

## Нелинейное уравнение Шредингера для описания малоамплитудных спиновых волн в многослойных магнитных материалах

И.В. Герасимчук<sup>1,2,\*</sup>, Ю.И. Горобец<sup>1,2</sup>, В.С. Герасимчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт магнетизма НАН Украины и МОН Украины, бульв. Акад. Вернадского, 36-б, 03142 Киев, Украина*

<sup>2</sup> *Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", пр-т Победы, 37, 03056 Киев, Украина*

(Получено 04.02.2016; опубликовано online 21.06.2016)

В рамках описания спиновых волн в многослойных магнитных материалах получено нелинейное уравнение Шредингера с системой  $\delta$ -функциональных потенциалов. Для системы с одним узким магнитным слоем («магнитный сэндвич»), отличающимся от материала матрицы значением константы одноосной анизотропии, получены соответствующие граничные условия, и найдено локализованное вблизи этого слоя решение. Описаны свойства и проведено квазиклассическое квантование полученного солитонного состояния.

**Ключевые слова:** Спиновые волны, Магнитный дефект, «Магнитный сэндвич», Нелинейное уравнение Шредингера, Локализованное состояние, Солитон.

DOI: [10.21272/jnep.8\(2\).02020](https://doi.org/10.21272/jnep.8(2).02020)

PACS numbers: 63.20.Pw, 75.30.Ds, 75.70.Cn

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория нелинейных волн является одним из наиболее важных направлений современной физики твердого тела. Основные усилия в этой области направлены на изучение свойств солитонных состояний в реальных физических системах с учетом их дискретности и внутренней микроструктуры [1, 2]. Известно, что наличие дефектов в нелинейной среде или периодичность её структуры существенно влияют на свойства нелинейных локализованных волн. Примерами могут служить сильнолокализованные высокочастотные моды в ангармонических кристаллах [3] или щелевые солитоны в периодических системах [4]. В связи с этим, различного рода слоистые и модулированные структуры являются перспективными с точки зрения технологических применений.

Особый интерес представляют многослойные ферро- и антиферромагнитные материалы с периодической структурой, использование которых связано с целым рядом проявляющихся в таких системах магнитооптических, магнитотранспортных и других свойств. Так, в многослойных системах с различными магнитными свойствами слоев обнаружено, в частности, явление гигантского магнитосопротивления [5]. В свою очередь, наличие границы раздела в системах с различными магнитными свойствами и различным соотношением толщин слоев является необходимым условием формирования спин-волновых возбуждений, локализованных на границе контактирующих слоев [6-8]. И если прежде анализ таких возбуждений ограничивался линейным по амплитуде колебаний приближением, то теперь актуальными становятся исследования нелинейных спин-волновых возбуждений. Практический интерес представляют аналитические исследования распространения нелинейных спиновых волн, локализованных вблизи тонкого слоя магнетика в магнитной матрице из другого вещества или в системе тонких плоскопараллельных магнитных

слоев (плоских магнитных дефектов).

В рамках феноменологического подхода для одноосных магнетиков Сукстанский и Тарасенко установили [9, 10] существование нелинейных межповерхностных спиновых волн, локализованных вблизи границы раздела двух ферромагнетиков, отличающихся магнитными параметрами. Формирование нелинейных внутренних спиновых волн имеет место и в обменно-связанной планарной трехслойной структуре типа магнитный сэндвич [11], внутренний слой которой рассматривается как квазидвумерный магнитный дефект.

Возможность результирующей пространственной локализации волнового потока в слоистых периодических структурах различного типа обусловлена одновременным проявлением локализации волны на дефектных слоях и нелинейной локализации за счет ангармоничности среды, окружающей эти слои. Первым этапом в изучении такого типа пространственных состояний является исследование локализации возбуждений на одиночном дефекте. Для одного изолированного дефекта такая задача детально исследована в работе [12] для разных знаков нелинейности среды и разного характера взаимодействия элементарных возбуждений с дефектом. Нелинейная динамика стационарных волн, распространяющихся в нелинейной среде вдоль слоистой или модулированной периодической системы волноводов, была аналитически описана в работе [13], а система с нелинейными волноводами в линейной среде изучалась, например, в работе [14].

В настоящей работе рассматривается магнетик с нелинейными характеристиками, содержащий узкие слои, отличающиеся своими магнитными свойствами от окружающей их матрицы. Многослойными магнитными системами такого типа могут являться слоистые структуры вида ферромагнетик/ферромагнетик, ферромагнетик/антиферромагнетик, антиферромагнетик/антиферромагнетик с различными магнитными

\* [igor.gera@gmail.com](mailto:igor.gera@gmail.com)

ми свойствами слоев. Примером такой системы может служить слоистая структура Co/CoO, исследованная в работе [7].

Мы проводим аналитическое исследование для простого случая слоистого легкоосного ферромагнетика с различными значениями константы одноионной анизотропии в узких слоях и в областях вне них. Для слоистого ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», направленной перпендикулярно слоям, мы показываем, что уравнение Ландау-Лифшица для вектора намагниченности в длинноволновом приближении сводится к стандартному нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) с периодической последовательностью  $\delta$ -функций, в описании которых в общем случае присутствуют как линейная, так и нелинейная части. На первом этапе, в случае одного плоского магнитного слоя (НУШ с одной  $\delta$ -функцией), отличающегося только значением константы одноионной анизотропии от магнитной среды в области вне слоя, мы получаем точное решение в виде локализованного на границе раздела слоев солитонного состояния. Для этого случая выведены соответствующие граничные условия, и исследованы свойства найденного солитонного решения.

Теоретическое исследование и НУШ, предложенные в данной работе, могут быть использованы для исследований локализации спиновых волн в различного типа магнитных многослойных системах или тонких пленках с достаточно узкими плоскими слоями, отличающимися своими магнитными свойствами от свойств матрицы системы.

## 2. ВЫВОД НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ОПИСАНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ МАГНЕТИКАХ

Рассмотрим слоистый ферромагнетик с анизотропией типа «легкая ось». В общем случае в слоистом магнетике, чередующиеся магнитные слои которого перпендикулярны оси  $z$  (рис. 1), магнитные характеристики – модуль вектора намагниченности  $M_0(z)$ , постоянные неоднородного обменного взаимодействия  $\alpha(z)$  и магнитной анизотропии  $\beta(z)$  – становятся периодическими функциями координаты  $z$ .

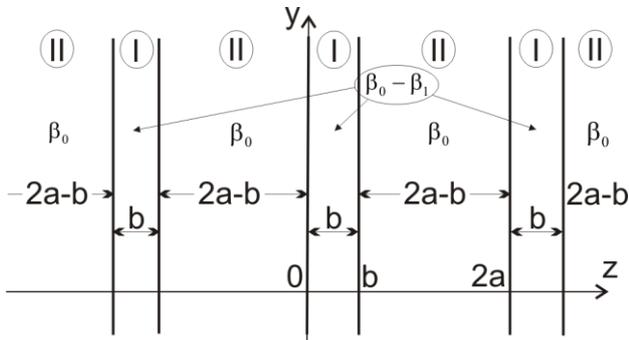


Рис. 1 – Слоистый ферромагнетик с анизотропией типа «легкая ось» («легкая ось» направлена вдоль оси  $z$ ) с узкими слоями I

Рассмотрим простой случай, когда  $M_0 = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , а слои различаются лишь значениями

константы одноионной анизотропии  $\beta = \beta(z)$ :

$$\beta(z) = \begin{cases} \beta_0 - \beta_1, & 2an \leq z < b + 2an, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{I}), \\ \beta_0, & b + 2an \leq z < 2a(1+n), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{II}). \end{cases} \quad (1)$$

В ряде случаев это отвечает реальной физической ситуации: например, в многослойных структурах Co/CoO значения  $M_0$  и  $\alpha$  одинаковы во всех слоях, отличаются лишь значения константы анизотропии  $\beta$  [7].

В отсутствие диссипации уравнение Ландау-Лифшица для вектора намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  имеет стандартный вид:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -|\gamma| \cdot [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}], \quad (2)$$

где  $|\gamma| = 2\mu_0/\hbar$  – гиромагнитное отношение,  $\mu_0 = |e|\hbar/(2mc)$  – магнетон Бора и  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор. Эффективное магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{eff}}(\mathbf{r}, t)$  определяется как вариационная производная свободной энергии  $F$  по магнитному моменту [15]:

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}}. \quad (3)$$

Модуль вектора намагниченности, как следует из уравнения Ландау-Лифшица (2), является величиной постоянной  $|\mathbf{M}| = M_0 = \text{const}$ .

Введем декартову систему координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с направлением «легкой оси» ферромагнетика и была перпендикулярна слоям рассматриваемой многослойной структуры. Тогда  $M_x, M_y, M_z \approx M_0$ , и выражение для свободной энергии  $F$  в отсутствие внешнего магнитного поля имеет следующий вид [1,2]:

$$F = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\beta(z)}{2} M_z^2. \quad (4)$$

Для легкоосного ферромагнетика  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ .

Для плотности магнитной энергии (4) эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial F}{\partial (\partial \mathbf{M} / \partial x_i)} \right]$$

принимает вид:

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = \alpha \Delta M_x \mathbf{i} + \alpha \Delta M_y \mathbf{j} + (\alpha \Delta M_z + \beta(z) M_z) \mathbf{k}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  – соответствующие орты осей декартовой системы координат.

С учетом полученного для  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  выражения (5) имеем:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}] = & [\alpha \cdot (M_y \Delta M_z - M_z \Delta M_y) + \\ & + \beta(z) \cdot M_y M_z] \cdot \mathbf{i} + [\alpha \cdot (M_z \Delta M_x - M_x \Delta M_z) - \\ & - \beta(z) \cdot M_x M_z] \cdot \mathbf{j} + \alpha \cdot (M_x \Delta M_y - M_y \Delta M_x) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

На этом этапе вещественные переменные  $M_x$  и  $M_y$  удобно параметризовать комплекснозначной функцией  $\psi = M_x + i M_y$ , так что  $z$ -компонента вектора намагниченности равна [1,2]

$$M_z = \sqrt{M_0^2 - |\psi|^2}. \quad (7)$$

Тогда, с учетом определения функции  $\psi$  и векторного произведения (6), уравнение Ландау-Лифшица (2) может быть записано следующим образом:

$$i \frac{\hbar}{2\mu_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \cdot (M_z \Delta \psi - \psi \Delta M_z) - \beta(z) \cdot M_z \psi. \quad (8)$$

Введем [1,2] частоту однородного ферромагнитного резонанса в отсутствие магнитного поля  $\omega_0 = 2\mu_0 M_0 \beta_0 / \hbar$  и магнитную длину  $l_0 = \sqrt{\alpha / \beta_0}$ , относящиеся к широким слоям (II) магнетика. Тогда для спиновых волн малой амплитуды  $|\psi| \ll M_0$  уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{i}{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l_0^2 \frac{M_z}{M_0} \Delta \psi + l_0^2 \frac{\psi}{M_0} \Delta M_z + \frac{M_z}{M_0} \frac{\beta(z)}{\beta_0} \psi = 0, \quad (9)$$

где значение  $\beta(z)$  определяется соотношением (1) и, в частности,

$$\frac{\beta(z)}{\beta_0} = 1 - \frac{\beta_1(z)}{\beta_0}. \quad (10)$$

Для рассматриваемых малых отклонений намагниченности от основного состояния из выражения (7) следует, что

$$M_z \approx M_0 - \frac{|\psi|^2}{2M_0} \quad \text{и} \quad \Delta M_z \approx -\frac{1}{2M_0} \Delta |\psi|^2. \quad (11)$$

В результате, с учетом соотношений (10)-(11), уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l_0^2 \Delta \psi + \frac{l_0^2}{2M_0^2} |\psi|^2 \Delta \psi - \frac{l_0^2}{2M_0^2} \psi \Delta |\psi|^2 + \psi - \\ - \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} \psi - \frac{1}{2M_0^2} |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2M_0^2} \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} |\psi|^2 \psi = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Анализ устойчивости спиновых волн показывает [1, 2], что для малых отклонений намагниченности от основного состояния ( $|\psi| \ll M_0$ ) пространственный масштаб возникающей неоднородности имеет порядок величины  $\Delta \ll l_0 M_0 / |\psi| \ll l_0$ . Поэтому в первую очередь проанализируем те решения уравнения (12), для которых  $(l_0 \cdot \nabla) \ll 1$ , что соответствует длинноволновому приближению. Поскольку магнитная длина  $l_0 = \sqrt{\alpha / \beta}$  для ферромагнетиков, как правило, значительно превосходит межатомное расстояние  $d$ , это оправдывает рассмотрение изучаемой нами системы в рамках длинноволнового приближения [1, 2]. (Для ферромагнетиков константа магнитной анизотропии  $\beta$  может ме-

няться в достаточно широких пределах, в то время как  $\alpha \ll d e^2 / \mu_0 M_0 \sim d^4 e^2 / \mu_0^2 \ll 10^{-13} - 10^{-14} \text{ м}^2$ , где  $e$  – заряд электрона).

В длинноволновом приближении имеем

$$l_0^2 |\psi|^2 \Delta \psi \ll |\psi|^2 \psi \quad \text{и} \quad l_0^2 \psi \Delta |\psi|^2 \ll |\psi|^2 \psi, \quad (13)$$

что позволяет сохранить в уравнении (12) нелинейные члены порядка не выше  $|\psi|^2 \psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l_0^2 \Delta \psi + \psi - \frac{1}{2M_0^2} |\psi|^2 \psi = \\ = \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} \psi - \frac{1}{2M_0^2} \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} |\psi|^2 \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

Если анизотропия магнитных слоев отличается незначительно, то  $\beta_1 / \beta_0 \ll 1$  и  $[\beta_1(z) / \beta_0] |\psi|^2 \psi \ll |\psi|^2 \psi$ . В свою очередь, полагая, что  $|\psi|^2 \ll (\beta_1 / \beta_0)^2$ , первое слагаемое  $[\beta_1(z) / \beta_0] \psi$  в правой части (14) следует сохранить. В итоге уравнение (14) принимает окончательный вид:

$$\frac{i}{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l_0^2 \Delta \psi + \psi - \frac{1}{2M_0^2} |\psi|^2 \psi = \frac{\beta_1(z)}{\beta_0} \psi. \quad (15)$$

Полученное уравнение представляет собой широко используемое в различных физических приложениях нелинейное уравнение Шредингера.

В случае когерентной спиновой волны с фиксированным волновым числом  $k$ , распространяющейся вдоль магнитной слоистой структуры (вдоль оси  $x$ ) и однородной в этом направлении, решение уравнения (15) удобно искать в виде

$$\psi = 2M_0 \cdot u(z, t) \cdot \exp\{-i(kx - \omega t)\}, \quad (16)$$

где  $\omega = \omega_0 (1 + k^2 l_0^2)$  – частота линейной спиновой волны с волновым числом  $k$ , распространяющейся в однородном магнетике с анизотропией  $\beta_0$ , а  $u(z, t)$  – медленно меняющаяся функция координаты  $z$  и времени  $t$ . (Для простоты будем считать волну двумерной и не зависящей от координаты  $y$ .)

В слоистом магнетике зависимость  $u(z, t)$  от времени  $t$  учитывает сдвиг частоты за счет её возможной локализации в  $z$ -направлении и отличия усредненной анизотропии в слоистой среде от значения  $\beta_0$ , а также может учитывать медленные нестационарные эффекты.

Вводя вместо переменных  $z$  и  $t$  безразмерные переменные  $\tilde{t} = \omega_0 t$  и  $\tilde{z} = z / l_0$ , после подстановки общего вида решения (16) в уравнение (15) получим для функции  $u(z, t)$  НУШ в виде:

$$-i \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{z}^2} + 2|u|^2 u = -\frac{\beta_1(\tilde{z})}{\beta_0} u, \quad (17)$$

где

$$\beta_1(\tilde{z}) = \begin{cases} \beta_1, & \frac{2a}{l_0}n \leq \tilde{z} < \frac{b}{l_0} + \frac{2a}{l_0}n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{I}), \\ 0, & \frac{b}{l_0} + \frac{2a}{l_0}n \leq \tilde{z} < \frac{2a}{l_0}(1+n), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{II}). \end{cases} \quad (18)$$

Опуская в дальнейшем знак “тильда”, перепишем уравнение (17):

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u = -\frac{\beta_1(z)}{\beta_0} u. \quad (19)$$

В случае достаточно узких плоских магнитных слоев (I), т.е. при  $b/(2a-b) \sim b/a \ll 1$ , магнитные слои можно моделировать системой  $\delta$ -функций:

$$\frac{\beta_1(z)}{\beta_0} \cong \lambda \cdot \sum_n \delta(z - 2an), \quad (20)$$

где параметр  $\lambda$ , характеризующий плоские магнитные дефекты (их «мощность»), определяется соотношением:

$$\lambda = \frac{\beta_1}{\beta_0} \cdot \frac{b}{l_0}. \quad (21)$$

Заметим, что параметр  $\lambda > 0$ , поскольку для легкоосного ферромагнетика  $\beta_0 > 0$  и  $\beta_1 > 0$ .

С учетом соотношения (20) уравнение (19) для периодической системы плоских (квазидвумерных) магнитных дефектов перепишется следующим образом:

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u = -\lambda \cdot \sum_n \delta(z - 2an) \cdot u, \quad (22)$$

где «мощность» дефектов  $\lambda$  определяется выражением (21).

В качестве первого шага описания такого типа магнитной системы ограничимся исследованием трехслойной структуры типа магнитный сэндвич с одним плоским магнитным (дефектным) слоем между двумя обычными ферромагнитными слоями. Этот частный случай будет соответствовать постановке задачи в [11]. Но в отличие от [11], где в рамках уравнения Ландау-Лифшица изучены нелинейные внутренние спиновые волны произвольной амплитуды, нас будут интересовать устойчивые малоамплитудные локализованные нелинейные состояния солитонного типа.

### 3. ЛОКАЛИЗОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНИМ ДЕФЕКТНЫМ СЛОЕМ

Для одного плоского магнитного слоя НУШ (22) принимает вид:

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u = -\lambda \cdot \delta(z) \cdot u. \quad (23)$$

«Мощность» магнитного дефекта  $\lambda$  определяется выражением (21).

При наличии дефектного слоя даже в линейной среде возможны локализованные вблизи него колебания. В случае линейного дефектного слоя с “мощностью”  $\lambda$  такие локализованные состояния возможны только в случае притягивающих свойств магнитного слоя ( $\lambda > 0$ ) [12]. Частота локальных колебаний в случае  $\lambda > 0$  равна  $\omega_l = -\lambda^2/4$  и лежит под нижней границей сплошного спектра. В этом случае решение для стационарного локализованного состояния имеет вид

$$u(z, t) \propto \exp\{i\omega t - \lambda|z|/2\}. \quad (24)$$

Для нашей системы естественно искать стационарные решения НУШ (23) в виде

$$u(z, t) = u(z) \exp(i\omega t), \quad (25)$$

где  $u(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Тогда уравнение (23) для функции  $u(z)$  принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega u + 2u^3 = -\lambda \delta(z) u. \quad (26)$$

Решение полученного уравнения сводится к решению соответствующего однородного уравнения (когда правая часть (26) равна нулю) в областях  $z > 0$  и  $z < 0$ , дополненного граничными условиями в точке расположения дефектного магнитного слоя  $z = 0$ , которые обусловлены интегрированием уравнения (26) по узкой окрестности  $z = 0$  [12]:

$$u|_{+0} = u|_{-0}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{+0} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-0} = -\lambda u|_0. \quad (28)$$

Решение уравнения (26) для локализованной спиновой волны, удовлетворяющее граничным условиям (27)-(28), легко находится и имеет вид

$$u(z, t) = \frac{\varepsilon}{\text{ch}[\varepsilon(|z| - z_0)]} \cdot \exp(i\omega t), \quad (29)$$

где параметр  $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$  характеризует частоту возбуждения, амплитуду решения (локализованного состояния) и область его локализации. Параметры  $\varepsilon$  и  $z_0$  связаны соотношением, следующим из граничного условия (28):

$$2\varepsilon \cdot \text{th}(\varepsilon z_0) = -\lambda. \quad (30)$$

Из соотношения (30) видно, что, поскольку для легкоосного ферромагнетика  $\lambda > 0$ , параметр  $z_0$  является отрицательным. Максимально возможная частота локализованного состояния совпадает с частотой локальных колебаний в соответствующей линейной системе  $\omega_l = -\lambda^2/4$  [12], а интервал допустимых частот неограничен снизу.

В связи с этим, заметим, что из вида решения (16)

для спиновой волны и решения (29) для  $u(z,t)$  следует, что  $|\psi|^2 \propto M_0^2 \lambda^2 \propto (\beta_1/\beta_0)^2$ . Это, в свою очередь, свидетельствует о том, что мы сохранили слагаемое  $[\beta_1(z)/\beta_0]\psi$  в правой части уравнения (14) оправданно.

Максимум амплитуды локализованного состояния (29) находится в точке расположения магнитного слоя (поскольку  $z_0 < 0$ ), а само солитонное решение имеет вид, приведенный на рис. 2. Элементарные возбуждения локализованного состояния притягиваются как между собой, так и к магнитному дефектному слою.

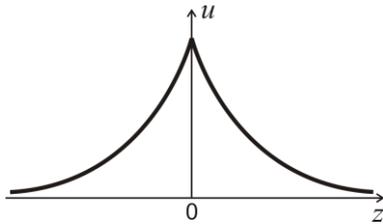


Рис. 2 – Распределение поля для нелинейного локализованного состояния (29)

В малоамплитудном пределе, при  $\omega_l - \omega \ll \omega_l$  ( $\varepsilon \approx \lambda/2$ ), параметр  $z_0$  стремится к бесконечности по логарифмическому закону  $z_0 \approx \ln(\omega_l - \omega)/\lambda$ , а амплитуда солитонного возбуждения зависит от частоты стандартным для солитонов образом [12]:

$$u(z=0)|_{\omega \rightarrow \omega_l} \approx \sqrt{\omega_l - \omega}.$$

При  $\omega = \omega_l$  нелинейная локализованная мода превращается в обычные локальные колебания линейной теории с нулевой амплитудой.

Уравнение (23) описывает динамику консервативной системы и поэтому обладает очевидным интегралом движения – полной энергией системы [16,12]

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - |u|^4 - \lambda \delta(z) |u|^2 \right\}, \quad (31)$$

и дополнительным интегралом движения – полным числом элементарных возбуждений (или квантов поля), связанных в локализованном состоянии [15,12]:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz. \quad (32)$$

Для уяснения квантовомеханической природы солитонного состояния удобно перейти от частоты как его динамической характеристики к числу связанных в нем возбуждений  $N$ . В работе [12] получены выражения для интегралов движения  $E$  и  $N$  через связанный с частотой  $\omega$  параметр  $\varepsilon$ . В нашем случае, с учетом явного вида решения (29) и условия связи (30), интегралы движения (31)-(32) будут иметь следующий вид:

$$E(\varepsilon) = -\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{\lambda^3}{12}, \quad N(\varepsilon) = 2 \left( \varepsilon - \frac{\lambda}{2} \right). \quad (33)$$

Из положительности интеграла движения  $N(\varepsilon)$  следует неравенство, определяющее область существования решения:  $\varepsilon > \lambda/2$  или  $\omega < \omega_l = -\lambda^2/4$ . Критическое значение  $\varepsilon = \lambda/2$ , таким образом, соответствует частоте  $\omega_l$  линейной локальной моды. Минимальное значение  $N = 0$  отвечает нулевой амплитуде решения на частоте  $\omega_l$ .

Исключая в выражениях (33) частоту  $\omega$  (или связанный с ней параметр  $\varepsilon$ ), найдем связь полной энергии локализованного состояния с числом связанных в нем возбуждений [12]:

$$\begin{aligned} E(N) &= -\frac{N\lambda^2}{4} - \frac{N^3}{12} - \frac{\lambda N^2}{4} = \\ &= N \cdot \omega_l - \frac{N^3}{12} - \frac{\lambda N^2}{4}. \end{aligned} \quad (34)$$

Трактовка полученного выражения подобна трактовке соответствующего результата [12]. Первое слагаемое в (34) описывает энергию  $N$  не взаимодействующих между собой элементарных возбуждений и соответствует описанию системы в линейном приближении. При этом, вследствие взаимодействия этих возбуждений с магнитным слоем, их собственная частота становится равной частоте линейных локальных примесных колебаний  $\omega_l$ . Второе слагаемое в выражении (34) описывает энергию взаимодействия возбуждений в солитонном состоянии и имеет тот же вид, что и в случае солитонов в однородной среде. Наконец, последнее слагаемое описывает взаимодействие связанных в локализованном состоянии возбуждений посредством магнитного дефекта. При этом энергия локализованного состояния понижается, т.е. магнитный слой “притягивает” возбуждения и солитон как целое к себе.

Из выражения (34) также следует, что энергия, приходящаяся в солитонном состоянии на одно возбуждение, оказывается меньше энергии свободной квазичастицы:

$$\frac{E}{N} = -\frac{1}{16}(N + 2\lambda)^2 - \frac{N^2}{48} < 0.$$

Полученное соотношение позволяет трактовать локализованное состояние как связанное состояние большого числа элементарных возбуждений [1,2,16,17].

Дифференцируя выражение (34) по  $N$  и исключая  $N$  с помощью зависимости  $N(\varepsilon)$  из (33), легко убедиться в выполнении обычного для одночастотных солитонов соотношения  $\partial E/\partial N = \omega$ , имеющего место в консервативных нелинейных системах, обладающих интегралом движения  $N$  [16,12]. Таким образом, частота нелинейного локализованного состояния играет роль химического потенциала для связанных в нем возбуждений.

С помощью соотношения (34) легко получить зависимость частоты  $\omega$  от  $N$  в явном виде:

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial N} = -\frac{1}{4}(N + \lambda)^2. \quad (35)$$

При  $\lambda = 0$  это выражение в точности совпадает с зависимостью  $\omega = \omega(N)$  для солитона в однородной системе.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод описания динамики широкого класса нелинейных магнитных слоистых сред. Показано, что если нелинейная магнитная среда имеет вид периодической последовательности плоскопараллельных магнитных слоев (квазидвумерных магнитных дефектов), поперечный размер которых существенно меньше расстояния

между ними, то для нелинейных спиновых волн, распространяющихся вдоль такой слоистой структуры, в длинноволновом приближении может быть выведено нелинейное уравнение Шредингера с периодической последовательностью  $\delta$ -функциональных пространственных возмущений.

Для случая трехслойной системы с одним узким магнитным слоем между двумя обычными ферромагнитными слоями, отличающимися значением константы одноионной анизотропии от константы анизотропии ферромагнитных слоев, получены соответствующие граничные условия, и найдено локализованное вблизи магнитного слоя решение. Исследованы свойства, проведено квазиклассическое квантование локализованного состояния и получена зависимость полной энергии системы от числа элементарных возбуждений, связанных в солитоне.

### Nonlinear Schrödinger Equation for Description of Small-amplitude Spin Waves in Multilayer Magnetic Materials

I.V. Gerasimchuk<sup>1,2</sup>, Yu.I. Gorobets<sup>1,2</sup>, V.S. Gerasimchuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Magnetism, National Academy of Sciences of Ukraine and Ministry of Education and Science of Ukraine, 36b, Vernadsky Blvd., 03142 Kyiv, Ukraine*

<sup>2</sup> *National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 37, Peremohy Ave., 03142 Kyiv, Ukraine*

In the framework of the description of spin waves in multilayer magnetic materials the nonlinear Schrödinger equation with the system of  $\delta$ -functional potentials was derived. In the case of a system with one narrow magnetic layer ("magnetic sandwich"), having different value of single-ion anisotropy from that one of the matrix, the corresponding boundary conditions are obtained and the solution localized near this layer is found. The properties are described and the quasi-classical quantization of the obtained soliton state is carried out.

**Keywords:** Spin waves, Magnetic defect, "Magnetic sandwich", Nonlinear Schrödinger equation, Localized state, Soliton.

### Нелінійне рівняння Шредингера для опису малоамплітудних спинових хвиль в багатослоєвих магнітних матеріалах

І.В. Герасимчук<sup>1,2</sup>, Ю.І. Горобець<sup>1,2</sup>, В.С. Герасимчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Інститут магнетизму НАН України та МОН України, бульв. Акад. Вернадського, 36-б, 03142 Київ, Україна*

<sup>2</sup> *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр-т Перемоги, 37, 03056 Київ, Україна*

В рамках опису спинових хвиль в багатослоєвих магнітних матеріалах одержано нелінійне рівняння Шредингера з системою  $\delta$ -функційних потенціалів. Для системи з одним вузьким магнітним шаром («магнітний сендвіч»), що відрізняється від матеріалу матриці значенням константи одноіонної анизотропії, отримано відповідні граничні умови, і знайдено локалізований поблизу цього шару розв'язок. Описано властивості та проведено квазікласичне квантування отриманого солітонного стану.

**Ключові слова:** Спінкові хвилі, Магнітний дефект, «Магнітний сендвіч», Нелінійне рівняння Шредингера, Локалізований стан, Солітон.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны* (Киев: Наукова думка: 1983). (A.M. Kosevich, B.A. Ivanov and A.S.Kovalev, *Nonlinear Magnetization Waves. Dynamic and Topological Solitons* (Kiev: Naukova Dumka: 1983)). [in Russian]
2. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Physica D* **3** No 1-2, 363 (1981).
3. K.W. Sandusky, J.B. Page, K.E. Schmidt, *Phys. Rev. B* **46** No 10, 6161 (1992).
4. D.L. Mills, S.E. Trullinger, *Phys. Rev. B* **36** No 2, 947 (1987).
5. S.S.P. Parkin, *Annu. Rev. Mater. Sci.* **25** No 1, 357 (1995).
6. I.I. Hinchey, D.I. Mills, *Phys. Rev. B* **34** No 3, 1689 (1986).
7. R.L. Stamps, R.E. Camley, R.J. Hicken, *Phys. Rev. B* **54** No 6, 4159 (1996).
8. Ju. Ganping, A.V. Nurmikko, R.F.C. Farrow, R.F. Marks, M.J. Garey, B.A. Gurney, *Phys. Rev. B* **58** No 2, R11857 (1998).
9. А.Л. Сукстанский, С.В. Тарасенко, *ФТТ* **35** № 2, 270 (1993) (A.L. Sukstanskiy, S.V. Tarasenko, *Phys. Solid State* **35** No 2, 270 (1993)).
10. A.L. Sukstanskiy, S.V. Tarasenko, E.Yu. Melikhov, *J.Magn. Magn. Mater.* **164** No 1-2, 105 (1996).
11. С.В. Тарасенко, *Письма в ЖТФ* **20** No 6, 92 (1994) (S.V. Tarasenko, *Tech. Phys. Lett.* **20** No 6, 92 (1994)).
12. М.М. Богдан, И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев, *ФНТ* **23** № 2, 197 (1997). (M.M. Bogdan, I.V. Gerasimchuk, A.S. Kovalev, *Low Temp. Phys.* **23** No 2, 145 (1997)).
13. I.V. Gerasimchuk, A.S. Kovalev, *JETP Lett.* **85** No 10, 488 (2007).
14. I.V. Gerasimchuk, A.S. Kovalev, *J. Phys.: Condens. Matt.* **13** No 44, L885 (2001).
15. A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar, S.V. Peletminskii, *Spin Waves* (Amsterdam: North-Holland: 1968).
16. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику* (Киев: Наукова думка: 1989). (A.M. Kosevich, A.S.Kovalev, *Introduction to Nonlinear Physical Mechanics* (Kiev: Naukova Dumka: 1989)) [in Russian].
17. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **25** Вып. 11, 516 (1977). (A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, A.S. Kovalev, *JETP Lett.* **25** No 11, 486 (1977)).