380
ЖУРНАЛ
ЄВРОПЕЙСЬКОЇ ЕКОНОМІКИ
Том 12 (№ 3). Вересень 2013
Видання Тернопільського національного економічного університету

Ринок фінансово-банківських послуг

Ксін XI

МОРАЛЬНИЙ РИЗИК КОНТРАКТУ ТА НОРМУВАННЯ КРЕДИТІВ НА НЕПРОЗОРИХ КРЕДИТНИХ РИНКАХ

Резюме

Ми робимо перший крок у літературі, аналізуючи гібридну модель нормування кредитів за умови наявності несприятливого відбору та морального ризику. Виходячи з того, що кредитні ринки в менш розвинених країнах доволі непрозорі, оскільки там немає необхідних установ, які сприяли б обміну інформацією між кредиторами, ми ще раз повернулись до питання нормування кредитів у такому середовищі. Для цілого ряду різних значень параметрів подано повний опис ідеальної рівноваги підгри у грі отримання кредиту. За певних значень параметрів існує тип II нормування кредитів для деяких позичальників і кредитів, які нав’язують, – для інших. Показано, що ефективність вимушених кредитів обмежена. Ці результати контрастують із результатами DeMeza і Webb (1992).

Xi Ксін, Школа економіки, Шанхайський університет фінансів та економіки, Китай.

Автор висловлює вдячність Декану Corbae, Kevin X.D.Huang, In-Uck Park, Ted Temzelides за допомогу, а також учасникам WEAL конференції, П’ятої фінансової конференції та SUFE семінару з мікроекономіки. Дане дослідження проведено в рамках Програми Головної Академічної Дисципліни (Проект 2011) Китаю.

Ключові слова

Розподіл (нормування) кредитних ресурсів, моральний ризик, несприятливий вибір.

Класифікація за JEL: D40, D82.

1. Вступ

Велику кількість літератури присвячено поясненню феномена нормування кредитів, з апелюванням до асиметричної інформації, яка є на кредитному ринку. Існують два основних види пояснень даного напрямку досліджень: такі, що базуються на несприятливому виборі, та інші, в основі яких – моральні ризики. Фундаментальні праці Стігліца і Вейса (1981) (Stiglitz and Weiss) є прикладом перших. Згідно з їхньою моделлю, банк не може бачити ризикованість проекту фірми, і повернення банкові кредиту залежить від можливого дефолту фірми. Ці вчені стверджують, що, за умови обмеженої відповідальності фірми, підвищення відсоткової ставки кредиту не обов'язково збільшує банківський прибуток, тому що за кредитами з вищими відсотковими ставками звертаються лише фірми з більш ризикованими проектами, тоді як фірми з менш ризикованими – просто виходять з ринку. Цей негативний ефект вибору не дає банку підвищувати відсоткові ставки, і це усуває надлишковий попит на ринку і призводить до раціонування кредиту. Як приклад підходу моральних ризиків, Бестер і Хельвіг (1987) (Bester and Hellwig) розглядають можливість раціонування кредиту через приховані дії позичальників. Позичальник може вибирати між «хорошим» і «поганим» інвестиційним проектом, що, після отримання коштів від кредитора, характеризується різною сумою повернення кредиту (тобто, їх ризикованістю). За умови обмеженої відповідальності вибір позичальником проекту впливає на повернення коштів позикодавцеві, але до прийняття проекту в кредитному договорі не можна робити цей вибір За таких умов знову виникає раціонування кредитів, на цей раз у результаті постконтрактної інформаційної асиметрії між кредитором і позичальником, на відміну від прихованої інформації в наведеній вище моделі Стігліца і Вайса, яка являє собою доконтрактну інформаційну асиметрію.

Незважаючи на відмінності особливої форми прихованої інформації або прихованої дії, усі пояснення всіх інших моделей раціонування кредитів базуються в літературі на будь-якому несприятливому виборі або моральному ризику, тобто в тих моделях структури стимулювання є одновимірними. Проте в багатьох практичних додатках лише одновимірний негативний вибір або лише одновимірний моральний ризик навряд чи може становити суть економічної проблеми. Існує явна необхідність вивчення багатовимірних структур стимулювання раціонування кредиту. У цьому напрямку Гельман і Стігліц (2000) (Hellmann and Stiglitz) зробили перший крок, вводячи двовимірну особисту інформацію (як стосовно очікуваного прибутку, так і ризику проекту фірми) в моделі нормування кредиту та маржі. Як виявилося, введення повнішої форми інформаційної асиметрії приводить до деяких висновків, які відрізняються від тих, що було зроблено в попередніх роботах на дану тему. Наприклад, вони показують, що нормування кредитів і маржі сумісні в їхніх умовах, на відміну від результатів DeMeza і Webb (1987), коли раціонування кредиту або маржі зникає за одновимірної асиметричної інформації стосовно очікуваної прибутковості або ризику проекту.

У цій роботі ми вводимо багатовимірну структуру стимулів іншого напрямку нашого дослідження раціонування кредитів. У гібридній моделі ми припускаємо одночасну присутність несприятливого відбору та морального ризику. Конкретну форму доконтрактної інформаційної асиметрії зумовлено тим фактом, що кредитні ринки в багатьох малорозвинених країнах є доволі непрозорими, тобто кредитор не може легко спостерігати за фінансовим станом позичальника, коли той звертається за кредитом. Скрита інформація позичальника щодо наявних боргів становить небезпеку для кредитора, оскільки це впливає на здатність позичальника погасити борг. Ми моделюємо проблемні кредити, здійснені між кредитором і позичальником, у формі скринінгової гри, де позичальник не лише самостійно вибирає запропонований кредитором договір, а й вибирає рівень оптимальних робочих зусиль. Оскільки прибуток кредитора частково залежить від вибору робочих зусиль позичальника в стохастичному плані, для кредитора це ендогенно породжує ризик. Таким чином, ця ендогенність ризику нашої моделі виступає контрастом екзогенних ризиків інших моделей раціонування кредитів, які висвітлюються в літературі. Наприклад, у наведених вище роботах Стігліца і Вайса (1981) (Stiglitz and Weiss), Бестер і Гельвіга (1987) (Bester and Hellwig) ризикованість проекту фірми просто передбачається як екзогенний елемент їх відповідної моделі. Ризики в моделях Майлда і Райлі (1988)(Milde and Riley) і Гейла і Гедьвіга (1985) (Gale and Hellwig) також екзогенні: перші вводять ризик з абстрактною випадковою величиною, а другі представляють його як результат, скажімо, невизначеності щодо майбутньої ціни продукції підприємця.

Крім питання екзогенних, на відміну від ендогенних, ризиків у моделях раціонування кредиту, з'явилася критика екзогенного характеру кредитного договору між кредитором і позичальником. Початкові дослідження раціонування кредиту розглядали кредитний договір як типове оформлення боргу, згідно з яким позичальник зобов'язаний погасити заздалегідь встановлену суму, і таку форму укладення контракту пропонували всім, без винятку, потенційним позичальникам. Для вирішення цієї проблеми Уетт (1983) (Wette), Бестер (1985a) (Bester), Бесанко і Такор (1987) (Besanko and Thakor), наприклад, вивчили ідею скринінгу, коли ставилась вимога робити заставу, а позичальники самі вибирали пропозиції кредитора щодо відсоткової ставки та вимоги забезпечення необхідної застави. З іншого боку, у ролі скринінгового інструменту кредитора Бестер (1985b) (Bester), Майлд і Райлі (1988) (Milde and Riley), Грінблатт і Хван (1989) (Grinblatt and Hwang) вводять змінну величину розмірів кредиту. У нашій моделі при виборі позичальників розмір кредиту також може бути змінним, який, крім відсоткової ставки, кредитор використовує як другий інструмент.

На основі теорії Кітона (1979) (Keeton) у літературі подають два види раціонування кредитів. Тип I раціонування кредитів відбувається, коли позичальник отримує меншу суму кредиту за визначеною ним відсотковою ставкою, ніж хотів би. Тип II – коли з усіх охочих позичальників, борги яких не можна відстежити, одним надають кредити, а іншим – ні. За наявності встановлених інвестиційних потреб усіх потенційних позичальників це питання неможливо вирішити, застосувавши тип I раціонування кредитів, тому що всі пропозиції кредитора будуть охоплювати або все, або нічого. У наших умовах, за певних значень параметрів моделі, ми показуємо, що тип II раціонування кредитів існує для одного типу позичальників, а для інших типів – застосовується явище, протилежне типу I раціонування кредитів, а саме: на кредитному ринку існують вимушені кредити, коли позичальник «змушений» брати більшу позику, ніж хотів би, за ринковими відсотковими ставками кредитора. Оскільки розмір наданого кредиту не є найбільш бажаним для позичальника, проте він становить обмежений оптимальний рівень інвестицій. У цьому аспекті наша стаття близька до підходів Де Мези і Уебба (DeMeza і Webb) (1992), хоч вони розглядають навколишнє середовище за допомогою симетричної інформації та екзогенних ризиків та ставлять акцент виключно на типові I раціонування кредитів. Результати, які ми отримаємо, відрізняються від їхніх з таких питань, як можливість виникнення раціонування кредиту на монопольному ринку, а також яка роль належить ситуації, коли не ведеться контроль за заборгованістю позичальника та дотриманням правила пріоритетності погашення боргу за умов раціонування кредиту. Однією з відмінних рис нашого аналізу є те, що ми точно визначили наявність (або відсутність) кредитного нормування для різних значень параметрів моделі, тоді як більшість попередніх праць у даній галузі просто показали *можливість* раціонування кредитів. Насправді і Гельман, і Стігліц (2000)(Hellmann and Stiglitz) стверджували, що «в ідеалі хотілося б мати загальну характеристику, яким чином перетворити ці параметри на досягнення рівноваги раціонування», але «це, як виявляється, аналітично неможливо зробити [в нашій моделі]».

Вивчаючи доволі загальну, але все ж таки гнучку модель раціонування кредитів у нашій статті, ми тим самим збагачуємо наявну літературу.

Дана стаття також пов'язана з літературою про неексклюзивні контракти. Парк (2004) (Park), наприклад, вважає, що проблема моральних ризиків при оформленні кредиту одного окремо взятого позичальника і кредитора, згідно з моделлю, – це коли позичальник виходить з проміжного рівня майна, що згодом стає його особистою інформацією, якою він користується на зовнішньому ринку перед укладанням контракту з новим кредитором. У цьому аспекті наша модель і моделі Парка подібні в тому, що попередньо наявний борг позичальника є також його особистою інформацією. Бізер і ДеМарзо (1992) (Bizer and DeMarzo) у своєму дослідженні подальшої банківської діяльності розглядають умови, коли кредитор не може контролювати майбутні запозичення позичальника в інших кредиторів, у нашому ж випадку, для порівняння, – це коли кредитор не може відстежити попередні запозичення позичальника.

Решту статті побудовано таким чином: розділ 2 присвячено природі та причині існування непрозорих кредитних ринків, і тут подано офіційну модель. У розділі 3 виведено оптимальний контракт за умов симетричної інформації як орієнтовний випадок. У розділі 4 ми аналізуємо скринінг рівноваг при неконтрольованих боргах. Розділ 5 містить аналіз наслідків від скринінгу рівноваг для раціонування кредитів. Заключні зауваження представлено в розділі 6.

2. Кон'юнктура

2.1. Непрозорі кредитні ринки та співіснування численних боргів

Позичальники часто мають декілька джерел на кредитних ринках, з яких отримують кошти. Таким прикладом може слугувати ринок споживчого кредитування. У Сполучених Штатах споживачі зазвичай мають кілька кредитних карточок, виданих різними банками. Байсин і Гвейтолі (Bisin and Guaitoli) (2004) вважають, що типова американська сім'я має в середньому більше семи кредитних карток. Більшість боргів на кредитних картках є незабезпеченими, а отже, їх можуть не повернути. Як свідчать Петерсен і Раджан (1994, 1995) (Petersen and Rajan), малі підприємства також часто можуть брати кредити в кількох кредиторів. У Європі превалює кредитування з кількох джерел (Detragiache, Garella і Guiso, 2000). В усіх цих випадках борг позичальника в одного кредитора є екзогенним фактором для іншого, тому що, чим більша заборгованість позичальника, тим більший ризик для кредитора погашення кредиту.

Хоча практично неможливо обмежити доступ позичальників до декількох джерел кредитування, було створено установи, які вирішують проблеми інформаційної асиметрії, що виникають між кредиторами і позичальниками. Таким прикладом є кредитні бюро. Кредитори – члени бюро обмінюються інформацією про фінансовий стан своїх спільних боржників. Коли споживач подає заявку в банк на відкриття кредитної лінії, банк, крім усього іншого, перевіряє його заборгованість на цей період, користуючись інформацією різних кредитних бюро. Якщо встановлено, що загальний борг занадто високий стосовно передбачуваної здатності його погашення (наприклад, виходячи з річного доходу заявника), його прохання, ймовірно, не буде задоволено.

Хоч такі країни, як США і Великобританія, мають відносно досконалі системи обміну інформацією між кредиторами про позичальників, в інших країнах, таких як Бельгія, Італія та Іспанія, обмін такою інформацією є мінімальним (Пагано і Джапеллі), (Pagano and Japelli, 1993). А в деяких менш розвинених країнах спільного використання інформації практично не існує, що частково пояснює повільний розвиток галузі споживчого кредитування в цих країнах[1]. Крім того, у більшості країн існують правила, яких повинні дотримуватись кредитні бюро, згідно з ними заборонено збирання певних видів інформації, наприклад, інформації про заборгованість перед друзями, членами сім'ї та іншими приватними позичальниками. Хоч, у принципі, самі кредитори можуть спробувати дізнатися про особисті борги позичальника, аналізуючи вартість його проживання, така вартість може виявитися непомірно високою, що є практично неможливим за його фінансового становища[2].

Виходячи із вчення Bizer and DeMarzo (1994), у світлі цих інституційних реалій на кредитних ринках ми моделюємо невідстежувані кредитором заборгованості позичальника на момент подання його заяви на отримання нового кредиту[3]. Ми також припускаємо, у разі банкрутства позичальника, що він сплатив усі попередні борги до погашення кредиту новому кредитору. Це припущення може бути виправдане, якщо борги є пріоритетними, тобто якщо давніші борги в разі банкрутства могли бути повернуті пізніше, порівняно з тими, які були отримані пізніше. Крім того, навіть якщо борги не є пріоритетними в юридичному сенсі, вони, тим не менш, є пріоритетними з точки зору позичальника, тобто, коли йдеться про погашення боргів, то преференції по-

[1] Згідно з Івасакі (Iwasaki (2004), у Китаї кредитні картки становлять лише 5 % від загальної кількості банківських карток, усі інші – дебетові, як їх називають в Америці, тобто, власник картки тримає кошти в певному банку. Також див. Li та ін. (2005).

[2] Підтвердження цього можна знайти у відповідній літературі. Див., наприклад, Townsend (1979), Gale and Hellwig (1985), and Williamson (1986, 1987).

[3] У контексті незалежного боргу Клетцер (1984) (Kletzer) досліджує модель, коли банки не можуть відстежити загальні борги позичальника.

зичальника такі, що раніше взяті кредити він покриває спочатку, а потім – ті, які взяв пізніше. Це особливо часто трапляється в багатьох слаборозвинених країнах, де велику частину боргів споживачів становлять борги перед приватними сторонами, такими як друзі та члени сім'ї позичальника. За відсутності необхідних правових установ забезпечення погашення боргу в цих країнах, позичальник має як стимули, так і засоби переконання, що борги платять передусім «першочерговому» кредитору[4].

2.2. Укладання кредитної угоди

Кредитний ринок складається з монополіста-кредитора і великої кількості позичальників. З певних причин позичальники мають попередні борги і перебувають у скрутному фінансовому становищі. Але в них є ефективні технології, які, за умови відповідного фінансування, можуть забезпечити таке виробництво, яке дало б можливість погасити наявні борги. Позичальники, за суттю своїх боргів, різняться між собою: в одних ці борги зроблено в минулому d_H, попередні борги інших – d_H при $0 < d_L < d_H$. В іншому випадку позичальники ідентичні, як описано нижче, і надалі вони іменуються як L-позичальники і H-позичальники відповідно, залежно від суми їх попередньої заборгованості.

При першому інвестуванні, $I \in [0, \infty)$, кожен позичальник за допомогою своїх технологій і вкладених зусиль $e \in [0,1)$ може виробляти продукцію другого періоду $F(I,e)$. Вихід продукції збільшується зі збільшенням рівня зусиль у сенсі стохастичного домінування першого ряду. Зокрема, ми вважаємо, що F має мультиплікативну форму: $F(I,e) = f(I)Z(e)$, де f задовольняє $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$, $f' > 0$, $f'(\infty) = 0$, а $f'' < 0$ і $Z(e)$ становить 0–1 випадкової величини, де $prob\{Z(e) = 1\} = e$, а $prob\{Z(e) = 0\} = 1 - e$, тобто, вищий рівень зусиль приводить до більшої можливості успіху за будь-якого фіксованого обсягу інвестування. Кожен позичальник має дію корисності: $U(w,e) = u(w) - g(e)$, яка визначається його другим періодом майнового стану w, а обсяг зусиль e, де u задовольняє $u(0) = 0, u' > 0$, а $u'' < 0$, а g задовольняє $g(0) = 0$, $g(1) = \infty$, $g'(0) = 0$, $g'' > 0$ і $g''' > 0$[5]. Отже, позичальник стає нейтральним до ризику в питаннях майна, а вищий рівень зусиль буде більш затратним у значенні корисності.

---

[4] Див. Longhover і Carlstrom (1995)та Longhover (1997).

[5]Приклад, коли g задовольняє ці властивості $g(x) = -\ln(1 - x) - x$, $0 \le x < 1$.

Той кредитор є нечутливим до ризику, який працює на ринку, намагаючись максимізувати свій очікуваний у другому періоді прибуток. Він збільшує обсяг кредитних коштів на депозитному ринку, де їх пропозиція під відсоткову ставку ρ є безконечно еластичною. Це означає, що кредитор, якщо вирішить інвестувати в технології позичальника, може отримати кошти в будь-якій кількості, які він бажає, за відсотком, який він сам встановив[6]. Не порушуючи загального підходу, ми припускаємо, що $\rho = 0$.

Усі сторони несуть обмежену відповідальність. По-перше, позичальник несе обмежену відповідальність перед кредитором. Тобто, якщо позичальник збанкрутує в другий період, решта його майна гарантовано становитиме не менше нуля. По-друге, кредитор має обмежену відповідальність перед попередніми кредиторами позичальника, тобто, коли позичальник не зможе погасити свої попередні борги, новий кредитор не несе відповідальності за їх погашення. І, зрештою, відповідальність кредитора перед його вкладниками також обмежено.

Ми моделюємо цей інвестиційний процес як наступну двоступеневу гру. У першому періоді, після того як визначено інвестиційні можливості, кредитор залучає кошти депозитного ринку, а потім пропонує позичальнику кредитну угоду, (*l, r),* де *l* – розмір кредиту і *r* – розмір відсоткової ставки[7]. Позичальник може або відмовитися від кредитного контракту, і в цьому випадку він закінчується нульовим результатом, а отже, нульовою корисністю в другому періоді, або приймає пропозицію, і в цьому випадку кредит вкладається в роботу і позичальник вибирає рівень зусиль *e*, спрямованих на випуск продукції другого періоду Якщо позичальник приймає пропозицію, тоді протягом другого періоду він погашає борги за умови обмеженої відповідальності та правил пріоритету погашення боргу (тобто спочатку погашають раніше зроблені борги, а потім – пізніші). Для простоти візьмемо правило «нічия», припускаючи, що позичальник завжди відмовляється від контрактної пропозиції або, якщо йому однаково – прийняти чи відхилити пропозицію, кредитор у такому разі завжди обирає варіант не виходити з пропозицією.

6 Раніше література про раціонування кредитів базувалася на доктрині, що обмежена кількість позикових коштів змушує банки вдаватись до їх раціонування. Припущення безконечної еластичності пропозиції позикових коштів дає змогу робити акцент на ролі асиметричної інформації, яка є причиною нормування кредитів.

7 Як відзначають DeMeza і Webb (1992), у банківській практиці позичальникам зазвичай встановлюється відсоткова ставка, а також обсяг займу. Це також стосується і користувачів кредитних карток: разом з кредитною лінією їм дається і розмір відсоткової ставки.

3. Оптимальні кредитні договори за умови видимих боргів

Ми хочемо охарактеризувати під-гру досконалої рівноваги (SPE) у грі укладення контракту, і в цьому процесі отримати оптимальний контракт кредитора стосовно позичальника. Згідно з цією під-грою досконалості, стратегія позичальника має бути такою, що позичальник не може відмовитися від договірних умов, за яких запропонована в першому періоді кредитором позика у другому періоді дасть позитивну корисність дії. Ця умова ефективно знищує порожні погрози позичальника щодо отримання кращих умов кредиту. У цьому розділі ми спочатку розглянемо як орієнтир ситуацію, коли приватна інформація про борги позичальника стає відомою кредитору. Коли позичальникові пропонують кредитну угоду, він повинен вирішити, прийняти її чи відхилити. Наступна лема показує умови, за яких позичальник приймає кредитну угоду.

Лема 1. *I-позичальник прийме кредитну угоду (l_i, r_i), якщо (і тільки за умови, якщо) $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i > 0$. Якщо задовольняється дана умова, позичальник вибирає рівень e_i зусиль, що буде єдиним рішенням $g'(e_i) = u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i)$.*

Доведення. Див. додаток.

Встановивши необхідні та достатні умови для прийняття позичальником кредитної угоди, звернемося тепер до аналізу SPE (під-гри досконалої рівноваги), розглядаючи гру в різних ситуаціях стосовно значень параметрів моделі. Але, перш ніж перейти до такого аналізу, спочатку наведемо ще одну лему, яку ми подаємо без доведення, і визначимо дві величини l і h.

Лема 2. *Існує єдиний $l^* \in [0, \infty)$, такий як $f(l^*) - l^* \geq f(l) - l$, для будь-якого $l \in [0, \infty)$. Крім того, $l^* > 0, f'(l^*) = 1$, а $h^* \equiv f(l^*) - l^* > 0$.*

Оскільки попередні борги не приховуються, кредитор може чудово встановлювати різницю між позичальниками, пропонуючи кожній категорії інші кредитні угоди. Оскільки позичальник є нечутливим до ризиків, максимізація його загального очікуваного доходу є еквівалентом максимізації очікуваного доходу від кожної категорії позичальників, незалежно від того, чи нарахування відсотків на капітал двох категорій позичальників відбувається окремо, а чи ні. Очікуваний дохід кредитора від позичальника *i,* якщо той прийме угоду (l_i, r_i) і вибере рівень зусиль e_i як подано в лемі 1, виражено формулою

$$\pi_i = E[\max\{\min\{\max\{f(l_i)Z(e_i)-d_i,0\},(1+r_i)l_i\}-l_i,0\}\,|\,e_i]. \quad (1)$$

Зазначимо, що дві максими в поданому вище виразі за порядком їх появи відображають, відповідно, обмежену відповідальність позичальника перед його вкладниками і позичальників – перед їх попередніми кредиторами. Очікувана позичальником i корисність другого періоду у випадку прийняття ним контрактної угоди (l_i, r_i) при $f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i>0$ і при виборі ним рівня зусиль e_i виражається формулою

$$E_i = e_i \cdot u(f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i)-g(e_i) \quad (2)$$

Ми виводимо SPE для кожного з трьох випадків по черзі. Приклад 1: $h^* \le d_L$; Приклад 2: $d_L < h^* \le d_H$; і Приклад 3: $d_H < h^*$.

Приклад 1: $h^* \le d_L$. Тоді $h^* \le d_i, i=L,H$. Оскільки, за лемою 2, l є єдиною максимою для $f(l)-l$ і $h^* = f(l^*)-l^*$, ми маємо для будь-якої пропозиції контракту (l_i, r_i), що $f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i \le f(l^*)-l^*-d_i-r_il_i = h^*-d_i-r_il_i<0$. Згідно з лемою 1, жодна категорія позичальників не прийме угоди, і, відповідно, кредитор не вийде з пропозицією укладання такої угоди. Це приводить до наступної теореми.

Теорема 1. *Якщо $h \le d_L$, то існує єдиний результат гри SPE, коли кредитор не пропонує угоди жодній категорії позичальників.*

Приклад 2: $d_L < h^* \le d_H$. Насамперед, позичальник H не приймає пропозицію кредитора, а це означає, що кредитор не пропонує угоди цій категорії позичальників, як показано у прикладі 1. Позичальникам L, знаючи, що, згідно з угоди (l_L, r_L), коли $f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L \le 0$, за якої дохід буде нульовим у другому періоді, оскільки позичальник L не захоче такої угоди, кредитор для отримання очікуваного позитивного доходу у другому періоді постарається запропонувати (l_L, r_L), оскільки $f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L>0$. У такому випадку, оскільки $f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L>0$ передбачає, що $f(l_L)-d_L>(1+r_L)l_L \ge 0$, очікуваний дохід кредитора π_L, від (1), становить $\pi_L = e_L r_L l_L$. Задача кредитора полягає в тому, щоб максимізувати π_L, а це залежить від того, чи позичальник L погодиться на угоду e_L, як описано в лемі 1. Тобто, кредитор вирішує задачу максимізації.

Максимізувати $e_L r_L l_L$

s. t.

$$g'(e_L) = u(f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L) \quad (3)$$

$$f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L>0 \tag{4}$$

Умови, які випливають з інтегранта (Лагранжа), для даної задачі такі:

$$r_L l_L-\lambda g''(e_L)=0 \tag{5}$$

$$e_L l_L-\lambda l_L u'(f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L)=0 \tag{6}$$

$$e_L r_L-\lambda((1+r_L)-f'(l_L))u'(f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L)=0\,. \tag{7}$$

де λ – множник, пов'язаний з обмеженням (3) та з обмеженнями (3) і (4).

Із (6) і (7) ми отримуємо

$$f'(l_L)=1\,. \tag{8}$$

що, згідно з лемою 2, передбачає, що $l_L=l^*$, а (5), (7) і (8) в результаті дає

$$e_L g''(e_L)=r_L l_L u'(f(l_L)-d_L-(1+r_L)l_L) \tag{9}$$

Тепер, при $l_L=l^*$, завдання звужується до того, щоб знайти e_L, r_L, яке задовольнить

$$g'(e_L)=u(f(l^*)-d_L-(1+r_L)l^*) \tag{3'}$$

$$e_L g''(e_L)=r_L l^* u'(f(l^*)-d_L-(1+r_L)l^*) \tag{9'}$$

$$f(l^*)-d_L-(1+r_L)l^*>0 \tag{4'}$$

Запис $A\equiv f(l^*)-l^*-d_L$, (3′), (9′), (4′) відповідно, стає

$$g'(e_L)=u(A-r_L l^*) \tag{3''}$$

$$e_L g''(e_L)=r_L l^* u'(A-r_L l^*) \tag{9''}$$

$$A-r_L l^*>0 \tag{4''}$$

Зауважимо, що $A>0$, оскільки за припущенням $f(l^*)-l^*-d_L=h^*-d_L>0$. Для подальшого використання ми нижче подаємо відповідні обмеження позичальнику *H*:

$$g'(e_H)=u(f(l^*)-d_H-(1+r_H)l^*) \tag{3*}$$

$$e_H g''(e_H)=r_H l\ u'(f(l^*)-d_H-(1+r_H)l^*) \tag{9*}$$

$$f(l^*) - d_H - (1 + r_H)l^* > 0 \qquad (4^*)$$

Пропозиція 1. *Для задоволення (3″), (9″) і (4″) існує єдине рішення* $(\bar{r}_L, \bar{e}_L)$.

Доведення. Зрозуміло, що для кожного випадку $0 \le r_L \le \frac{A}{l}$, є єдина умова $e_L \in [0,1)$, яка задовольняє (3″). Таким чином, тільки (3″) визначає e_L як функцію r_L : $e_L = p(r_L)$ for $0 \le r_L \le \frac{A}{l}$. Можна легко побачити, що p – це різко зростаюча і тривала величина, коли $p(0) = g'^{-1}(u(A)) > 0$ і $p(\frac{A}{l}) = 0$.

Таким же чином тільки (9″) визначає e_L як функцію r_L : $e_L = q(r_L)$. Тоді q – різко зростаюча тривала величина, коли $q(0) = 0$ і $q(\frac{A}{l}) > 0$, оскільки $u' > 0$ збільшується $e_L g''(e_L)$ в e_L, тому що $g''' > 0$. Таким чином, отримані дані (3″), (9″) і (4″) менші, порівняно з даними (r_L, e_L), що задовольняє $e_L = p(r_L)$, $e_L = q(r_L)$, а також (4″). Розглянемо $s(r_L) \equiv p(r_L) - q(r_L)$. Тоді s є тривалою і спадаючою величиною у r_L, $s(0) = p(0) - q(0) > 0$ and $s(\frac{A}{l^*}) = p(\frac{A}{l^*}) - q(\frac{A}{l^*}) < 0$. Згідно з теоремою проміжного значення, існує єдина величина $\bar{r}_L$, така як $0 < \bar{r}_L < \frac{A}{l^*}$ і $s(\bar{r}_L) = 0$ або еквівалентна $p(\bar{r}_L) = q(\bar{r}_L)$. Припустимо, що $\bar{e}_L \equiv p(\bar{r}_L) = q(\bar{r}_L) > 0$. Тоді $(\bar{r}_L, \bar{e}_L)$ є справді єдиним вирішенням (3″) і (9″). Оскільки $0 < \bar{r}_L < \frac{A}{l^*}$, цей розв'язок також задовольнить (4″) Q.E.D.

Тепер ми можемо застосувати теорему під-гри досконалої рівноваги (SPE) для прикладу, коли $d_L < h^* \le d_H$.

Теорема 2. *Якщо* $d_L < h^* \le d_H$, *то для SPE існує єдиний результат гри, коли кредитор не пропонує угоди позичальникам H, а пропонує позичальникам L угоду* (l_L, r_L), *де* $l_L = l^*$, *і* $r_L = r_L^*$ *є єдиним рішенням рівнянь (3') і (9'); позичальники L приймають угоду;; позичальники L отримують очікувану позитивну корисність, а кредитор у другому періоді – очікуваний дохід.*

Приклад 3: $d_H < h^*$. Тоді $d_i < h^*, i = L, H$. Оскільки кредитор може обирати між двома категоріями позичальників, його завдання полягає в тому, щоб у другому періоді максимізувати очікуваний дохід від кожної категорії позичальників. Зрозуміло, що аналіз прикладу 2 переноситься на даний приклад, а отже, ми можемо вивести наступну теорему.

Теорема 3. *Якщо* $d_H < h^*$ *, то для SPE існує єдиний результат гри, коли для* $i = L,H$ *, кредитор пропонує позичальникам i угоду* (l_i, r_i) *, де* $l_i = l^*$ *і* $r_i = r_i^*$ *– єдине рішення для (3')і (9'), або (3*) і (9*) залежно від того, чи i = L або H; різні категорії позичальників, відповідно, приймають дві різні угоди; i-позичальники отримують очікувану позитивну корисність, а кредитор у другому періоді отримує очікуваний дохід.*

4. Самостійний вибір позичальників

У цьому розділі ми розглянемо ситуацію, коли кредитор не може відстежити попередні борги позичальника. Не знаючи, до якої категорії належить позичальник, найкраще, що може зробити кредитор, – це визначити, до якої категорії належить позичальник – до категорії *L* чи до категорії *H*[8]. Його стратегія полягає у виборі двох угод (l', r') і (l'', r''), які будуть одночасно запропоновані позичальникам. Стратегія позичальника: розглядаючи дві запропоновані угоди кредитора, прийняти (l', r') чи (l'', r'') або відмовитися від обох. Якщо позичальник прийме одну з двох угод, йому також буде потрібно вибрати відповідний рівень зусиль, що буде частиною його стратегії. Ми приймаємо правило «нічия», якщо позичальник однаково ставиться до запропонованих угод, тоді він вибирає ту, яка передбачає більшу суму позики. У цьому випадку позичальник сам обирає запропоновану кредитором угоду.

Ми знову по черзі розглянемо три приклади, які висвітлювались у попередньому розділі стосовно SPE за умови асиметричної інформації. Виявляється, результати прикладів 1 і 2, по суті, дають однакові результати SPE з тими, що описані в теоремах 1 і 2. Щоб пересвідчитись у цьому, розглянемо приклад 2, де $d_L < h^* \le d_H$. Хоч кредитор не може виявити реальні попередні борги позичальників, усвідомлюючи, що позичальник *H* не прийме жодної його пропозиції, питання максимізації кредитора в даній ситуації асиметричної інформації, по суті, таке ж, як і те, що розглядалось у розділі 3, за умови та-

[8] Дане припущення базується на тому, що половина населення, яке звертається за кредитами, є позичальниками *L,* а половина – позичальниками *H.*

кої ж ситуації $d_L < h^* \le d_H$. Точніше, існує єдиний результат SPE гри, коли кредитор пропонує позичальникам дві однакові угоди: (l',r') і (l'',r''), де $l' = l^*$ і $r' = r_L^*$. Спільне рішення (3'), (9') і (l'',r'') являють собою умовну кредитну угоду, задовольняючи $f(l'') - d_L - (1 + r'')l'' \le 0$, і виплати обох сторін у другому періоді такі ж, як і ті, що показано в теоремі 2.

А тому $d_H < h^*$ – цікавіша ситуація, яка може дати більше різних результатів SPE, ніж подано у теоремі 3, за умови асиметричної інформації про попередні борги позичальника. Надалі ми зосередимо увагу саме на цій ситуації.

4.1. Відсутність повністю роз'єднувальних рівноваг

Припустимо, що $d_H < h^*$. Спочатку розіб'ємо стратегічний простір кредитора $D = \{((l',r'),(l'',r''))\}$ на п'ять розділених підмножин $D = \bigcup_{j=1}^{5} D_j$, де $D_1 = \{((l',r'),(l'',r''))\,|$. Позичальник H погоджується на одну з двох запропонованих угод, а позичальник L – відмовляється від обох $D_2 = \{((l',r'),(l'',r''))\,|$. Позичальник L погоджується на одну з двох запропонованих угод, а позичальник H – на іншу, і $(l',r') \ne (l'',r'')\}$, $D_3 = \{((l',r'),(l'',r''))\,|$ Позичальник L погоджується на одну з двох запропонованих угод, а позичальник H – відмовляється від обох. $D_4 = \{((l',r'),(l'',r''))\,|$. Позичальник L відмовляється від обох запропонованих угод, і позичальник H – також відмовляється. $D_5 = \{((l',r'),(l'',r''))\,|$. Обидва позичальники погоджуються на одну і ту ж угоду.

Дефініція SPE скринінгової гри називається *повністю роз'єднувальною*, якщо стратегія кредитора вцій SPE перебуває в D_2; вона називається напівроз'єднувальною, якщо стратегія кредитора перебуває в $D_1 \cup D_3$; і якщо стратегія кредитора перебуває в D_5 , вона називається *пулингом.*

Ми показуємо, що насправді D_j порожня, а отже, це звужує площину пошуків SPE скринінгової гри.

Пропозиція 2. D_1 *порожня.*

Доведення. Припустимо, що D_1 не є порожньою. Нехай $((l',r'),(l'',r''))\in D_1$. Не порушуючи характеру універсальності, уявімо, що позичальник *H* погоджується на (l',r'). Згідно з лемою 1, це має бути ситуація, коли $f(l')-d_H-(1+r')l'>0$. Але тоді $f(l')-d_L-(1+r')l'>0$, яке, за лемою 1, передбачає, що позичальник *L* також обирає (l',r'). Отже, $((l',r'),(l'',r''))\notin D_1$ суперечить. Q.E.D.

Пропозиція 2 означає, що єдиними можливими напів-роз'єднувальними SPE є такі, стратегія кредитора яких перебуває в D_3. Далі ми показуємо, що D_2 також пусті. Для доведення використано наступну лему.

Лема 3. *Нехай* $t_i(e)\equiv eB_i-g(e), i=1,2$ *– дві дії, виражені* $0\le e<1$. *Їх відповідні максимальні величини позначимо* T_i. *Тоді отримуємо:* $B_i\in(0,\infty)$, $T_1>T_2$, *якщо і тільки за умови, якщо* $B_1>B_2$; *і, відповідно,* $T_1=T_2$, *якщо і тільки за умови, якщо* $B_1=B_2$.

Доведення. Див. додаток.

Пропозиція 3. D_2 не **порожня**.

Доведення. Припустимо, що D_2 не пуста. Нехай $((l',r'),(l'',r''))\in D_2$. Не порушуючи характеру універсальності, припустимо, що позичальник *L* приймає (l',r'), а позичальник *H* (l'',r''). З леми 1 випливає, що

$$f(l')-d_L-(1+r')l'>0 \tag{10}$$

$$f(l'')-d_H-(1+r'')l''>0 \tag{11}$$

Нехай e_L, e_H відповідно буде певним вибором зусиль позичальника *L і* позичальника *H*. Тоді

$$v_L=e_L u(f(l')-d_L-(1+r')l')-g(e_L),$$

$$v_H=e_H u(f(l'')-d_H-(1+r'')l'')-g(e_H)$$

буде очікувана корисність у другому періоді позичальника *L* і, відповідно, позичальника *H*.

А тепер розглянемо, якою буде очікувана корисність позичальника *L*, якщо замість (l',r') він би вибрав (l'',r''). Нехай його відповідним рівнем зусилля буде e_{LH}. Тоді очікувана корисність позичальника *L* у другому періоді виражається формулою

$$v_{LH} = e_{LH}u(f(l^{''}) - d_L - (1+r^{''})l^{''}) - g(e_{LH}).$$

Таким же чином, якби позичальник H мав вибрати $(l^{'},r^{'})$ замість $(l^{''},r^{''})$, його очікувана корисність у другому періоді була б

$$v_{HL} = e_{HL}u(f(l^{'}) - d_H - (1+r^{'})l^{'}) - g(e_{HL}),$$

де e_{HL} – відповідний рівень його зусиль при виборі угоди $(l^{'},r^{'})$.

Те, що позичальник L віддає перевагу угоді $(l^{'},r^{'})$, а не $(l^{''},r^{''})$, означає, що або $v_L > v_{LH}$, або $v_L = v_{LH}$ і $l^{''} < l^{'}$ (згадаймо правило «нічия» при виборі кредитної угоди), яке почергово означає, що або

$$f(l') - d_L - (1+r')l' > f(l'') - d_L - (1+r'')l'', \tag{$L1$}$$

або

$$f(l') - d_L - (1+r')l' = f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \tag{$L2$}$$

$l^{''} < l^{'}$, за (10) згідно з лемою 3, і те, що u – що функція строго зростає.

Так само, коли позичальник H віддає перевагу $(l^{''},r^{''})$, а не $(l^{'},r^{'})$, це означає, що або

$$f(l'') - d_H - (1+r'')l'' > f(l') - d_H - (1+r')l', \tag{$H1$}$$

або

$$f(l'') - d_H - (1+r'')l'' = f(l') - d_H - (1+r')l' \tag{$H2$}$$

Це ефективна вправа, щоб показати, що (L1) і (H1) разом є протиріччям, так само, як (L1) і (H2) разом, (L2) і (H1) разом, а також (L2) і (H2) разом. Даними суперечностями закінчується доведення пропозиції. Q.E.D.

Власне кажучи, нам необхідно звернутись до наступного питання з метою завершеності: яку угоду з-поміж двох різних вибере позичальник, якщо вони передбачають однаковий обсяг позики? Можна легко довести, що ставлення позичальника до цих угод *не може бути* однаковим, хоч сума кредиту однакова.

Результатом пропозиції 3 є те, що повністю роз'єднувальної рівноваги не існує, і цей висновок ми трактуємо як теорему.

Теорема 4. *Припустимо, що $d_H < h$. У грі, коли кредитор не може відстежувати наявні борги позичальника, і позичальник сам вибирає собі кредитора, повністю роз'єднувальної SPE не існує.*

4.2. Пуллінг і напівроз'єднувальна рівновага

Тепер, коли D_1 і D_2 – порожні, щоб знайти SPE, ми можемо зосередити свою увагу на $D_3 \cup D_4 \cup D_5$. Але немає такої SPE, коли стратегія позичальника взята з D_4 , тому що, згідно з теоремою 2, вона могла б бути значно кращою (тобто, у другому періоді дати позитивний дохід замість нульового), і переходимо до стратегії D_3 (D_3 не є порожньою, оскільки будь-яка контрактна пара $((l', r'), (l'', r''))$ задовольняє $f(l') - d_L - (1 + r')l' > 0$, $f(l') - d_H - (1 + r')l' \leq 0$ і $f(l'') - d_H - (1 + r'')l'' \leq 0$ є в D_3).

Отже, сфера пошуку SPE звужується до $D_3 \cup D_5$, звідки позичальник вибирає собі найкращу стратегію.

З того, що випливає, ми вивчаємо (аналізуємо) умови, за яких настає пуллінг, або напівроз'єднувальна рівновага. Для зручності нижче ми подаємо цільові функції, обмеження, проблеми оптимізації та інші величини, до яких надалі часто будемо звертатись.

Цільові функції:

$$\varphi(l, r, e_L, e_H) \equiv \frac{1}{2} e_L rl + \frac{1}{2} e_H rl,$$

$$\varphi(l, r, e_L) \equiv \frac{1}{2} e_L rl.$$

Обмеження:

$$g'(e_L) = u(f(l) - d_L - (1 + r)l) \tag{12}$$

$$g'(e_H) = u(f(l) - d_H - (1 + r)l) \tag{13}$$

$$f(l) - d_H - (1 + r)l > 0 \tag{14}$$

$$f(l) - d_H - (1 + r)l \geq 0 \tag{15}$$

$$f(l) - d_H - (1 + r)l \leq 0 \tag{16}$$

$$f(l) - d_L - (1 + r)l > 0 \tag{17}$$

$$f(l) - d_H - (1 + r)l = 0 \tag{18}$$

<u>Проблеми оптимізації:</u>

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L,e_H)$ *s.t. (12), (13) and (14),* (P1)

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L)$ *s.t. (12), (16) and (17),* (P2)

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L,e_H)$ *s.t. (12), (13) and (15),* (P3)

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L,e_H)$ *s.t. (12), (13) and (18),* (P4)

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L)$ *s.t. (12) and (18),* (P5)

Максимізувати $\varphi(l,r,e_L)$ *s.t. (12).* (P6)

<u>Величини:</u>

l^* описана в лемі 1; e_L^*, r_L^* є єдиним рішенням рівняння (3') і (9'); e_H^*, r_H^* – єдине рішення рівняння (3*) і (9*); r^{**} – єдине оптимальне рішення задачі (P1), яке подається в лемі 4.

Також ми використовуємо наступне застереження [максимізація $\Omega(x)$ s.t. (1), (2),…,(*n*)] виражає максимальну *величину* відповідної задачі максимізації, якщо існує оптимальний розв'язок цієї задачі; так само і для застереження [(*P*)] , де (*P*) – назва задачі максимізації.

Лема 4. *Припустимо, що* $d_H < h^*$. *Задача оптимізації (P1) має єдиний оптимальний розв'язок* $(l^*, r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$, *де* l^*, *як подано в лемі 2, і* r^{**} *задовольняє* $\min\{r_L^*, r_H^*\} \le r^{**} \le \max\{r_L^*, r_H^*\}$.

Доведення. Див. додаток.

За допомогою цих допоміжних обчислень тепер ми можемо дати характеристику пуллінгу та напівроз'єднувальній SME скринінг-гри (гри відбору). Повністю це подається в 5-й і 6-й теоремах. Згадаймо наші пошуки найкращої стратегії позичальника за допомогою $D_3 \cup D_5$. Також зазначимо, що, оскільки $f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0$ означає $d_H < h^*$, остання умова не є обов'язковою в теоремі 5, тоді як у теоремі 6 вона необхідна, а саме: $f(l^*) - d_L - (1+\min\{r_L^*, r_H^*\})l^* \le 0$.

Теорема 5. *Якщо* $f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0$, *то для скринінг-гри існує єдиний результат SPE – пуллінг. У SPE кредитор пропонує двом категоріям позичальників два однакові контракти* (l', r') *і* (l'', r''), *де* $(l', r') = (l^*, r^{**})$ *і* (l'', r'') *– такі як* $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \le 0$ *; обидві категорії по-*

зичальників приймають угоду (l', r'); обидві категорії позичальників отримують очікувану позитивну корисність, а кредитор – очікуваний позитивний дохід у другому періоді.

Доведення. Спочатку розглянемо, що може зробити позичальник, якщо його стратегія вибору зводиться до умов, зазначених у D_5. Оскільки в D_5, дві категорії позичальників приймають одну і ту ж угоду, кредитору немає потреби хвилюватися за іншу пропоновану ним угоду, яка не була прийнята, адже він упевнений, що жодна інша категорія позичальників не погодиться на угоду (l'', r''), тому що $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \leq 0$.

Отже, якщо $f(l) - d_H - (1+r)l > 0$ означає, що $f(l) - d_L - (1+r)l > 0$, кредитор ставить своєю метою розв'язання задачі (P1), якщо його стратегія вибору зводиться до D_5. А тепер розглянемо, що може зробити кредитор, якщо його стратегія вибору обмежується D_3. Знову ж таки, кредитор може зупинитися на угоді, яку обрав позичальник L, вибравши іншу угоду (l'', r''), щоб задовольнити $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \leq 0$, так що жодна інша категорія позичальників не обере її. Отже, важливим для кредитора є розв'язання задачі (P2), якщо стратегія його вибору обмежується D_3.

За наступної умови теореми, коли

$$f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0, \tag{19}$$

задача (P1) має єдиний оптимальний розв'язок, як описано в лемі 4, а отже, величина (P1) таки існує. Розглянемо 4-кратне $(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H)$, де $\hat{e}_H$ виражено $g'(\hat{e}_H) = u(f(l) - d_H - (1+r_L)l)$. Тоді $\hat{e}_H > 0$, згідно з (19). Це можна легко перевірити, що, за умови (19), вищевказана 4-кратна величина задовольняє (12), (13) і (14). Таким чином, ми отримуємо

$$\phi(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H) = \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* + \frac{1}{2} \hat{e}_H r_L^* l^* > \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^*,$$

а отже,

$$[(\mathrm{P1})] \geq \phi(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H) > \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* \tag{20}$$

З іншого боку, ми маємо для будь-якої величини (l, r, e_L), яка задовольняє (12), (16) і (17), що

$$\varphi(l,r,e_L) \le \text{[максимізує } \varphi(l,r,e_L) \text{ s.t. (12)]} = \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* \qquad (21)$$

Тут нерівність у (21) є результатом зменшення обмежень (16) і (17) задачі (P2). Звідси випливає з (20) і (21), що для будь-якої величини (l,r,e_L), яка задовольняє (12), (16) і (17), $\varphi(l,r,e_L) \le$ [(P1)]. Отже, найкраща стратегія кредитора – D_5 і тільки D_5, і тільки лема 4 гарантує існування і забезпечення пуллінгу SPE. Q.E.D.

Теорема 6. *Припустимо, що* $d_H < h^*$. *Якщо* $f(l^*) - d_L - (1+\min\{r_L^*, r_H^*\})l^* \le 0$, *то для скринінг-гри є єдиний SPE результат – напівроз'єднувальна рівновага. У SPE кредитор пропонує два однакові контракти* (l',r') *і* (l'',r'') *обом категоріям позичальників, де* $l' = l^*, r' = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ *і* (l'',r'') *– такі величини, коли* $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \le 0$; *позичальник L приймає угоду* (l',r'), *а позичальник H не приймає жодної; позичальник L отримує очікувану позитивну корисність, а кредитор – очікуваний позитивний дохід у другому періоді.*

Доведення. І знову розглянемо дві задачі максимізації (P1) і (P2) за умовою даної теореми

$$f(l^*) - d_L - (1+\min\{r_L^*, r_H^*\})l^* \le 0 \qquad (22)$$

Спочатку розглянемо (P1). Якби (P1) мала оптимальне рішення, то таким рішенням було б $(l^*, r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$, як подано в лемі 3. Зокрема, воно повинно задовольняти (14), тобто,

$$f(l^*) - d_H - (1+r^{**})l^* > 0 \qquad (23)$$

Але (23) є протилежним (22), оскільки $\min\{r_L^*, r_H^*\} \le r^{**}$ і $d_L < d_H$. Отже, (P1) за умови (22) не має оптимального рішення.

Тепер розглянемо (P3), яка повторює (P1), але де умову (14) замінено на (15). Оскільки (P1) не має оптимального розв'язку, умова (15) повинна бути прив'язана до оптимального розв'язку (3) . Отже, (P3) є еквівалентом (P4). Для (P4) умови (13) і (18) означають, що $e_H = 0$. Оскільки $\varphi(l,r,e_L,0) = \phi(l,r,e_L)$, ми отримуємо

$$\text{[(P3)] = [(P4)] = [максимізуємо } \phi(l,r,e_L,0) \text{ s.t. (12) і (18)] = [(P5)]} \qquad (24)$$

Через те, що, як показано вище, (P1) не має оптимального розв'язку, має бути умова, за котрої будь-які (l, r, e_L, e_H) задовольняють (12), (13) і (14),

$$\phi(l, r, e_L, e_H) < [(P3)] \tag{25}$$

Також передбачається, що (24), (25) будь-які (l, r, e_L, e_H), що задовольняють (12), (13) і (14),

$$\phi(l, r, e_L, e_H) < [(P5)] \tag{26}$$

Далі розглянемо (P2). Оптимальний розв'язок для (P6) (l^*, r_L^*) не задовольняє (17), тому що, згідно з (22), $f(l^*) - d_L - (1 + r_L^*)l^* \le 0$. Отже, (16) має бути прив'язаним до будь-якого оптимального рішення (P2). Але, оскільки (16) має прив'язок, (17) стає зайвим. Отже, (P2) є еквівалентом (P5)

Можна легко побачити, що (P5) справді має оптимальне рішення $(l^*, \tilde{r}_L, \tilde{e}_L)$, де $\tilde{r}_L = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ і $\tilde{e}_L = g'^{-1}(u(d_H - d_L))$. Це оптимальне рішення (P5) буде також і оптимальним рішенням (P2), а отже,

$$[(P5)] = [(P2)]. \tag{27}$$

У підсумку ми показали, що для будь-якої (l, r, e_L, e_H), яка задовольняє (12), (13), і (14), що $\phi(l, r, e_L, e_H) <$ [(P2)], згідно з (26) і (27). З огляду на це, ми бачимо, що за умови (22) найкращою стратегією кредитора буде в D_3 і тільки у D_3 і виражається $(l^*, \tilde{r}_L)$, як зазначено вище. Це приводить до результату напівроз'єднувального SPE, як описано в даній теоремі. Q.E.D.

5. Нормування і нав'язування кредитів

У цьому розділі ми дослідимо застосування 5 і 6 теорем для нормування кредитів.

Як уже згадувалося у вступі, для категорії 1 раціонування кредиту стає можливим за умови його змінного розміру.

Очевидно, що результат теореми 5 не має на увазі II тип кредитного нормування, тому що обидві категорії позичальників отримують кредит у розмірі l^* за відсотковою ставкою r^{**}. Виникає природне запитання, чи розмір кредиту є бажаним за вказаною відсотковою ставкою з точки зору позичальника, а якщо ні, то в якому напрямку він спотворюється.

Очікувана корисність позичальників i у другому періоді, коли прийнято кредитну угоду (l_i, r_i), виражається $E_i^{\max}$, максимальне значення

$$E_i = e_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) - g(e_i).$$

За лемою 4, $E_i^{\max}$ є зростаючою функцією $u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i)$, яка, у свою чергу, означає, що вона є зростаючою функцією $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i$, оскільки саме u збільшується у вигоді. Таким чином, найбільш бажаним розміром кредиту для i-позичальника під відсоткову ставку $r_i = r^{**}$ є той, який максимізує $f(l_i) - d_i - (1 + r^{**})l_i$. Позначимо його $\tilde{l}_i$. Тоді $\tilde{l}_i$ задовольняє умовам першого порядку $f'(\tilde{l}_i) = 1 + r^{**}$. З леми 2 випливає, що розмір кредиту l^*, що надається позичальникові, такий $f'(l^*) = 1$, з якого видно, що $\tilde{l}_i > l^*$, тому що $f'' < 0$. Таким чином, розмір кредиту, який позичальник отримує від кредитора, перевищує його найбільш очікувані розміри, і, на відміну від категорії раціонування кредиту***,*** ***нав'язування*** кредиту виникає в цій ситуації, тобто тільки коли для вибору пропонують дві угоди, і позичальник змушений прийняти ту, яка передбачає більший за оптимальний розмір кредиту за умови даної відсоткової ставки. Оскільки, за нашим припущенням про технології виробництва позичальника, рівень його зусиль не залежить від розміру вкладу, зрозуміло, що нав'язування кредиту тут виникає не тому, що більший кредит вимагає більше зусиль, а найшвидше, це пов'язано із самою природою зменшення прибутку за даної технології виробництва.

Нав'язування кредиту також відбувається з L-позичальником у теоремі 6; за відсоткової ставки $r' = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ він би хотів мати менший обсяг кредиту, ніж l^*, але змушений узяти більший. З іншого боку, позичальник H не користає від нормування кредитів ІІ-ї категорії, оскільки наявні кредити надають на неприйнятних умовах, і в результаті він відмовляється від опціону ринку. Ситуація тут у точності відповідає визначенню ІІ типу кредитного нормування: з точки зору кредитора, деякі отримують кредит, а інші – ні. Це, звичайно, є наслідком асиметричності інформації між кредитором і позичальником. Найкраще це видно при порівнянні поточної ситуації з тією, що подана в теоремі 3, де, для того ж діапазону значень параметрів (тобто, $d_H < h^*$ і $f(l^*) - d_L - (1 + \min\{r_L^*, r_H^*\})l^* \le 0$) та без інформаційної асиметрії, позичальник H отримав би кредит, який запропонував кредитор. Варто відзначити, що ситуація в теоремі 2 не являє собою випадку ІІ типу нормування, як такого (per se), хоч тут відбувається повний вихід з ринку позичальника H, проте ці два типи позичальників, з точки зору кредитора, різняться між собою.

Тут варто буде порівняти наші результати з результатами DeMeza і Webb (1992). Вони показують, що, за умови симетричної інформації та відсутності морального ризику, кредитне нормування I типу (примусу, нав'язування) може бути соціально ефективним. Для порівняння розглянемо результати нав'язування кредитів у наших умовах. Хоча цей результат не може бути соціально ефективним у першому – кращому – сенсі цього слова, проте він приводить до обмеження оптимального рівня інвестицій. Це видно з того, що, за умови прихованих боргів, обсяг кредиту є таким же, як і за умов, коли борги відстежуються (в обох випадках I^*). Цей рівень I^* може і не бути соціально ефективним рівнем інвестицій через те, що тут не можна відстежувати вибір позичальників і відповідні дії щодо морального ризику, чого немає в умовах Де Мези і Уебба. Таким чином, можна називати явища теорем 5 і 6 «ефективними» кредитами, які нав'язують, хоч термін «ефективні» потрібно тлумачити в обмеженому (тобто другому – кращому) сенсі.

Крім того, питання ефективності наших результатів і результатів DeMeza і Webb (1992) абсолютно протилежні. Вони демонструють, що розподіл кредитних ресурсів неможливий за умови монополії кредитора. Звичайно, при їх винятковому зосереджені на типі I нормування кредиту, тип II залишився поза увагою. Навпаки, наш аналіз показує, що за асиметричної інформації II тип нормування кредитів цілком можливий. Проте, якщо ми повернемося до умов асиметричності інформації (теорема 3), тоді I тип раціонування кредиту справді зникає, і взамін з'являється монополія кредитора з його нав'язуванням позики. Вони також стверджують, що в умовах кредиторської конкурентності, коли кредитори не можуть відстежити загальну заборгованість позичальників або не можуть забезпечити пріоритет правила погашення боргу, немає жодного сенсу запроваджувати кредитне нормування окремому позичальнику. Проте у нашому випадку саме ці два обмеження змушують кредитора-монополіста нормувати кредити[9].

6. Заключні зауваження

У даній роботі ми робимо перший крок у літературі, щоб дослідити гібридну модель раціонування кредиту за багатовимірної структури стимулів Для цілої низки різних значень параметрів ми повною мірою характеризуємо підгру ідеальної рівноваги у грі кредитної угоди. За певних значень параметрів для одного типу позичальників існує тип II раціонування кредитів, а для іншого – кредити, які нав'язують. Останні продемонстрували, що в обмеже-

[9] У даному питанні наші результати збігаються з результатами Longhofer (1997), який досліджував причину, через яку порушення правила абсолютного пріоритету спричиняють або загострюють необхідність раціонування кредитів.

ному сенсі вони можуть бути ефективними. Згідно зі стандартами наявної літератури з даного питання наша модель є доволі загальною, яка включає багатовимірну структуру стимулів, ендогенні ризики проекту і змінні розміри кредиту.

У подальших дослідженнях було б бажано вивчити моделі в конкурентному середовищі переважно з тими ж функціями, що й у даному. Як показує аналіз у Гейла і Гелвіга (1985) (Gale and Hellwig), різниця між монополістичними умовами і конкурентними може бути не такою сталою, як здається, оскільки йдеться про отримання оптимального контракту. Справді, за рахунок включення до обмежень відповідного завдання максимізації додаткових умов нульового прибутку кредитора, оптимальний контракт може бути отриманий таким же чином, як і у випадку монополії. Реальна проблема полягає в теоретико-ігровому формулюванні конкуренції в угодах, де існує багатовимірна інформаційна асиметрія як аномалія (наприклад, відсутність рівноваги) у Hellwig (1987). Питання ускладнюється ще й висновками Parlour і Rajan (2001), які ставлять під сумнів навіть припущення нульового прибутку на конкурентному ринку кредитів. Ми, звичайно, не очікуємо, що завдання теоретико-ігрового моделювання в таких умовах може бути легким.

Література

1. Besanko, D. and A. Thakor (1987). Collateral and rationing: Sorting equilibria in monopolistic and competitive credit markets. *International Economic Review,* 28, 671–690.
2. Bester, H. (1985a). Screening vs. rationing in credit markets with imperfect information. *American Economic Review,* 75, 850–55.
3. Bester, H. (1985b). The level of investment in credit markets with imperfect information. *Journal of Institutional and Theoretical Economics,* 141, 503–515.
4. Bester, H. and M. Hellwig (1987). Moral hazard and equilibrium credit rationing. In: *Agency Theory, Information and Incentives*, edited by G. Bamberg and K. Spremann.
5. Bisin, A. and D. Guaitoli (2004). Moral hazard and nonexclusive contracts. *RAND Journal of Economics,* 35, 306–328.
6. Bizer, D. and P. DeMarzo (1992). Sequential banking. *Journal of Political Economy,* 100, 41–61.
7. DeMeza, D. and D. Webb (1987). Too much investment: a problem of asymmetric information. *Quarterly Journal of Economics,* 102, 281–292.
8. DeMeza, D. and D. Webb (1992). Efficient credit rationing. *European Economic Review,* 36, 1277–1290.

9. Detragiache, E., P. Garella, and L. Guiso (2000). Multiple versus single banking relationships. *Journal of Finance,* 55, 1133–1161.
10. Gale, D. and M. Hellwig (1985). Incentive compatible debt contracts: The one-period problem. *Review of Economic Studies,* LII, 647-664.
11. Grinblatt, M. and C.Y. Hwang (1989). Signaling and the pricing of new issues. *Journal of Finance,* 46, 393–420.
12. Hellmann, T. and J. Stiglitz (2000). Credit and equity rationing in markets with adverse selection. *European Economic Review,* 44, 281–304.
13. Hellwig, M. (1987). Some recent developments in the theory of competition in markets with adverse selection. *European Economic Review,* 31, 319–325.
14. Iwasaki, K. (2004, Summer). China's budding credit card market. *Japan Research Quarterly*.
15. Keeton, W. (1979). *Equilibrium Credit Rationing*, Garland Publishing Co.
16. Kletzer, K. (1984). Asymmetries of information and LCD borrowing with sovereign risk. *Economic Journal,* 94, 287–307
17. Li, Yang et al (2005, November). *Dianzi zhifu yu zhongguo jingji.* [Electronic Payments and Chinese Economy], report published by the Institute of Banking and Finance, Chinese Academy of Social Sciences.
18. Longhofer, S. (1997). Absolute priority rule violations, credit rationing, and efficiency. *Journal of Financial Intermediation,* 6, 249–267.
19. Longhofer, S. and C. Carlstrom (1995). Absolute priority rule violations in bankruptcy. Federal Reserve Bank of Cleveland, *Economic Review,* 31, 21–30.
20. Milde, H. and J. Riley (1988). Signaling in credit markets. *Quarterly Journal of Economics,* 103, 101–129.
21. Pagano, M. and T. Jappelli (1993). Information sharing in credit markets. *Journal of Finance,* 48, 1693–1718.
22. Park, I.U. (2004). Moral hazard contracting and private credit markets. *Econometrica,* 72, 701–746.
23. Parlour, C. and U. Rajan (2001). Competition in loan contracts. *American Economic Review,* 91, 1311–1328.
24. Petersen, M. and R. Rajan (1994). The benefits of lending relationships: evidence from small business data. *Journal of Finance,* 49, 3–37.
25. Petersen, M. and R. Rajan (1995). The effect of credit market competition on lending relationships. *Quarterly Journal of Economics,* 110, 407–444.
26. Stiglitz, J. and A. Weiss (1981). Credit rationing in markets with imperfect information. *American Economic Review,* 71, 393–409.

27. Townsend, R. (1979). Optimal contracts and competitive markets with costly state verification. *Journal of Economic Theory,* 21, 265–293.

28. Wette, H. (1983). Collateral in credit rationing in markets with imperfect information: Note. *American Economic Review,* 73, 442–445.

29. Williamson, S. (1986). Costly monitoring, financial intermediation, and equilibrium credit rationing. *Journal of Monetary Economics,* 18, 159–179.

30. Williamson, S. (1987). Costly monitoring, loan contracts, and equilibrium credit rationing. *Quarterly Journal of Economics,* 102, 135–145.

Додаток

Доведення леми 1

Для зручності достатньо показати, що очікувана максимальна корисність позичальника від отримання кредитної угоди (l_i, r_i) буде абсолютно позитивною, якщо $f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i > 0$.

Якщо позичальник приймає угоду (l_i, r_i) і вибирає рівень зусиль e_i, то його очікувана корисність за обмеженої відповідальності виражається

$$E_i = E[u(\max\{f(l_i)Z(e_i) - d_i - (1+r_i)l_i, 0\}) - g(e_i) \mid e_i]$$
$$= e_i \cdot u(\max\{f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i, 0\}) - g(e_i).$$

Якщо $f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i > 0$, то $E_i = e_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i) - g(e_i)$, і E_i досягає максимуму при розв'язанні $\hat{e}_i$ в рівнянні

$$g'(e_i) = u(f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i) \tag{A1}$$

за максимального значення величини

$$E_i^{\max} = \hat{e}_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i) - g(\hat{e}_i) \tag{A2}$$

Залишається показати: (i) розв'язок для (A1) існує, і він єдиний, а (ii) $E_i^{\max} > 0$.

Згадаймо властивості g: $g(0) = 0, g(1) = \infty, g'(0) = 0$, і $g'' > 0$. Звідси випливає, що g' різко збільшується і $g'(e) > 0$, оскільки $0 < e < 1$. Ми показуємо, що g' – необмежена величина. Припустимо, що, навпаки, $g' \leq M$ при

$M > 0$. Тоді, за теоремою Лагранжа, для будь-якої величини $0 < e < 1$ існує $\hat{e}$ для $0 < \hat{e} < e$, так що $g(e) = g(e) - g(0) = g'(\hat{e}) \cdot (e - 0) = g'(\hat{e}) \cdot e.$ Але тоді ми отримуємо $g(e) = g'(\hat{e}) \cdot e \le M \cdot 1 = M$ для будь-якої величини $0 < e < 1$, яка суперечить припущенню, що $g(1) = \infty$.

Проте g' – різко зростаюча і необмежена величина, а це передбачає, що (A1) має єдине рішення $\hat{e}_i > 0$ за теоремою кінцевих збільшень, безперервність g', припущення, що $g'(0) = 0$, і факт, що $u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) > 0$ (що випливає з властивостей *u*). Це доводить (I).

Щоб довести (II), знову застосовуємо теорему кінцевих збільшень. За цією теоремою, $\tilde{e}$ існує при $0 < \tilde{e} < \hat{e}_i$, так що $g(\hat{e}_i) = g(\hat{e}_i) - g(0) = g'(\tilde{e}) \cdot (\hat{e}_i - 0) = g'(\tilde{e}) \cdot \hat{e}_i$, коли його підставити в (A2), дасть

$$E_i^{\max} = \hat{e}_i \cdot (u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) - g'(\hat{e})) = \tilde{e} \cdot (g'(\hat{e}_i) - g'(\tilde{e})) > 0,$$

використовуючи (A1) і оскільки $\hat{e}_i > 0$, $\tilde{e} < \hat{e}_i$, і g' різко зростає. Це доводить (ii).

За необхідності зазначимо, що, коли $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i \le 0$, то $E_i = -g(e_i)$, максимум E_i досягається при $e_i = 0$, коли максимальна величина становить 0. Отже, доведення завершено. Q.E.D.

<u>Доведення леми 3</u>

Максимум T_i для $t_i(e) \equiv eB_i - g(e)$ досягається при e_i – єдиним розв'язком рівняння є $t_i'(e) = B_i - g'(e) = 0$, $i = 1{,}2$. Якщо $B_1 > B_2$, то з $g'' > 0$ випливає, що $e_1 > e_2$. За теоремою кінцевих збільшень (теоремою Лагранжа), існує $\tilde{e}$, при $e_1 > \tilde{e} > e_2$, так що

$$g(e_1) - g(e_2) = g'(\tilde{e})(e_1 - e_2),$$

яке разом з $B_1 = g'(e_1)$ і тим фактом, що $g'' > 0$, передбачають

$$e_1B_1 - e_2B_2 > B_1(e_1 - e_2) > g'(\tilde{e})(e_1 - e_2) = g(e_1) - g(e_2),$$

або

$$e_1B_1 - g(e_1) > e_2B_2 - g(e_2).$$

Отже, ми показали, що коли $B_1 > B_2$, то $T_1 > T_2$, звідки випливають висновки леми Q.E.D.

Доведення леми 4

Тут ми ще раз звернемося до завдання максимізації (P1):

Максимізуємо $\phi(l,r,e_L,e_H) \equiv \frac{1}{2}e_L rl + \frac{1}{2}e_H rl$

s.t.

$$g'(e_L) = u(f(l) - d_L - (1+r)l) \quad (12)$$

$$g'(e_H) = u(f(l) - d_H - (1+r)l) \quad (13)$$

$$f(l) - d_H - (1+r)l > 0 \quad (14)$$

Ми з цим завданням упорались, якщо можемо показати поточне (теперішнє) завдання максимізації лише за умови обмежень типу рівностей (тобто, коли не береться до уваги обмеження (14) з єдиним оптимальним рішенням, яке також задовольняє обмеження типу нерівностей (14).

Множники Лагранжа, пов'язані з обмеженнями, (12) і (13) позначимо через λ_1 і відповідно λ_2. Тоді умовами задачі оптимізації є

$$\frac{1}{2}(e_L + e_H)l - \lambda_1 l \cdot u'(f(l) - d_L - (1+r)l) - \lambda_2 l \cdot u'(f(l) - d_H - (1+r)l) = 0 \quad (A3)$$

$$\frac{1}{2}(e_L + e_H)r - \lambda_1((1+r) - f'(l)) \cdot u'(f(l) - d_L - (1+r)l) \quad (A4)$$

$$- \lambda_2((1+r) - f'(l)) \cdot u'(f(l) - d_H - (1+r)l) = 0,$$

$$\frac{1}{2}rl - \lambda_1 g''(e_L) = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{1}{2}rl - \lambda_2 g''(e_H) = 0 \quad (A6)$$

разом з обмеженнями (12) і (13).

З (A3) та (A4) ми отримаємо $f'(l) = 1$, яке, за лемою 2, має єдине рішення $l = l^*$. Підставляємо його в (A3) й отримуємо

$$\frac{1}{2}(e_L + e_H) - \lambda_1 \cdot u'(f(l^*) - d_L - (1+r)l^*) - \lambda_2 \cdot u'(f(l^*) - d_H - (1+r)l^*) = 0 \quad (A7)$$

У доведенні пропозиції 1 ми показали, що коли $l = l^*$ (12) , це є єдиною умовою, коли e_L виражає спадаючу функцію r :

$$e_L = p_1(r) \tag{A8}$$

Так само, коли $l = l$ (13) – єдина умова, коли e_H виражає спадаючу функцію r :

$$e_H = p_2(r) \tag{A9}$$

Тепер (A7), (A8) і (A9) разом з (A5) й (A6) (коли $l = l^*$) дають

$$(e_L + e_H) - rl^*[\frac{1}{g''(e_L)} u'(f(l^*) - d_L - (1+r)l^*) \tag{A10}$$

$$+ \frac{1}{g''(e_H)} u'(f(l^*) - d_H - (1+r)l^*)] = 0$$

Далі ми показуємо, що система рівнянь (A8), (A9) і (A10) має єдине рішення $(r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$.

Для цього підставляємо (A8), (A9) в (A10) і отримуємо (A11)

$$p(r) \equiv p_1(r) + p_2(r) = rl^*[\frac{1}{g''(p_1(r))} u'(f(l^*) - d_L - (1+r)l^*) \tag{A11}$$

$$+ \frac{1}{g''(p_2(r))} u'(f(l^*) - d_H - (1+r)l^*)] \equiv q(r)$$

Тоді властивості g'', u', p_1 і p_2 , показують , що q – зростаюча функція (дія) r , а p – його спадаюча.

Згадаймо величини r_L^* і r_H^*, а також, відповідні e_L^* та e_H^*, визначені в розділі 4.

Не порушуючи спільності, припустимо, що $r_L^* < r_H^*$. Також пригадаймо два рівняння з розділу 3.

$$e_L g''(e_L) = r_L l_L u'(f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L) \tag{9}$$

$$e_H g''(e_H) = r_H l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_H)l^*) \tag{9*}$$

На основі аналізу розділу 3 ми отримаємо, що

$$p_1(r_L^*) = r_L^* l^* [\frac{1}{g''(p_1(r_L^*))} u'(f(l^*) - d_L - (1+r_L^*)l^*)] \tag{A12}$$

і на основі властивостей g'', u' і p_2, також, що

$$p_2(r_L^*)g''(p_2(r_L^*)) > p_2(r_H^*)g''(p_2(r_H^*)) = r_H^* l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_H^*)l^*) \quad \text{(A13)}$$
$$> r_L^* l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_L^*)l^*)$$

або еквівалентно, що

$$p_2(r_L^*) > r_L^* l^* [\frac{1}{g''(p_2(r_L^*))} u'(f(l^*) - d_H - (1+r_L^*)l^*)] \quad \text{(A14)}$$

З (A12) і (A14) зрозуміло, що (cf. (A11)) (A15)

$$p(r_L^*) > q(r_L^*) \quad \text{(A15)}$$

Таким же способом можна показати

$$p(r_H^*) > q(r_H^*) \quad \text{(A16)}$$

З (A15) та (A16) за допомогою теореми кінцевого збільшення і того факту, що q – це зростаюча функція r, а p – його спадаюча функція, ми бачимо, що r^{**} – це єдине рішення рівняння (A11). Отже, визначаючи $e_L^{**} = p_1(r^{**})$ і $e_H^{**} = p_2(r^{**})$, ми знаходимо єдине рішення системи рівнянь (A8), (A9) і (A10). Ясно, що $r_L^* \le r^{**} \le r_H^*$. Нарешті, оскільки ясно, що $e_H^{**} > e_H^* > 0$, з властивостей g' і u, що єдине оптимальне рішення задачі з обмеженнями типу рівностей (при $l = l^*$) також задовольняє (14). Q.E.D.

Стаття надійшла до редакції 26 червня 2013 р.