

Квантовые свойства Блоховской точки – наноразмерного солитона в ферромагнетиках

М.Ю. Барабаш*

Технический центр НАН Украины, ул. Покровская, 13, 04070 Киев, Украина

(Получено 10.05.2014; опубликовано online 29.11.2014)

Установлено, что в субгелиевой области температур магнитный солитон – Блоховская точка обладает квантовыми свойствами, которые проявляются в эффектах туннелирования и надбарьерного отражения. Определены условия протекания данных явлений.

Ключевые слова: Квантовое туннелирование, Блоховская точка, Доменная граница, Вертикальная Блоховская линия, Ферромагнитные материалы, Потенциальный барьер, Солитон, Квантовый депиннинг, Надбарьерное отражение.

PACS numbers: 03.65. – w; 75.75. + a

1. ВВЕДЕНИЕ

Мезоскопические системы, реализуемые в одноосных ферромагнетиках с сильной одноосной магнитной анизотропией, являются предметом пристального изучения (см. например [1, 2] и приведенную там библиографию). Среди этих систем выделяют доменные границы (ДГ) и элементы ее внутренней структуры: вертикальные Блоховские линии (ВБЛ) и Блоховские точки (БТ) [3]. Вертикальные Блоховские линии и БТ являются стабильными локальными неоднородностями ДГ с характерным размером $\sim 10^2$ нм и рассматриваются в качестве элементной базы в запоминающих устройствах на магнитной основе [4]. Кроме того, структуры, подобные ВБЛ и БТ имеют место в ферромагнитных нанопроволоках и нанополосах [5-8], материалах перспективных для применения в спинтронике.

Следует отметить, что с математической точки зрения ДГ, ВБЛ и БТ представляют собой нелинейные волновые образования – солитоны, обладающие определенной топологией. В итоге, состояние данных структур характеризуется т. н. топологическим зарядом (хиральность) [3], определяющим разворот вектора намагниченности \vec{M} в центре системы. Очевидно, что в силу своей природы этот параметр является вырожденным. Однако в области низких температур ($T < 1$ К) посредством подбарьерного квантового туннелирования возможно снятие вырождения по направлениям вектора \vec{M} . Квантовые флуктуации такого типа в ДГ различных ферро – и антиферромагнитных материалах рассматривались в работах [9-12]. Туннелирование топологического заряда ВБЛ в сверхтонкой магнитной пленке исследовано в статье [13].

Заметим, что в субгелиевом диапазоне температур имеет место квантовый депиннинг ДГ и ВБЛ [14, 15]. В то же время аспекты, обусловленные процессами нуклеации точечного солитона – БТ [16-18], определенно указывают на наличие квантовых свойств и у этого элемента внутренней структуры ДГ. Исследование данного вопроса для БТ в ДГ ферромагнетиков с фактором качества материала (отношение энергии магнитной анизотропии к магнито-статической) $Q \gg 1$ и является целью нашей работы.

Нами будут изучены квантовые эффекты, обусловленные взаимодействием БТ с дефектом: квантовое туннелирование и надбарьерное отражение. Мы установим также условия реализации этих явлений.

2. КВАНТОВОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ БЛОХОВСКОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим доменную границу, элементами внутренней структуры которой являются ВБЛ и Блоховская точка, разделяющая Блоховскую линию на два участка с различными знаками топологического заряда. Введем декартову систему координат с началом в центре БТ, ось OZ направим вдоль оси анизотропии, OY – нормально плоскости ДГ. Исходя из уравнений Слончевского [3], можно показать, что в области доменной границы $\Delta < r \leq \Lambda$, где Δ – ширина ДГ, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\Lambda = \Delta\sqrt{Q}$ – характерный размер ВБЛ, происходит искажение магнитной структуры последней БТ, которому соответствует следующее "вихревое решение" [19].

$$\operatorname{tg} \varphi = z/x, \quad (1)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(M_y / M_x)$, $M_{x,y}$ – компоненты вектора \vec{M} . В то же время, распределение намагниченности вдоль оси OY имеет Блоховский вид: $\sin \theta = ch^{-1}(y / \Delta)$, где θ – полярный угол в выбранной системе координат.

Отметим, что указанную выше область, полагают характерным масштабом БТ, т. к. именно данный участок ДГ обуславливает основной вклад в $m_{BT} = \Delta / \gamma^2$ (γ – гиромагнитное отношение) – эффективную массу БТ [19].

Учитывая (1), и полагая автомодельным характер движения БТ вдоль ДГ ($\varphi = \varphi(z - z_0, x)$, z_0 , – координата центра БТ), после ряда преобразований, энергию взаимодействия Блоховской точки W_H с внешним магнитным полем $\vec{H}_y = -H\vec{e}_y$ можно записать следующим образом.

$$W_H = -M_S \pi \Delta z_0 H \int_{\Delta < r \leq \Lambda} dx dz \left(\cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Bigg|_{z_0=0} \approx \approx -M_S \pi^2 \Delta \Lambda z_0 H \quad (2)$$

* bashik_77@ukr.net

где M_S – намагниченность насыщения материала.

Для описания динамического поведения БТ в поле дефекта H_d используем Лагранжев формализм. Тогда, исходя из (2), “потенциальную энергию” $W(z_0)$ в функции Лагранжа $\mathcal{L} = m_{BP} \dot{z}_0^2/2 - W(z_0)$ представим в виде

$$W(z_0) = -M_S^2 \pi^2 \Lambda \int_0^{z_0} dz' (H - H_d(z')). \quad (3)$$

Раскладывая далее $H_d(z_0)$ в ряд вблизи положения дефекта, поле последнего можно записать:

$$H_d(z_0) = H_c \left(1 - (z_0 - d)^2 / 2D^2\right), \quad (4)$$

где H_c – коэрцитивная сила дефекта, d – координата его центра, $D^{-2} = \frac{1}{H_c} \left. \frac{\partial^2 H_d}{\partial z_0^2} \right|_{z_0=d}$, D – ширина барьера.

Естественно предположить, что характерное изменение поля дефекта определяется размерным фактором взаимодействующей с ним магнитной неоднородности. В нашем случае $\partial^2 H_d / \partial z_0^2 \sim H_c / \Lambda^2$, и, следовательно, $D \sim \Lambda$. Отметим, что указанное выше положение о поле дефекта коррелирует и с результатами работы [20], которые свидетельствуют о зависимости H_c от характерного размера ДГ, ВБЛ или БТ.

Подставляя далее (4) в (3) и учитывая, что в точке $z_0 = 0$ потенциал W имеет локальный метастабильный минимум (см. рис. 1), получаем следующее выражение

$$W(z_0) = \frac{\pi^2 Q^{-1/2} M_S H_c}{2} \left(-\frac{z_0^3}{3} + dz_0^2 \right), \quad (5)$$

где $d = \Lambda \sqrt{2\varepsilon}$, $\varepsilon = 1 - H / H_c \ll 1$ (рассматриваем величины магнитных полей H вблизи H_c , что значительно снижает высоту потенциального барьера).

При этом потенциал $W(z_0)$ удовлетворяет условию нормировки $W(z_{0,1}, z_{0,2}) = 0$, где $z_{0,1} = 0$ и $z_{0,2} = 3\Lambda \sqrt{2\varepsilon}$ – координаты барьера. Следует также отметить, что выражение (5) соответствует модельному потенциалу,

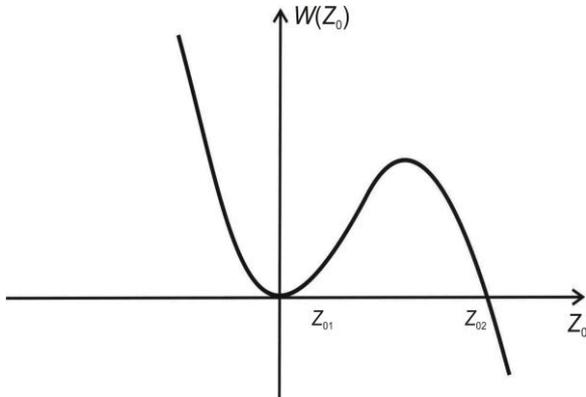


Рис. 1 – Потенциал взаимодействия $W(z_0)$ блоховской точки с внешним магнитным полем H и полем дефекта H_d

использованному в работах [14, 15], при исследовании квантового депиннинга ДГ и ВБЛ.

Следуя формализму ВКБ приближения, амплитуду туннелирования Блоховской точки P определяем по формуле

$$P \sim \exp(-B),$$

где $B = \frac{2}{\hbar} \int_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} |zm_{BP}| dz$, \hbar – постоянная Планка.

После вариации функции Лагранжа \mathcal{L} и интегрирования, полученного дифференциального уравнения с граничным условием в точке $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$, что соответствует пиннингу БТ на дефекте в отсутствие поля \vec{H}_x , определяем импульс БТ и соответственно, экспоненту туннелирования

$$B = \frac{2}{\hbar} \int_{z_{0,1}}^{z_{0,2}} \sqrt{2m_{BP}W(z)} dz. \quad (6)$$

Учитывая (5), выражение (6), можно переписать следующим образом

$$B = \frac{8\Delta^3 Q h_c^{1/2} \varepsilon^{5/4}}{\hbar \omega_M} (4\pi M_S)^2, \quad (7)$$

где $h_c = H_c / 8M_S$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_S$.

Температура T_{cr} , при которой актуален квантовый режим движения БТ, следует из соотношения $T_{cr} = W_{max} / k_B B$, где W_{max} максимальное значение потенциального барьера k_B – постоянная Больцмана. Тогда, в соответствии с (5), (7) получаем

$$T_{cr} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}^{1/4} h_c^{1/2} \hbar \omega_M}{12k_B}. \quad (8)$$

Подставляя в выражения (7), (8) параметры, соответствующие одноосным магнитным пленкам $Q \sim 5-10$, $\Delta \sim 10^{-6}$ см, $4\pi M_S \sim (10^2-10^3)$ Gs, $H_c \sim (10-10^2)$ Oe [20], $\gamma \sim 10^7$ Oe $^{-1}$ s $^{-1}$, для $\varepsilon \sim 10^{-4}-10^{-2}$ получаем $B \approx 1-30$ и $T_{cr} \sim (10^{-3}-10^{-2})$ К.

Полученная оценка $B \leq 30$ согласуется с соответствующими величинами экспоненты туннелирования для магнитных наноструктур [21], которые указывают на возможность осуществления данного квантового эффекта. При этом, как видно из определения эффективной массы БТ, в отличие от туннелирования через дефект ДГ и ВБЛ, процесс туннелирования БТ осуществляется посредством “переноса” через потенциальный барьер сразу всей ее эффективной массы. Данная особенность является следствием размерного фактора квазичастиц. Так, характерный размер БТ $\sim \Lambda^3$. В то же время характерные масштабы ДГ и БЛ – $\Delta L_y \hbar$ (L_y – длина пленки вдоль оси OY, \hbar – толщина пленки) и $\Lambda \hbar$ соответственно. Понятно, что в таком случае преодоление потенциального барьера ДГ или ВБЛ требует последовательных квантовых перемещений малых участков площади (для ДГ) или длины (ВБЛ) данных нанобъектов.

После интегрирования уравнения движения БТ, получаемого посредством вариации функции Ла-

гранжа, находим инстантонные траектории z_{BP} и частоту ω Блоховской точки, которые характеризуют ее движение в пространстве с “мнимым” временем ($\tau = it$): от точки $z_1 = 0$ при $\tau = -\infty$ к точке $z_2 = 3\Lambda\sqrt{2\varepsilon}$ при $\tau = 0$; и обратно к точке z_1 при $\tau = +\infty$

$$\begin{aligned} z_{BP} &= 3\Lambda\sqrt{2\varepsilon}/ch^2(\omega_m\tau), \\ \omega_0 &= \omega_M h_c^{1/2} (2\varepsilon)^{1/4} / 2 \end{aligned} \quad (9)$$

Определив инстантонную частоту БТ, рассмотрим вопрос о корректности использования ВКБ формализма. Как известно, согласно [22], условием применимости ВКБ метода является выполнение следующего неравенства

$$m\hbar|F|/p^3 \ll 1, \quad (10)$$

где p – импульс, m – масса квазичастицы, F , действующая на нее сила.

Очевидно, что в нашем случае $F = m_{BP}\omega_0^2\xi$, $p = m_{BP}\omega_0\xi$, $\xi \sim \Lambda\sqrt{2\varepsilon}$. Учитывая (9), формулу (10) можно переписать в виде

$$\hbar\gamma^2\omega_M^{-1}h_c^{-1/2}(2\varepsilon)^{-5/4}Q^{-1}/\Lambda^3 \ll 1. \quad (11)$$

Подставляя в (11), приведенные выше параметры (см. оценку выражений (7), (8)), нетрудно убедиться в выполнении данного соотношения, что в свою очередь указывает на правомерность применения квазиклассического приближения к рассматриваемой проблеме.

Оценим теперь влияние диссипации на процесс туннелирования БТ. Для этого сравним силу F , действующую на квазичастицу с силой торможения F_r , которая в нашем случае $\sim \alpha\omega_M\omega_0\Lambda\sqrt{2\varepsilon}m_{BP}$, где $\alpha \sim 10^{-3}\cdot 10^{-2}$ – параметр затухания намагниченности. Тогда, учитывая явный вид F , находим

$$F_r/F = 2\alpha/h_c^{1/2}(2\varepsilon)^{1/4}.$$

Анализ данного выражения показывает, что $F_r/F \ll 1$, при $10^{-2} \leq h_c \leq 10^{-1}$, $\varepsilon \sim 10^{-4}\cdot 10^{-2}$. Полученный результат указывает, что, при рассмотрении процесса квантового туннелирования БТ влиянием силы торможения в данных материалах можно пренебречь.

Заметим, что природа силы F_r исследовалась в работе [23], и обусловлена учетом слагаемых обменной природы в уравнении Ландау – Лифшица для намагниченности ферромагнетика [24].

3. НАДБАРЬЕРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ БЛОХОВСКОЙ ТОЧКИ

В предыдущем разделе нами было установлено, что квантовый депиннинг БТ, в отличие от ДГ и ВБЛ, осуществляется посредством подбарьерного перехода сразу всей эффективной массы квазичастицы. Данный результат указывает, что наличие метастабильного минимума в потенциале взаимодействия БТ с дефектом не является необходимым. По-

следнее означает, что существует принципиальная возможность реализации квантового эффекта надбарьерного отражения БТ. При этом скорость, с которой БТ “падает” на барьер, может быть обусловлена импульсом магнитного поля, приложенного к БТ. Очевидно, что эффект наиболее заметен, в случае когда энергия БТ не намного превышает высоту потенциального барьера U_0 .

Исходя из формулы (2) запишем уравнение динамики БТ в импульсном магнитном поле $H_y(t) = H_0\chi(1 - t/T)$ в форме

$$m_{BP} \partial v / \partial t + F_r = \pi^2 \Lambda \Delta M_S H_y(t), \quad (12)$$

где $v = \partial z / \partial t$ – скорость БТ, $\chi(1 - t/T)$ – функция Хевисайда, H_0 – амплитуда, T – длительность импульса.

Интегрируя уравнение (12) при $T \leq t \ll \alpha^{-1}\omega_M^{-1}$, находим скорость БТ по окончании действия импульса: $v(t) = \pi^2 M_S \Lambda \Delta H_0 T / m_{BP}$. Соответственно, E_{BP} – энергия БТ в актуальном временном интервале имеет вид

$$E_{BP} = m_{BP}v^2/2 = \pi^2\omega_M^2T^2\Lambda^2\Delta H_0^2/32. \quad (13)$$

Заметим, что исследование, проводимое для времени $t \ll \alpha^{-1}\omega_M^{-1}$ (или с учетом величины затухания намагниченности $\omega_M t \ll (10^2\cdot 10^3)$, позволяет нам пренебречь влиянием на процесс силы торможения F_r , которая в данном случае $\sim \alpha\omega_M m_{BP}v$.

Полагая, что дефект расположен в точке $z_0 = 0$, по аналогии с [25], запишем его потенциал U_d в виде

$$U_d(z_0) = U_0 ch^{-2}(z_0/\Lambda), \quad (14)$$

где в соответствии с (2) $U_0 = \pi^2\Lambda^2\Delta M_S H_0$.

Такой вид потенциала является не только общим, но и согласуется с подходом, выраженным формулами (3)-(5). Действительно, дополнив (14) слагаемым $W_H = -M_S^2\pi^2\Lambda\Delta z_0 H$, после разложения в ряд итогового выражения в точке $\tilde{z}_0 = \Lambda Ar \sinh(1/\sqrt{2})$, точке перегиба функции $ch^{-2}(z_0/\Lambda)$, и нормировки потенциала (в системе координат с центром в \tilde{z}_0), получаем (5). Понятно, что именно при $z_0 = \tilde{z}_0$ поле дефекта максимально. Поэтому, если квазичастица преодолевает барьер в данной точке, то для нее имеет место процесс туннелирования и в целом. На этом факте, по сути, и было основано рассмотрение квантового депиннинга ДГ и ВБЛ в работах [14, 15]. В нашем же случае актуальна асимптотика потенциала вблизи его максимального значения.

В рамках ВКБ приближения, используя формализм, предложенный в [26], определяем коэффициент надбарьерного отражения Блоховской точки R по формуле

$$R = e^{-\beta}, \quad (15)$$

где $\beta = -\frac{2}{\hbar} \text{Im} \int_{z_{0,1}^*}^{z_{0,2}^*} dz \sqrt{2m_{BP}(E_{BP} - U_d(z))}$, $z_{0,1}^*$, $z_{0,2}^*$ – корни уравнения $E_{BP} - U_d(z_0) = 0$.

Раскладывая в ряд выражение (14), с учетом (15), находим

$$\beta = \pi \sqrt{2m_{BP}} E_{BP} \Delta \varepsilon' / \hbar \sqrt{U_0}, \quad (16)$$

где параметр $\varepsilon' = (E_{BP} - U_0) / E_{BP} \ll 1$ (напомним, что мы рассматриваем случай близких значений E_{BP} и U_0).

Используя (13), формулу (16) можно переписать в виде

$$\beta = \pi (2M_S H_c)^{1/2} \varepsilon' \gamma^{-1} \Delta^3 Q^{1/2} / \hbar. \quad (17)$$

Подставляя в выражения (15), (17) соответствующие численные параметры, при $\varepsilon' \geq 5 \cdot 10^{-5}$ получаем $R \leq 0,1$, что согласуется с критерием применимости формулы (15) (см. в [22, 26]).

Заметим, что из выражений (15), (17) следует, что $R \rightarrow 0$ при $U_0 \rightarrow 0$, т. е. получаем физически согласованный вывод об исчезновении эффекта надбарьерного отражения квазичастицы в отсутствие потенциального барьера.

Исходя из соотношения $\tau \sim \Delta (m_{BP}/U_0)^{1/2} = 4(M_S/H_c)^{1/2} Q^{-1/2} \omega_M^{-1}$ и приведенных выше параметров, определяем τ – характерное время взаимодействия БТ с дефектом: $0,6 \leq \omega_M \tau \leq 2,3$. Нетрудно видеть, что τ удовлетворяет соотношению $\omega_M \tau < \omega_M t \sim 10 \cdot 10^2$, которое в совокупности с оценкой для R указывает на принципиальную возможность осуществления рассматриваемого квантового эффекта.

Исследуем теперь вопрос о корректности применимости ВКБ формализма. Поскольку в нашем случае $E_{BP} \approx U_0$, то условия квазиклассичности БТ и потенциального барьера совпадают и в соответствии с [22,] сводятся к выполнению следующего неравенства

$$\delta z_0 \sqrt{m_{BP} U_0} / \hbar \gg 1, \quad (18)$$

где $\delta z_0 = \Delta \sqrt{2(E_{BP} - U_0)} / U_0 \approx \Delta \sqrt{2\varepsilon'}$.

Учитывая явный вид U_0 , условие (18) можно переписать в виде

$$\pi \gamma^{-1} \Delta^3 (M_S H_c)^{1/2} Q^{1/2} (\varepsilon')^{1/2} \gg \hbar.$$

Оценка данного выражения показывает его выполнение при $\varepsilon' \geq 10^{-4}$, что фактически является

оценкой снизу для этого параметра.

Критическая температура T'_{cr} , соответствующая исследуемому эффекту, может быть определена из простых качественных соображений. Действительно, процесс надбарьерного отражения БТ эквивалентен колебанию квазичастицы с частотой $\nu = 2\Delta^{-1} \sqrt{U_0} / \sqrt{m_{BP}}$ вдоль мнимой оси iz между точками $z_{0,1,2}^* = \pm i \Delta \sqrt{\varepsilon}$. Поскольку движение БТ происходит в отсутствие внешних полей, то имеем один невозбужденный квантовый уровень ($n = 0$). В таком случае энергия Блоховской точки E_{BP} не меняется и равна $\hbar \nu / 2\pi$. Приравнявая далее E_{BP} к соотношению $k_B T'_{cr}$ (k_B – постоянная Больцмана), находим

$$T'_{cr} = \frac{\hbar U_0^{1/2}}{\pi k_B \sqrt{2m_{BP} \Delta}} = \frac{\hbar \gamma}{\sqrt{2} k_B} (M_S H_c)^{1/2}. \quad (19)$$

Оценка выражения (19) показывает, что $T'_{cr} \sim (10^{-3} - 10^{-2})$ К. Такие значения T'_{cr} находятся в одном интервале с критическими температурами квантового депиннинга ДГ и элементов ее внутренней структуры – ВБЛ и БТ. Данный факт указывает на важность учета квантовых свойств БТ при изучении низкотемпературной динамики ДГ со сложной внутренней структуры в ферромагнитных материалах. При этом, поскольку туннелирование БТ и ее надбарьерное отражение происходит в различных магнитных полях, то существует практическая возможность раздельного изучения этих эффектов.

4. ВЫВОДЫ

Установлено, что Блоховская точка (магнитный солитон) в одноосных ферромагнетиках в субгелиевом диапазоне температур обладает квантовыми свойствами. Показана принципиальная возможность квантового депиннинга и надбарьерного отражения Блоховской точки от потенциала дефекта.

Экспериментальная реализация рассмотренных эффектов может служить основой для разработки новых прецизионных методик диагностики внутренней структуры доменных границ в ферромагнитных материалах.

Quantum Properties of Bloch Point as Nanosized Soliton in Ferromagnetics

M.Yu. Barabash

Technical Centre, 13, Pokrovskaja Str., 04070 Kiev, Ukraine

It is established that magnetic soliton – Bloch point – has quantum properties which are manifested in the effects of tunneling and above-barrier reflection in a subhelium temperature range. The conditions of the given phenomena are determined.

Keywords: Quantum tunneling, Bloch point, Domain boundary, Vertical Bloch line, Ferromagnetic materials, Potential barrier, Soliton, Quantum depinning, Above-barrier reflection.

Квантові властивості Блохівської точки – нанорозмірного солітону в ферромагнетиках

М.Ю. Барабаш

Технічний центр НАН України, вул. Покровська, 13, 04070 Київ, Україна

Показано, що в субгелієвій області температур магнітний солітон – Блохівська точка має квантові властивості, які виражаються у тунелюванні та надбар'єрному відбитті. Визначені умови протікання даних явищ.

Ключові слова: Квантове тунелювання, Блохівська точка, Доменна границя, Вертикальна Блохівська лінія, Ферромагнітні матеріали, Потенціальний бар'єр, Солітон, Квантовий депіннінг, Надбар'єрне відбиття.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В. Волков, В.А. Воков *ФТТ*, **50**, 193 (2008) (V.V. Volkov, V.A. Vokov, *Phys. Solid State* **50**, 199 (2011)).
2. А.Б. Шевченко, Г.Г. Влайков, М.Ю. Барабаш, *Структурно – размерные и квантовые эффекты в наносистемах с параметром порядка. Ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы* (Київ: Академперіодика: 2013).
3. А. Малоземов, Дж. Слонзуски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами* (Мир: Москва: 1982).
4. А. Konishi, *IEEE T. Magn.* **19**, 1838 (1983).
5. M. Klaui, C.A.F. Vaz, J.A.C. Bland, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 5637 (2004).
6. M. Laufenberg, D. Backes, W. Buhner, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 052507 (2004).
7. Y. Nakatani, A. Thiaville, J. Miltat, *J. Magn. Magn. Mater.* **290-291**, 750 (2005).
8. N. Vukadinovic, F. Boust, *Phys. Rev. B* **78**, 184411 (2008).
9. S. Takagi, G. Tatara, *Phys. Rev. B* **54**, 9920 (1996).
10. J. Shibata, S. Takagi, *Phys. Rev. B* **62**, 5719 (2000).
11. E.G. Galkina, B.A. Ivanov, S. Savel'ev, *Phys. Rev. B* **77**, 134425 (2009).
12. Б.А. Иванов, А.К. Колежук, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 792 (1994) (B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **60**, 805 (1994)).
13. V.V. Dobrovitski, A.K. Zvezdin, *J. Magn. Magn. Mater.* **156**, 205 (1996).
14. E.M. Chudnovsky, O. Iglesias, P.C.E. Stamp, *Phys. Rev. B* **46**, 5392 (1992).
15. А.Б. Шевченко, *ЖТФ* **52**, 1376 (2007) (A.B. Shevchenko, *Tech. Phys.* **52**, 1376 (2007)).
16. В.Ф. Лисовский, *Физика цилиндрических магнитных доменов* (Сов. Радио: Москва 1979).
17. A. Thiaville, J.M. Garcia, R. Dittrich, *Phys. Rev. B* **67**, 094410 (2003).
18. N. Niedoba, M. Labrune, *Eur. Phys. J. B* **47**, 467 (2005).
19. Ю.А. Куфаев, Э.Б. Сонин, *ЖЭТФ* **95**, 1523 (1989) (Yu.A. Kufaev, E.B. Sonin, *J. Exp. Theor. Phys.* **68**, 879 (1994)).
20. В.Е. Зубов, Г.С. Кринчик, С.Н. Кузьменко, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 419 (1990) (V.E. Zubov, G.S. Krinchik, S.N. Kuz'menko, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **51**, 477 (1994)).
21. E.M. Chudnovsky, *J. Appl. Phys.* **73**, 6697 (1993).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, (Наука: Москва: 1989).
23. E.G. Galkina, B.A. Ivanov, V.A. Stephanovich, *J. Magn. Magn. Mater.* **118**, 373 (1993).
24. В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **87**, 1501 (1984) (V.G. Bar'yakhtar, *J. Exp. Theor. Phys.* **60**, 863 (1984)).
25. В.Г. Барьяхтар, Ю.И. Горобец, *Цилиндрические магнитные домены и их решетки* (Київ: Наук. думка: 1988).
26. П.В. Елютин, В.Д. Кривченков, *Квантовая механика* (Наука: Москва: 1976).