

УДК 519.6

БИФУРКАЦИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

А. А. ПОКУТНЫЙ

РЕЗЮМЕ. В работе развивается теория возмущений для абстрактного уравнения Хилла в критическом случае. Построены асимптотические разложения соответствующих решений.

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории возмущений восходят еще к работам Ляпунова и Пуанкаре. На сегодняшний день они представляют собой мощное средство прикладной математики. А именно: методы теории возмущений позволяют получать приближенные аналитические представления решений достаточно сложных краевых задач. Большинство из них возникло именно при решении конкретных задач механики, небесной механики и физики. Здесь нельзя не отметить работы Боголюбова Н. Н., Митропольского Ю. А. [1] по асимптотическим методам, работы Арнольда В. И. (см. монографию [2] и библиографию к ней), имеющие отношение к широко известной проблеме n тел. Множество примеров прикладных задач, которые могут быть исследованы методами теории возмущений, приведены в монографии Найфе А. Х. [3]. Анализ этих работ и работ касающихся краевых задач в так называемом критическом случае (см. Тихонов А. Н. [4], Бойчук А. А., Самойленко А. М. [5]) позволил в данной работе развить так называемый метод Вишика-Люстерника [6] для исследования возмущений абстрактного уравнения Хилла с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве. Это уравнение является аналогом такого уравнения с ограниченным оператором, которое исследовалось Далецким Ю. Л. [7]. При помощи теории псевдообратных операторов [5] удастся построить теорию возмущений для двухточечной краевой задачи и в так называемом критическом или резонансном случае.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве H уравнение Хилла

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0) - y(w) = \alpha_1, \quad \dot{y}(0) - \dot{y}(w) = \alpha_2. \quad (2)$$

Оператор T — строго положительный и самосопряженный, $\alpha_1, \alpha_2 \in H$. Пусть $T^{\frac{1}{2}} \geq \lambda I$ — положительный квадратный корень из оператора T . Так

как оператор T замкнут, то область определения $D(T^{\frac{1}{2}})$ оператора $T^{\frac{1}{2}}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u)$. После замены переменных получим операторную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -T^{\frac{1}{2}}x_1(t) \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) - x_1(w) = \alpha_1, \quad x_2(0) - x_2(w) = \alpha_2. \quad (4)$$

Здесь $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$.

Эволюционным семейством операторов для уравнения (3) будет сильно непрерывная унитарная группа

$$U(t) := U(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos tT^{\frac{1}{2}} & \sin tT^{\frac{1}{2}} \\ -\sin tT^{\frac{1}{2}} & \cos tT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Как известно, она не является сжимающей. Отметим некоторые свойства этой группы, которые понадобятся в дальнейшем.

$$U^n(t) = \begin{pmatrix} \cos ntT^{\frac{1}{2}} & \sin ntT^{\frac{1}{2}} \\ -\sin ntT^{\frac{1}{2}} & \cos ntT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = U(nt), \quad \|U^n(t)\| = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введя в рассмотрение новое гильбертово пространство

$$H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$$

со скалярным произведением

$$(\langle u, v \rangle, \langle u, v \rangle)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$$

и вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$, задачу (3), (4) на спаренном пространстве $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ перепишем в виде

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \quad (5)$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \quad (6)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, оператор A будет иметь вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего нам понадобится также разрешимость и представление решений неоднородной операторной системы

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + f(t), \quad (7)$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi(t) = U(t)c + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

для произвольного элемента $c \in H_{T\frac{1}{2}}$. Подставляя его в краевое условие (8), получим, что разрешимость задачи (7), (8) будет эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$(I - U(w))c = \alpha + U(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad (9)$$

где $U(w)$ — оператор монодромии. Будем рассматривать случай, когда оператор в левой части (9) является нормально-разрешимым, то есть множество значений оператора $I - U(w)$ замкнуто ($R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$). Так как степени оператора монодромии равномерно ограничены, то в силу результатов [9], операторная система (9) будет разрешима тогда и только тогда, когда

$$U_0(w)\{\alpha + U(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\} = 0, \quad (10)$$

где

$$U_0(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n U^k(w)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n U(kw)}{n} -$$

ортотпроектор, который проектирует пространство $H_{T\frac{1}{2}}$ на собственное подпространство $1 \in \sigma(U(w))$. При выполнении этого условия решения уравнения (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} c = U_0(w)\bar{c} + \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w) - U_0(w))^l \right\}^{k+1} \times \\ \times \left(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - U_0(w) \left(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) \right) \end{aligned}$$

для $\mu > 1, |1 - \mu| < \frac{1}{\|R_\mu(U(w))\|}$. Таким образом решения краевой задачи (7), (8) будут иметь вид

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\bar{c} + (G[f, \alpha])(t), \quad (11)$$

где $G[f, \alpha]$ — обобщенный оператор Грина задачи (7), (8), имеющий вид

$$\begin{aligned} (G[f, \alpha])(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w) - U_0(w))^l \right\}^{k+1} \times \\ \times \left(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - U_0(w) \left(\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right). \end{aligned}$$

В силу выше сказанного краевая задача (5), (6) будет разрешима тогда и только тогда, когда элемент $\alpha \in H_{T\frac{1}{2}}$. При выполнении этого условия все

решения задачи (5), (6) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= U(t)U_0(w)\bar{c} + (G[0, \alpha])(t) = U(t)U_0(w)\bar{c} + \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w) - U_0(w))^l \right\}^{k+1} - U_0(w)\right)\alpha,\end{aligned}$$

с независимым от времени оператором Грина.

2. БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ

Предположим, что элемент α такой, что операторная система (5), (6) не разрешима, то есть $U_0(w)\alpha \neq 0$. Покажем каким образом можно возмутить эту систему чтобы сделать ее разрешимой. Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \quad (12)$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \quad (13)$$

где оператор $A_1(t)$ — линейный ограниченный при всех $t \in [0; w]$. Для получения достаточных условий существования решений операторной системы (12), (13) будем развивать метод Вишика-Люстерника и использовать оператор

$$B_0 = U_0(w) \int_0^w A_1(t)U(t)dtU_0(w) : H_{T^{\frac{1}{2}}} \rightarrow H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия: 1) B_0 — псевдообратим по Муру-Пенроузу; 2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$. Тогда, если невозмущенная операторная двухточечная система (5), (6) не имеет решений, то операторная система (12), (13) имеет ρ -параметрическое семейство решений в виде части ряда Лорана*

$$\varphi_0(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i [\bar{\varphi}_i(t, \bar{c}_i) + \bar{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho], \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}},$$

абсолютно сходящегося для достаточно малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. Здесь

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_{-1}, \\ \bar{\varphi}_0(t, \bar{c}_0) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(t), \\ \bar{\varphi}_i(t, \bar{c}_i) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_i + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{i-1}(\cdot, \bar{c}_{i-1}), 0])(t), i = 1, 2, \dots, \\ \bar{c}_{-1} &= -B_0^+U_0(w)\alpha, \\ \bar{c}_0 &= -B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau, \\ \bar{c}_i &= -B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{i-1}(\cdot, \bar{c}_{i-1}), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{F}_0 &= I - B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w), \\ \mathcal{F}_i &= I - B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, \dots, \\ \bar{X}_{-1}(t) &= U(t)U_0(w),\end{aligned}$$

$$\bar{X}_i(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), i = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание 1. Множество линейно независимых решений зависит от размерности подпространства $P_{N(B_0)}H$.

Перейдем к доказательству теоремы. Будем искать решение в виде части ряда Лорана по степеням ε :

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \varphi_i(t). \quad (14)$$

Подставим ряд (14) в уравнение (12) и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях ε . Проблема определения коэффициента $\varphi_{-1}(t)$ при ε^{-1} ряда (14) сводится к следующей операторной краевой задаче

$$\frac{d\varphi_{-1}(t)}{dt} = A\varphi_{-1}(t), \quad (15)$$

$$\varphi_{-1}(0) - \varphi_{-1}(w) = 0. \quad (16)$$

Множество решений операторной системы (15), (16)

$$\varphi_{-1}(t, c_{-1}) = U(t)U_0(w)c_{-1}$$

для произвольного элемента $c_{-1} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$, который будет определен ниже.

Проблема определения коэффициента $\varphi_0(t)$ при ε^0 ряда (14) сводится к неоднородной операторной краевой задаче

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = A\varphi_0(t) + A_1(t)\varphi_{-1}(t, c_{-1}), \quad (17)$$

$$\varphi_0(0) - \varphi_0(w) = \alpha. \quad (18)$$

Краевая задача (17), (18) будет разрешимой тогда и только тогда, когда

$$U_0(w)\{\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)A_1(\tau)U(\tau)d\tau U_0(w)c_{-1}\} = 0,$$

в силу условия (10). Используя свойство $U_0(w)U(w) = U(w)U_0(w) = U_0(w)$, условие разрешимости перепишется в виде следующего операторного уравнения относительно c_{-1}

$$B_0 c_{-1} = -U_0(w)\alpha. \quad (19)$$

Поскольку оператор B_0 псевдообратим, то операторное уравнение будет разрешимо тогда и только тогда, когда [5]

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w)\alpha = 0,$$

которое выполняется для произвольного элемента $\alpha \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ в силу 2). Тогда множество решений (19) будет иметь вид

$$c_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

или

$$c_{-1} = \bar{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

где

$$\bar{c}_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha,$$

B_0^+ — псевдообратный к B_0 по Муру-Пенроузу. Тогда множество решений (15), (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(t, c_\rho) &= \bar{\varphi}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) + U(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho; \\ \bar{\varphi}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_{-1}.\end{aligned}$$

Используя теперь представление (11), линейность обобщенного оператора Грина, множество решений краевой задачи (17), (18) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0(t, c_0) &= U(t)U_0(w)c_0 + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(t) + \\ &\quad + G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,\end{aligned}$$

где элемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ будет определен на следующем шаге итерационного процесса.

Проблема определения коэффициента $\varphi_1(t)$ при ε^1 ряда (14) запишется в виде краевой задачи

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = A\varphi_1(t) + A_1(t)\varphi_0(t, c_0), \quad (20)$$

$$\varphi_1(0) - \varphi_1(w) = 0. \quad (21)$$

Условие разрешимости (10) для задачи (20), (21) будет иметь вид

$$U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)\varphi_0(\tau, c_0)d\tau = 0.$$

После подстановки решения $\varphi_0(t, c_0)$ и преобразований приходим к следующему операторному уравнению относительно c_0

$$\begin{aligned}B_0c_0 &= -U_0(w)\left(\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho\right).\end{aligned}$$

В силу предположений теоремы это уравнение разрешимо и искомый элемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ определяется следующим образом:

$$c_0 = \bar{c}_0 + \mathcal{F}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{c}_0 &= -B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau, \\ \mathcal{F}_0 &= I - B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w).\end{aligned}$$

Окончательно, множество решений операторной краевой задачи (17), (18) будет иметь вид:

$$\varphi_0(t, c_\rho) = \bar{\varphi}_0(t, \bar{c}_0) + \bar{X}_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_0(t, \bar{c}_0) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}), \alpha])(t), \\ \bar{X}_0(t) &= U(t)U_0(w)\mathcal{F}_0 + (G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(t)U_0(w).\end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача (20), (21) будет иметь решения в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, c_1) &= U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\varphi_0(\cdot, c_0), 0])(t) = \\ &= U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_0(\cdot, \bar{c}_0) + A_1(\cdot)\bar{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, 0])(t),\end{aligned}$$

где элемент c_1 будет определен на следующем шаге итерационного процесса. Проблема определения коэффициента $\varphi_2(t)$ при ε^2 ряда (14) сводится к краевой задаче

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = A\varphi_2(t) + A_1(t)\varphi_1(t, c_1), \quad (22)$$

$$\varphi_2(0) - \varphi_2(w) = 0. \quad (23)$$

Снова записав условие разрешимости (10) и подставляя решение $\varphi_1(t)$, после преобразований приходим к следующему операторному уравнению относительно c_1

$$\begin{aligned}B_0c_1 &= \\ &= -U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_0(\cdot, \bar{c}_0) + A_1(\cdot)\bar{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho, 0])(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Снова в силу предположений теоремы условие разрешимости будет выполненным и множество решений будет иметь вид

$$c_1 = \bar{c}_1 + \mathcal{F}_1\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho;$$

где

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= -B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_0(\cdot, \bar{c}_0), 0])d\tau, \\ \mathcal{F}_1 &= I - B_0^+U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)G([A_1(\cdot)\bar{X}_0(\cdot), 0])(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Окончательно множество решений краевой задачи (19), (20) будет иметь вид

$$\varphi_1(t, c_\rho) = \bar{\varphi}_1(t, \bar{c}_1) + \bar{X}_1(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(t, \bar{c}_1) &= U(t)U_0(w)\bar{c}_1 + G([A_1(\cdot)\bar{\varphi}_0(\cdot, \bar{c}_0), 0])(t), \\ \bar{X}_1(t) &= U(t)U_0(w)\mathcal{F}_1 + G([A_1(\cdot)\bar{X}_0(\cdot), 0])(t).\end{aligned}$$

Поступая далее аналогичным образом, нетрудно показать (действуя по индукции), что задача определения коэффициента $\varphi_i(t)$ при ε^i ряда (14) сводится к разрешимости краевой задачи

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = A\varphi_i(t) + A_1(t)\varphi_{i-1}(t, c_{i-1}), \quad (24)$$

$$\varphi_i(0) - \varphi_i(w) = 0. \quad (25)$$

При выполнении условий теоремы множество решений краевой задачи (24), (25) будет иметь вид

$$\varphi_i(t, c_\rho) = \bar{\varphi}_i(t, \bar{c}_i) + \bar{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

где

$$\bar{\varphi}_i(t, \bar{c}_i) = U(t)U_0(w)\bar{c}_i + (G[A_1(\cdot)\bar{\varphi}_{i-1}(\cdot, \bar{c}_{i-1}), 0])(t),$$

$$\bar{c}_i = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot) \bar{\varphi}_{i-1}(\cdot), \bar{c}_{i-1}], 0)(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot) \bar{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau) d\tau,$$

и

$$\begin{aligned} \bar{X}_i(t) &= U(t) U_0(w) \mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot) \bar{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), \\ i &= 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{X}_{-1}(t) = U(t) U_0(w). \end{aligned}$$

Доказательство абсолютной сходимости полученного ряда проводится также, как в [11].

Выводы

Рассматриваемое в данной работе уравнение охватывает довольно широкий спектр разных задач от обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных до абстрактных уравнений, представляющих и самостоятельный интерес. В критическом случае рассматриваемая краевая задача может быть как фредгольмовой в простейшем случае, так и нормально-разрешимой в наиболее общем случае, согласно классификации С. Г. Крейна [12].

Следует также отметить, что благодаря процессу пополнения, разработанному в [13], можно добиться того, чтобы оператор $I - U(w)$ имел замкнутое множество значений. Отметим также, что аналогичным образом можно было бы развить теорию возмущений более общей краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \\ \varphi(0) - \varphi(w) &= \alpha + \varepsilon l_1 \varphi(\cdot), \end{aligned}$$

где l_1 — линейная ограниченная вектор-функция. Таким образом, возмущать можно как в правой части рассматриваемого уравнения так и в краевом условии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Гостехиздат, 1955. — 344 с.
2. Яве де ла Р. Введение в КАМ-теорию / Р. де ла Яве. — М., И.: Институт компьютерных исследований, 2003. — 176 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. — М.: Мир. — 454 с.
4. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 287 с.
5. Boichuk A. A. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. — VSP, Utrecht–Boston, 2004. — 317 p.
6. Вишик М. И. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. — 1960. — 15, вып. 3. — С. 3–80.

7. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
8. Рид М. Методы современной математической физики: в 4 т. / М. Рид, Б. Саймон. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978. — 395 с.
9. Biletskyi B. A. Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory / B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi // Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 928587, 12 pages, <http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/>
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
11. Boichuk A. A., Pokunij A. A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space / A. A. Boichuk, A. A. Pokunij // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2007. — V. 38. — P. 29–41.
12. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
13. Ляшко С. И. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений / С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, В. В. Семенов. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.

ЛАБОРАТОРИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, УЛ. ТЕРЕЩЕНКОВСКАЯ, 3, КИЕВ-4, 01601, УКРАИНА.

Поступила 29.09.2012