

УДК 621.039.51

*В. В. Рязанов**Институт ядерных исследований НАН Украины, г. Киев***ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТА РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ**

При помощи строгих соотношений теории перколяции на решетках Бете описывается поведение коэффициента размножения нейтронов на ранних стадиях развития самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер, соответствующего порогу перколяции. Рассмотрено поведение вероятности перколяции, вероятности развития цепной реакции и производных от этой величины. Указаны возможности определения границ критической области.

Ключевые слова: перколяция, вероятность перколяции, коэффициент размножения, критическая область.

Задачи, связанные с перколяцией (от английского слова percolation — просачивание или протекание), возникли при изучении протекания жидкости или газа по случайному лабиринту, как, например, прохождение газа через пористую угольную маску противогаса. В настоящее время теория перколяции представляет собой обширную математическую дисциплину [1—6] с многочисленными физическими приложениями (намагниченность, проводимость и другие свойства различных систем). Теория перколяции описывает возникновение бесконечных связных структур (кластеров), состоящих из отдельных элементов. Перколяцией называют момент появления такого состояния решетки, при котором существует хотя бы один непрерывный путь через соседние проводящие узлы через всю решетку. Совокупность элементов, по которым происходит перколяция, называется перколяционным кластером. Теория перколяции имеет дело с образованием связанных объектов в неупорядоченных средах. С точки зрения математика, теорию перколяции следует отнести к теории вероятности в графах. С точки зрения физика, перколяция — это геометрический фазовый переход.

Перколяционные явления тесно связаны с фрактальностью, явлениями самоподобия и универсальности. Фрактальные модели разного рода систем позволяют обнаруживать новые черты, казалось бы, хорошо известных явлений. Фрактальными и мультифрактальными являются многие физические системы. В [7] фрактальной называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Особенно явно фрактальные свойства проявляются в самой точке фазового перехода, в критической области. Стационарная работа ядерного реактора (ЯР) проходит именно в критической точке, и фрактальное описание должно оказаться очень важным для характеристики работы реактора [8].

В [2] с цепной реакцией сравнивается распространение слухов в перколяционной модели. Соотношения теории перколяции [1, 4] справедливы и

в общей теории фазовых переходов. Фрактальные концепции использовались при изучении сильно развитой турбулентности, неоднородных звездных скоплений [9], диффузионно-ограниченной агрегации, процессов разрушения вещества, строения крови и т. д. Описание физических свойств систем с фрактальной структурой привело к развитию аналитических методов в концепции фрактала, основанных на применении математического аппарата уравнений дробного порядка, т. к. размерность пространства приобретает дробный характер. Практическую важность для расчетов реакторов может иметь необходимость перехода к уравнениям переноса нейтронов в дробных производных [10], хотя часто не существует резкого различия между перколяционными процессами и диффузией [4]. В [11] отмечено, что процессы переноса в перколяционных кластерах, фрактальных деревьях, пористых системах должны быть проанализированы заново, для того чтобы получить корректные уравнения переноса для таких систем. В ветвящихся фрактальных структурах могут реализовываться “сверхмедленные” процессы переноса, когда физическая величина меняется медленнее первой производной. Показатель дробной производной по времени соответствует доле каналов (ветвей), открытых для перколяции. Динамика диффузии определяется случайным характером движения частиц: диффундирующая частица может достичь любой точки в среде. Перколяция связана с фрактальной средой: ниже порога протекания процесс распространения частиц ограничен конечной областью среды. При диффузии от источника возникает диффузионный фронт, имеющий фрактальную структуру. В [7] вводится термин “скорлупа” перколяционного кластера. Ниже в рамках теории перколяции рассмотрены процессы цепной реакции в реакторе.

Важность соотношений теории перколяции для нейтронных процессов в реакторе видна уже из того, что они позволяют сразу получить уравнение размножения нейтронов и уравнение критического

размера реактора, интерпретирующие общие соотношения теории протекания, что говорит об эффективности такого подхода в теории нейтронных процессов в реакторе. Полезным должно оказаться соотношение для скорости распространения возмущения при локальной надкритичности. Интерес могут представлять и многие другие выражения перколяционной теории, применяемые к реакторам. Это связано, видимо, с тем, что перколяция представляет собой критический процесс, предполагающий существование критической точки, некоторого порога. У порога протекание происходит по фрактальному множеству, геометрия которого определяется критичностью. Геометрические характеристики фрактала независимы от микроскопических свойств среды. Ниже критической точки кинетические процессы ограничены конечной областью фазового пространства, рассеянием, поглощением и другими нейтронными процессами. В критической точке определяющим становится фрактальное множество, формирующееся при понижении свободной энергии статистического ансамбля. Поведение системы при медленных воздействиях на нее стремится к самоорганизованной критичности [12, 13]. Стационарные неравновесные состояния на фрактальных структурах носят хаотический, турбулентный характер. В [14, 15] для их исследования применяется модель Лоренца.

Отдельного детального исследования требует кинетика и процессы переноса в фрактальных реакторных структурах [9, 10, 15, 16]. В районе критической точки появляются дальнедействующие корреляционные эффекты, проявляющиеся в негауссовом поведении кинетических процессов, определяющимися топологическими инвариантами самоподобных фрактальных множеств. Процессы переноса на пороге протекания обсуждаются в [9, 10]. Используются уравнения в дробных производных, учитывающие эффекты памяти, нелокальности и перемежаемости.

Точных самоподобий в природе мало, иными словами, редки фракталы с постоянной размерностью, зато распространены фракталы с переменной размерностью — мультифракталы [4, 17]. Не являются исключением и нейтронные процессы в реакторах.

Связь теории перколяции на решетках Бете с коэффициентом размножения нейтронов. Цепочки деления в ЯР имеют геометрический вид деревьев Кэйли [1—4]. Дерево Кэйли, называемое также решеткой Бете, строится, начиная с центрального узла, из которого исходят z ветвей единичной длины. Они образуют первую оболочку дерева Кэйли. Конец каждой ветви также является узлом. Из каждого узла исходят $z-1$ новых ветвей, образуя $z(z-1)$ узлов второй оболочки. Процесс продолжается до бесконечности. Так получается бесконечное

дерево Кэйли с z ветвями, исходящими из каждого узла. Любые два узла соединены только одним путем. При этом следует учитывать случайный характер ветвления. Можно применить также теорию случайных графов. Знание свойств кластеров позволяет исследовать их динамические свойства. Существует тесная связь между фрактальными явлениями и статистическими распределениями.

Процессы, изображаемые деревьями, связаны с ветвящимися случайными процессами [18], которыми описываются нейтронные процессы в реакторе [19]. Мы рассматриваем аспект задачи, определяющийся величиной и характером поведения кластеров — связанных друг с другом узлов. Под узлом понимаем делящееся ядро (или введенный в систему нейтрон—корень дерева [20]), под связью — траектории нейтронов. Точки поглощения нейтронов образуют так называемые висячие концы [20] (вершины степени 1) или свободные концы.

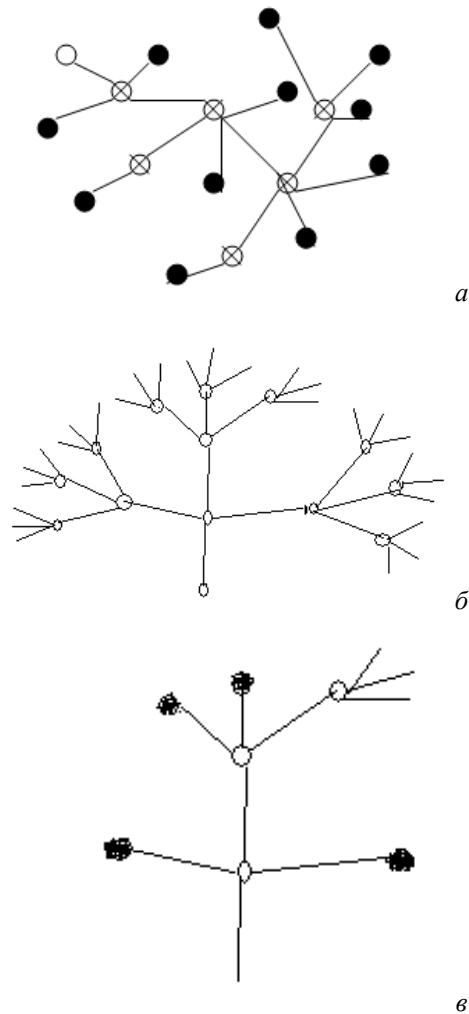


Рис. 1. Траектории нейтронов и их потомков в размножающей среде:
 ○ — точка начала движения первоначального нейтрона;
 ⊗ — точки деления ядер нейтронами;
 ● — точки поглощения нейтронов.

Если бы было возможно проследить за траекториями движений нейтронов в ЯР, то наблюдатель обратил бы внимание на характерную ветвистую структуру процесса для общего числа нейтронов. На рис. 1 показаны примеры траекторий одного нейтрона, введенного в размножающую среду, с учетом тех эволюционных событий (деления ядер и поглощения нейтронов), которые приводят к изменению численности нейтронной популяции. Из дерева вида (б), вводя висячие концы (темные точки), можно получить дерево вида (в), сходное с (а).

При большой подкритичности и больших отрицательных значениях реактивности $\rho = (k_{эф} - 1) / k_{эф}$ (эффективный коэффициент размножения $k_{эф} \ll 1$) в системе присутствуют кластеры небольшого размера с преобладающим числом висячих концов. Если интенсивность гибели нейтрона (поглощение средой или уход из системы) за время $\Delta t \rightarrow 0$ обозначить $\lambda_c \Delta t + 0(\Delta t)$, а интенсивность деления ядра нейтроном $\lambda_f \Delta t + 0(\Delta t)$ ($\lambda_f = v \Sigma_f$, где v — скорость нейтронов; Σ_f — макроскопическое сечение деления), то вероятность деления ядра нейтроном равна

$$c = p = \lambda_f (\lambda_f + \lambda_c)^{-1}. \quad (1)$$

Эффективный коэффициент размножения нейтронов $k_{эф} = p \bar{v}$, где \bar{v} — математическое ожидание числа вторичных нейтронов в одном акте деления. При увеличении p увеличиваются величины кластеров. При $p = 1$ все ядра топлива в ЯР разделяются, и $k_{эф \text{ макс}} = \bar{v}$ (в таких условиях происходит взрыв). При $1 - p \ll 1$ в системе существует бесконечный кластер. Должно существовать критическое значение p_c , при котором происходит переход от одного режима к другому — впервые возникает бесконечный кластер. Это соответствует случаю $k_{эф} = 1$, $c_c = p_c = 1 / \bar{v}$. Этот результат в перколяционной модели получен строго математически [1—4, 7]. Образование бесконечного кластера представляет собой фазовый переход — начало самоподдерживающейся цепной реакции, критическую точку системы (в терминах теории реакторов). Важную роль в теории фазовых переходов играет понятие параметра порядка, той физической величины, которая занимает ключевое место в процессах, приводящих к превращению. В теории перколяционных кластеров параметром порядка является мощность бесконечного кластера P_∞ — вероятность узлу решетки принадлежать бесконечному кластеру. Критическое поведение этой величины при $p \rightarrow p_c$, $p > p_c$ определяется зависимостью

$$P_\infty = (p - p_c)^\beta, \quad (2)$$

где β — один из так называемых критических показателей (скейлинговых индексов — в терминах теории перколяции) [1, 4]. Величина β определяет

критическое поведение мощности бесконечного кластера P_∞ . В теории перколяции вероятность (2) называют еще вероятностью перколяции. Она служит основной характеристикой перколяционной системы. Через вероятность перколяции можно выразить такие свойства физических систем, зависящих от топологии больших кластеров, как, например, спонтанную намагниченность или проводимость. Определяются также такие величины, как среднее число узлов конечного кластера, длина корреляции ξ , характерный пространственный масштаб кластера при $p < p_c$, а при $p > p_c$ — характерный размер пустот в нем.

Формулы теории перколяции для числа узлов и длины корреляции в теории ядерных реакторов (хотя там они получены другим путем) соответствуют уравнению для размножения нейтронов $N = (1 - k_{эф})^{-1}$, и уравнению для критического размера $R_{эф} = \pi M (k_{эф} - 1)^{-1/2}$, где $R_{эф}$ — эффективный размер, геометрический параметр; M — длина миграции нейтронов. В этом случае критический показатель $\nu = 1/2$. Использование теории протекания и построений фрактальной теории позволяет записать ряд других соотношений и рассмотреть, например, динамические критические индексы, размерность скелета кластера, спектральную (фрактонную) размерность и т. д.

Чтобы исследовать мультифрактальные свойства нейтронных процессов в реакторах, надо учесть особенности процесса деления. Если построить зависимость мультифрактального спектра $f(\alpha)$ [17], используя подход работ [4, 13], с мерой мультипликативной популяции, то получим зависимость, представленную на рис. 2, а. Сходный вид имеет функция для $f(\alpha)$ неоднородного треугольника Серпинского [17]. Определяется и спектр обобщенных размерностей (рис. 2, б) [17].

С вероятностью $c = p$ (1) связана важная величина порога протекания. Совокупность элементов, по которым происходит протекание, называется перколяционным кластером. Будучи по своей природе связным случайным графом, в зависимости от конкретной реализации он может иметь различную форму. Поэтому принято характеризовать его общий размер. Порогом протекания называется количество элементов перколяционного кластера, отнесенное к общему количеству элементов рассматриваемой среды. Ввиду случайного характера переключений состояний элементов среды, в конечной системе четко определенного порога (размера критического кластера) не существует, а имеется так называемая критическая область значений, в которую с некоторой вероятностью попадают значения порога перколяции, полученные в результате различных случайных реализаций. С увеличением размеров системы область сужается в точку.

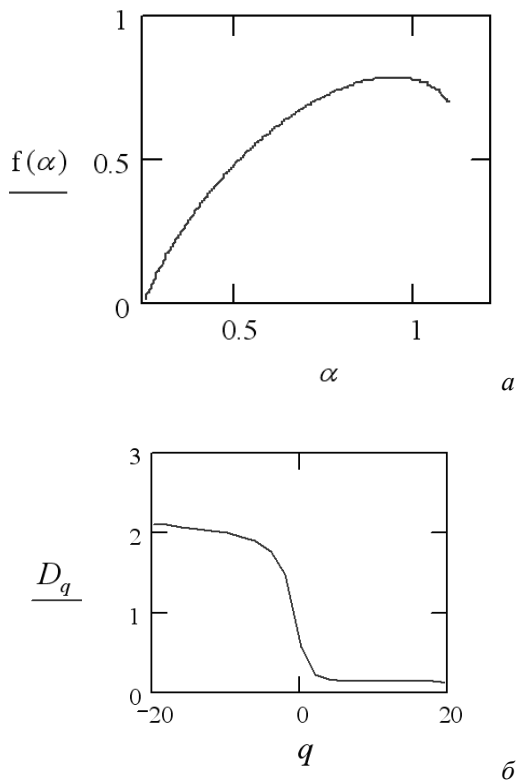


Рис. 2. Функция мультифрактального спектра (а) и спектр обобщенных размерностей (б) для цепочек деления в реакторе с учетом запаздывающих нейтронов

Процессы на решетках Бете рассматриваются, как правило, для случаев бесконечной решетки. В настоящей работе мы рассматриваем случай конечной решетки, что соответствует конечному числу нейтронов в реакторе. Учет конечности числа нейтронов необходим, например, при пуске реактора, в критических сборках. Полученные результаты могут оказаться полезными и для реакторов на быстрых нейтронах, и для переходных процессов.

Кроме вероятности перколяции и порога перколяции существует большое количество других характеристик перколяционного процесса [1].

Для нейтронных процессов в ядерном реакторе наиболее важными характеристиками являются вероятность перколяции, которая интерпретируется как вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции, и значения порога перколяции, пропорционального коэффициенту размножения нейтронов. В [21] получено рекуррентное соотношение для вероятности перколяции из корневой вершины, вероятности того, что связная компонента конфигурации, содержащая корневую вершину (некоторую начальную точку появления первого нейтрона в системе, породившего цепную реакцию), достигает противоположных краев системы. Условно математически размер системы и связной компоненты устремляется к бесконечности, хотя реальные системы конечны. В [21] величина $P(n,c)$ обозначает вероятность перколяции

из корневой вершины на расстояние n . Величина n в нашей задаче интерпретируется как число поколений нейтронов в цепной реакции. Число $c_{co} = \inf\{c: P(c) > 0\}$ называется в [21] порогом перколяции. В [4] эта величина называется критической вероятностью, при которой впервые возникает кластер, простирающийся по всей решетке. Здесь $P(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n,c)$, как в (2). На рис. 3, взятом из [1], показано поведение функции $P(c=p)$. Будем считать, что и для конечных значений n существует порог перколяции

$$c_{cn} = \inf\{c_n : P(n,c) > 0\}. \quad (3)$$

В общем случае вероятность перколяции имеет вид, показанный на рис. 4 [1].

Рекуррентное соотношение, полученное в [21] для вероятности перколяции, имеет вид

$$P(n+1,c) = c[1 - (1 - P(n,c))^s];$$

$$P(0,c) = c, \quad (4)$$

где $s = \bar{v}$. Полученные из (4) выражения для производных имеют вид

$$f(n,c) = dP(n,c)/dc;$$

$$f(n+1,c) = 1 - (1 - P(n,c))^{s-1} [1 - P(n,c) - csf(n,c)];$$

$$f(0,c) = 1, \quad (5)$$

$$r(n+1,c) = s(1 - P(n,c))^{s-2} [2(1 - P(n,c))(dP(n,c)/dc) - c(s-1)(dP(n,c)/dc)^2 + c(1 - P(n,c))r(n,c)];$$

$$r(n,c) = d^2P(n,c)/dc^2;$$

$$r(0,c) = 0. \quad (6)$$

Из (4) получается такая картина поведения вероятности перколяции для решетки Бете (рис. 4), которая отличается от изображенной на рис. 3, полученной для простых решеток. Вероятность $P(n,c)$ на рис. 4 вычислена при $n=750$. Вертикальная линия показывает значение $c_c = \bar{v}^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$.

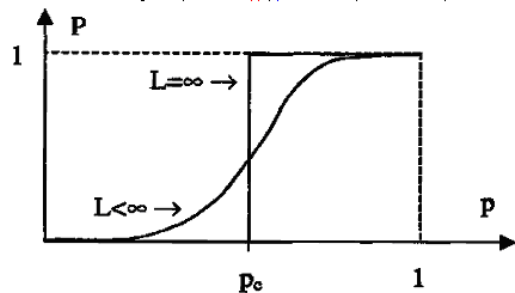


Рис. 3. Вероятность возникновения перколяции P в зависимости от доли заполненных узлов $p=c$ (гладкая кривая соответствует решетке конечного размера, ступенчатая — бесконечно большой решетке)

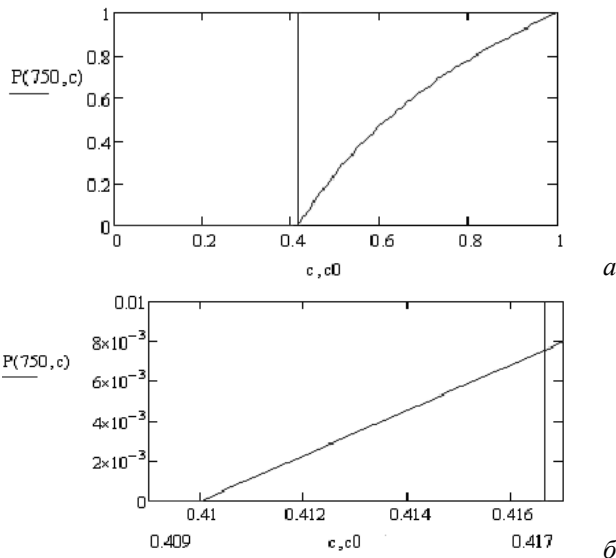


Рис. 4. Вероятность перколяции для решетки Бете, $n=750$ (диапазоны изменения c — $0 \dots 1$ (а) и $0,409 \dots 0,417$ (б))

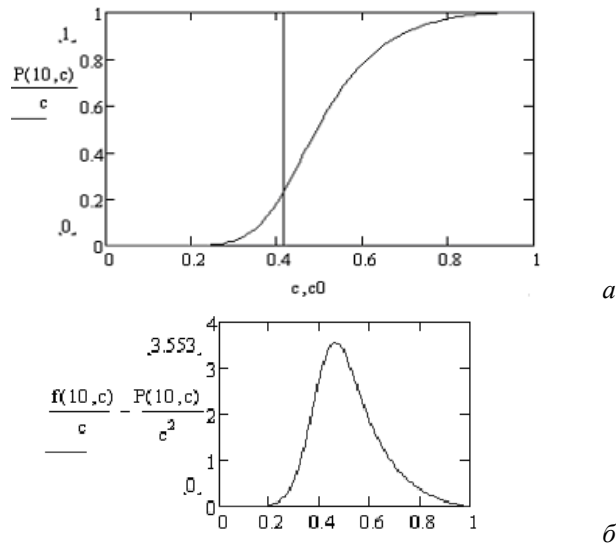


Рис. 5. Поведение условной вероятности $P(10, c)/c$ (а) и производной по c от функции $P(10, c)/c$ (б)

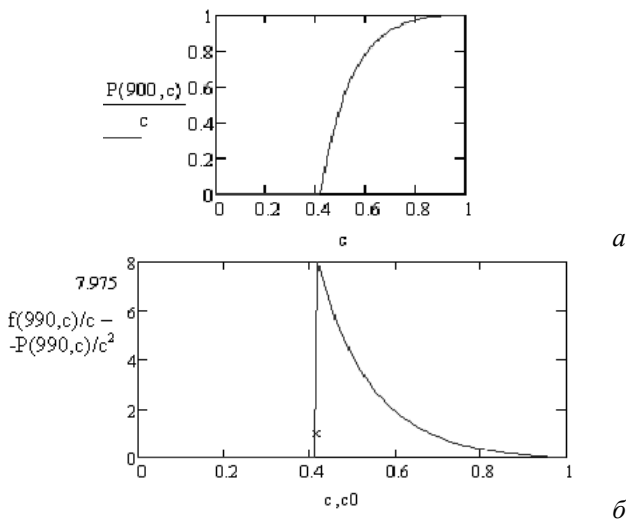


Рис. 6. Поведение функции $P(900, c)/c$ (а) и производной по c от $P(900, c)/c$ (б)

Так как система конечна, число поколений $n=750$, то критическая вероятность не равна $c_c = \bar{v}^{-1}$. Это видно из рис. 4, б, где показан другой диапазон изменения величины c — от 0,409 до 0,417, а не от 0 до 1, как на рис. 4, а. Из рис. 4, б видно, что критическое значение вероятности при $n=750$ меньше, чем для бесконечной решетки, когда $c_c = \bar{v}^{-1}$, $c_{c750} \approx 0,41 < \bar{v}^{-1}$. На интервале от $c=0,41$ до $c_{c\infty}$ существует ненулевая, порядка $10^{-3} \dots 8 \cdot 10^{-3}$ вероятность перколяции или — для реакторов — вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер урана. Таким образом, для конечных систем порог перколяции и коэффициент размножения меньше единицы.

Рис. 3 отличается от рис. 4. На рис. 3 (сходный рисунок, на котором изображена и производная $dP(n, c)/dc$, есть в [3]) изображена условная вероятность $P(n, c)/c$, соответствующая в нашей интерпретации тому, что начальный нейтрон попадает в делящееся ядро. На рис. 5 показано поведение функции $P(10, c)/c$ и производной по c от этой функции, сходное с рис. 3 и рисунком из [3]. Но такого рода поведение характерно для малых значений n . При увеличении n (рис. 6) картина более напоминает рис. 4 и рис. 7 для производной по c от $P(n, c)$.

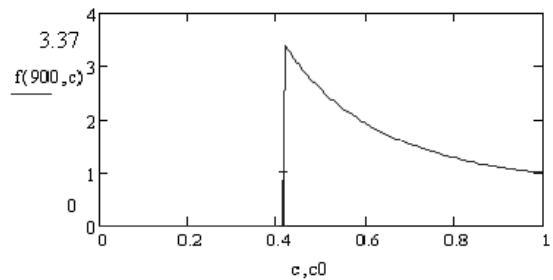


Рис. 7. Зависимость от c производной по c от $P(n, c)$, $n=900$

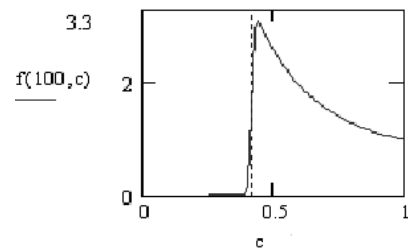


Рис. 8. Поведение производной по c от $P(n, c)$, $n=100$

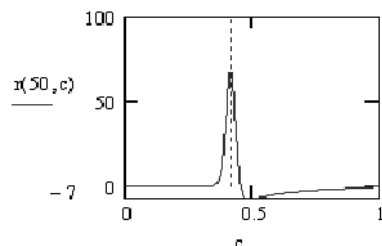


Рис. 9. Поведение второй производной по c от $P(n, c)$, $n=50$

Поведение функций (5) и (6) имеет вид, показанный на рис. 8, 9. Видно, что вид этих функций также связан с положением порога перколяции, показанного вертикальной штриховой линией.

На рис. 10 показана зависимость $P(n, c_0)$ от n при фиксированном значении $c=c_0=v^{-1}=c_{с\infty}$ в интервале изменения n от 2 000 до 3 000. Так же эта функция ведет себя и на других интервалах изменения величины числа поколений нейтронов n . Эта зависимость аппроксимируется функцией $1,43/n$. Для других значений c , отличных от $c=c_0$, эта зависимость не выполняется.

В некоторых работах (например, в [3]) величина критической области описывается как $c \approx c_c + B/L + \dots$, где B — постоянная; L — размер системы. В [22] отмечено, что размер решетки Бете пропорционален $\ln N$. Так как $N=n$, то это соответствует выражению $1,43/n$. Можно оценить время, за которое значения $c_0=c_{с\infty}$ достигают какого-то заданного уровня. Например, значения 10^{-6} достигается за $n=1,43 \cdot 10^6$ поколений нейтронов. Для реакторов на тепловых нейтронах, где среднее время жизни поколения с учетом запаздывающих нейтронов равно 10^{-1} с, это время составляет $1,43 \cdot 10^5$ сек = 1,655 суток. Для реакторов на быстрых нейтронах, где среднее время жизни поколения нейтронов равно $10^{-4} \dots 10^{-8}$ с, это время уменьшается на 3...7 порядков. Рассмотренные методы определения критической точки могут оказаться полезными при пуске реактора или при его переходных процессах, когда за счет манипуляций с поглощающими стержнями изменяется величина вероятности c .

Скорость изменения функции $P(n, c)$ в зависимости от n можно описывать производной по n , точнее, ее дискретным аналогом, величиной $P(n+1, c_0) - P(n, c_0)$. Расчеты показывают, что эта величина, взятая с отрицательным знаком, для $c_0=c_{с\infty}$ хорошо описывается зависимостью $1,43/n^2$. Вторая производная — функция $P(n+1, c_0) - 2P(n, c_0) + P(n-1, c_0)$ — описывается зависимостью $2,83/n^3$. Зависимость k -й производной по n для $c_0=c_{с\infty}$ пропорциональна $n-(k+1)$. Поведение дискретного аналога зависимости от c четвертой производной от $P(n, c)$ по n показано на рис. 11. Поведение аналога второй производной на меньшем масштабе изменения величины c показано на рис. 12. Зависимость от n разности между вторыми производными в точках $c=0,42$ и $c=0,4$ показана на рис. 13.

Аналогичные зависимости записываются для производных по c (5), (6). Так, поведение дискретного аналога первой производной по n от второй производной от $P(n, c)$ по c (6) показано на рис. 14, а поведение зависимости этой величины от c при фиксированном $n=50$ и $n=15$ показано на рис. 15, а и рис. 15, б, соответственно. Зависимость от c третьей производной по n от второй производной от $P(n, c)$ по c (6) при $n=25$ показано на рис. 16.

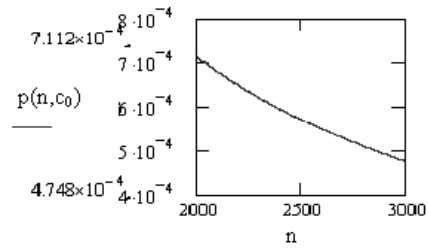


Рис. 10. Зависимость $P(n, c_0)$ от n ($2000 < n < 3000$) при фиксированном значении $c=c_0=v^{-1}=c_{с\infty}$

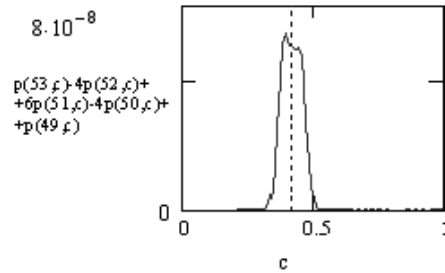


Рис. 11. Поведение дискретного аналога зависимости от c четвертой производной по n от $P(n, c)$

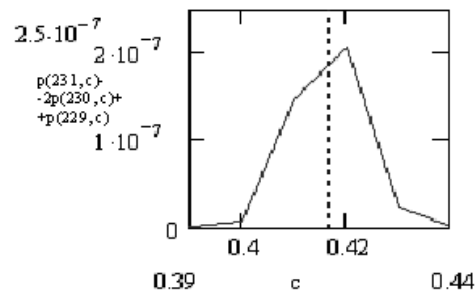


Рис. 12. Поведение зависимости от c аналога второй производной по n от $P(n, c)$ ($0,39 < c < 0,44$)

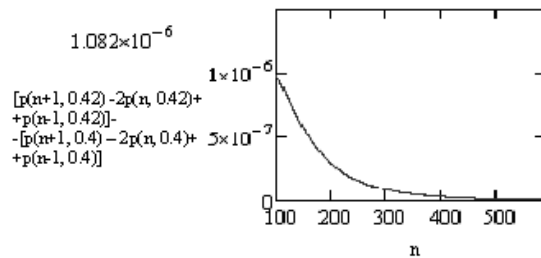


Рис. 13. Зависимость от n разности между вторыми производными по n от $P(n, c)$ в точках $c=0,42$ и $c=0,4$

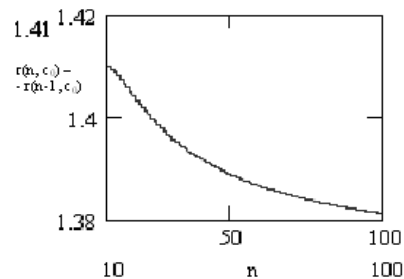


Рис. 14. Поведение зависимости от n дискретного аналога первой производной по n от второй производной от $P(n, c)$ по c

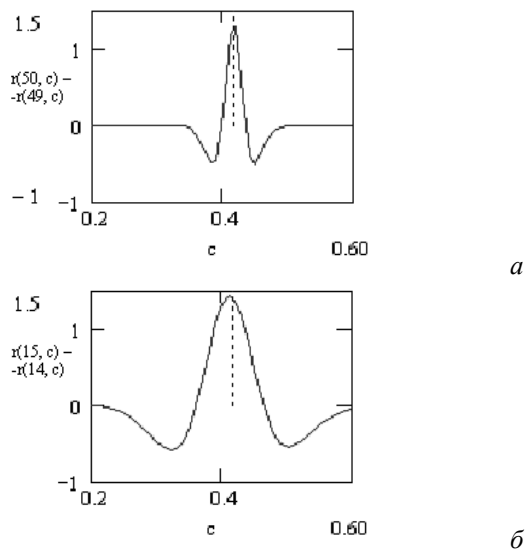


Рис. 15. Поведение зависимости от c дискретного аналога первой производной по n от второй производной от $P(n,c)$ по c при фиксированных $n=50$ (а) и $n=15$ (б)

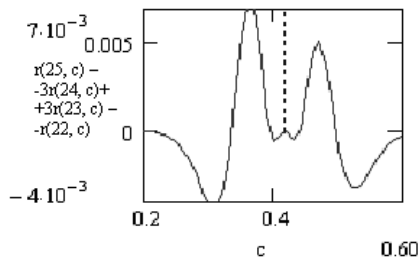


Рис. 16. Зависимость от c третьей производной по n от второй производной от $P(n,c)$ по c (б) при $n=25$

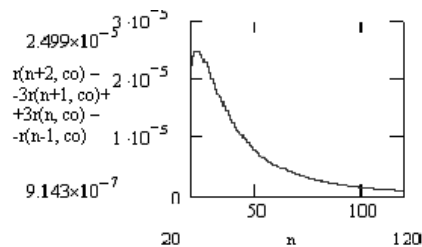


Рис. 17. Зависимость от n третьей производной по n от $r(n,c)$, второй производной по c от $P(n,c)$

Зависимость от n третьей производной по n от $r(n,c)$, второй производной по c от $P(n,c)$ показана на рис. 17. Положение максимумов и минимумов рис. 16, возможно, связано с границами критической области. Из рис. 15 видно, что отрицательные пики для первой производной по n сближаются при увеличении n .

Заключение

Перколяционные и фрактальные свойства нейтронных процессов в ядерном реакторе отражают сложный характер процессов, происходящих при делении ядер и движении нейтронов. Использование точных соотношений теории перколяции, полученных для решеток Бете, позволяет оценить временное поведение такой важной для практики эксплуатации реакторных установок величины, как коэффициент размножения. Оценки показывают, что значения единичного коэффициента размножения могут достигаться только в практически нереализуемом случае бесконечного числа поколений нейтронов, соответствующего бесконечно большим временам и бесконечно большим системам. Но для реальных времени эксплуатации можно оценить времена, необходимые для достижения очень малых интервалов от единичного значения коэффициента размножения.

Полученные результаты имеют важное значение для безопасности реакторных систем с относительно небольшим числом нейтронов, как для стадий пуска реактора или для критических сборок. Полезными они должны оказаться и для более детального описания переходных процессов в реакторе. Некоторые общие аспекты затронутых в настоящей работе проблем рассмотрены в [23].

Список использованной литературы

1. Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю. Ю. Тарасевич. — М. : URSS, 2002. — 112 с.
2. Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка / А. Л. Эфрос // Библиотечка "Квант". — М. : Из-во "Наука", 1982. — Вып. 19. — 176 с.
3. Stauffer D. Introduction to percolation theory : rev. 2nd ed. / D. Stauffer, A. Aharony. — London : Taylor & Francis, 1994. — 179 p.
4. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — М. : Мир, 1991. — 260 с.
5. Кестен Х. Теория перколяции для математиков / Х. Кестен. — М. : Мир, 1986. — 392 с.
6. Шкловский Б. И. Электронные свойства легированных полупроводников / Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос. — М. : Наука, 1979. — 416 с.
7. Mandelbrot B. B. Fractals : Form, Chance, and Dimension / B. B. Mandelbrot. — San Francisco : Freeman, 1977. — 752 p.
Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature / B. B. Mandelbrot. — San Francisco : Freeman, 1982. — 530 p.
8. Рязанов В. В. Древовидные структуры, задачи перколяции и фрактальные явления в размножающей среде / В. В. Рязанов, А. Ф. Турбин // Тез. докл. семинара-совещания "Фрактальные объекты в математике,

- физике и биологии”, 25—27 апр. 1991 г., г. Славянск. — К. : об-во “Знание” Украины, 1991. — С. 17.
9. *Зеленый Л. М.* Фрактальная топология и странная кинетика : от теории перколяции к проблемам космической электродинамики / Л. М. Зеленый, А. В. Милованов // УФН. — 2004. — Т. 174, № 8. — С. 809—852.
 10. *Учайкин В. В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы / В. В. Учайкин // УФН. — 2003. — Т. 173, № 8. — С. 847—876.
 11. *Нигматуллин Р. Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация / Р. Р. Нигматуллин // Теоретическая и математическая физика. — 1992. — Т. 90, № 3. — С. 354—368.
 12. *Vak P.* Self-organized criticality // P. Vak, C. Tang, K. Wiesenfeld // Phys. Rev. A. — 1988. — Vol. 38, № 1. — P. 364—374.
 13. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. — Ижевск : РХД, 2001. — 528 с.
 14. *Шуда И. А.* Влияние иерархического строения и самоподобия на самоорганизацию сложных систем : дис. ... докт. физ.-мат. наук : спец. 01.04.07 “Физика твёрдого тела” / И. А. Шуда. — Сумы, 2011. — 389 с.
 15. *Олемской А. И.* Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория / А. И. Олемской. — М. : Красанд, 2009. — 379 с.
 16. *Олемской А. И.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды / А. И. Олемской, А. Я. Флат // УФН. — 1993. — Т. 163, № 12. — С. 1—50.
 17. *Божокин С. В.* Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. — Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 128 с.
 18. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы / Б. А. Севастьянов. — М. : Наука, 1971. — 436 с.
 19. *Дорогов В. И.* Вероятностные модели превращения частиц / В. И. Дорогов, В. П. Чистяков. — М. : Наука, 1988. — 110 с.
 20. *Харари Ф.* Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. — М. : Мир, 1977. — 324 с.
 21. *Антонова Е. С.* Непрерывность вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на однородных древесных графах / Е. С. Антонова, Ю. П. Вирченко // Науч. ведомости Белгородского государственного университета. Серия : Математика. Физика. — 2010. — Т. 23(94), № 21. — С. 11—21.
 22. *Cohen R.* Complex networks : Structure, Robustness and Function / R. Cohen, S. Havlin. — Cambridge : University Press, 2010. — 330 p.
 23. *Рязанов В. В.* Фрактальные структуры и перколяция в ядерном реакторе / В. В. Рязанов // Проблемы безопасности атомных электростанций і Чернобиля. — 2014. — Вып. 23. — С. 13—21.

Получено 12.11.2014