t=t_j=j\tau,\ j=1,N;\tau=\frac{T}{N}\}$, $\omega_T=\omega\times\omega_\tau$, $\gamma_T=\gamma\times\omega_\tau$

$$|\,y\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}=\left\{\max_{t\in\omega_\tau}\|\,y(x,t)\,\|^2+|\,y\,|^2_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\,y\,\|_*=\left\{|\,y\,|^2_{V_2^{1,0}(\omega_T)}+\tau\,\|\,y_{\bar t}\,\|^2_{L_2(\omega_T)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Апроксимуємо задачу (5) неявною різницевою схемою

$$y_{\bar t}-\sum_{i,j=1}^{2}(c_{ij}y_{\bar x_i})_{x_j}+c_0y+P_0T_1T_2g_\varepsilon(\tilde y)=P_0T_1T_2(f),\ \ (x,t)\in\omega_T,$$

$$\mathrm{y(x,t)}=0,\ \ (\mathrm{x,t})\in\gamma_T,\quad y(x,0)=T_1T_2u_0,\quad x\in\omega. \qquad (6).$$

$$T_\alpha v(x,t)=\int_{-1}^{1}(1-|\theta|)v(x_1+(2-\alpha)\theta h_1,x_2+(\alpha-1)\theta h_2)d\theta,\quad \alpha=1,2,$$

$$P_0v(x,t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}v(x,\xi)d\xi,\quad t=\tau,...,N\tau.,$$

$$P_iv\ \ (x,t)=\int_{-1}^{0}v(x_1+(2-i)\theta h_1,x_2+(i-1)\theta h_2)d\theta,\quad \mathrm{i}=1,2$$

$$c_{ij}=P_0P_1P_2(a_{ij}),\ \ c_0=P_0T_1T_2(q),$$

де $\tilde y(x,t)$ — полі лінійне по x та кусково-стале по t поповнення сіткової функції $y(x,t)$.

Надамо обгрунтування запропонованого методу. Нескладно переконатися, що різницева схема є стійкою за початковими даними. Збіжність послідовності розв'язків різницевої схеми при $h\to 0$ до розв'язку задачі зі штрафом (5) випливає з наступного твердження [1].

Розв'язок різницевої схеми (6) збігається при $h\to 0$ до розв'язку задачі зі штрафом (4) , при цьому має місце оцінка

$$|\,y-\bar u_\varepsilon\,|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}\leq M_3\left(h+\frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{h^2}{\sqrt{\tau}}+\frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\tau}\right)(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \qquad (7),$$

де $$\bar u_\varepsilon(x,t)=\begin{cases} P_0u_\varepsilon, & (x,t)\in\omega_T,\\ 0\quad, & (x,t)\in\gamma_T,\\ T_1T_2u_0, & x\in\omega,t=0.\end{cases}$$

Використовуючи оцінки (4) та (7), можна отримати оцінку швидкості збіжності послідовності розв'язків різницевої схеми (6) до розв'язку математичної моделі (1), коли крок дискретизації $h\to 0$.

$$\|y-\bar u\|_{W_2^{1,0}(\omega_T)}\leq M_4h(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \qquad (8).$$

ВИСНОВКИ

Різницева схема (6) є стійкою при довільних h,τ і ε. При практичному використанні різницевої схеми (6) , на етапі програмування, потрібно вибирати параметри методів штрафу та сіток оптимальним чином $\tau=h^2,\varepsilon=h^2$. При такому виборі параметрів неявна схема (6) є оптимальною по точності. У цьому випадку оцінка швидкості збіжності (8) є узгодженою за вхідними даними.

Література:

1. Саженюк В.С. Алгоритм чисельного розв'язування одного класу варіаційних параболічних нерівностей // Математические машины и системы. — 2007. — № 2. — С. 19—25.

Стаття надійшла до редакції 25.03.2013 р.