Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2012, №4(110)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21

ЗМІШАНІ ЕМПІРИЧНІ ВИПАДКОВІ МАРКОВАНІ ТОЧКОВІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У СФЕРИЧНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

М. Г. Семейко

Резюме. Запропонована теорія змішаних емпіричних випадкових упорядкованих маркованих точкових процесів (УМТП) з незалежним маркуванням. На основі теорії УМТП досліджена математична модель змішаного емпіричного пуассонівського випадкового процеса сферичних сегментів.

Вступ

За останнє десятиріччя значно зросла зацікавленість до розвитку теорії і статистичних методів випадкових точкових процесів (ТП) і маркованих точкових процесів (МТП) як дієвого апарату дослідження багатьох проблем сферичної стохастичної геометрії [1], стереологоії [2], математичної морфології [3], біології, екології, космології, економіки. Досить непомітне місце в теорії ТП займають змішані емпіричні процеси, породжені незалежними і однаково розподіленими випадковими елементами (випадковими величинами) $x_1, x_2, ..., x_N$ вимірного простору $(X, \mathfrak{A}_X)$. В змішаних емпіричних точкових процесах вважається, що число елементів N є невід'ємна випадкова величина, що набуває цілих значень і незалежна від випадкових елементів $x_1, x_2, ..., x_N$. Якщо ж число елементів N є фіксованою величиною: $N = n$, то незалежні і однаково розподілені випадкові елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ утворюють емпіричний (n-вибірковий) точковий процес на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$ [4]. Терміни емпіричний точковий процес і змішаний емпіричний точковий процес вперше введено в монографії A. Karr [4]. Дослідженню емпіричних процесів присвячені роботи A. Karr [4], M. Csörqo, P. Revesz [5], P. Gaenssler [6], P. Gaenssler, W. Stute [7], D. Pollard [8], R. Serfling [9].

На існування емпіричних випадкових ТП і МТП вперше звернув увагу Ю. І. Петунін в 2000 р. Дослідження властивостей змішаних емпіричних випадкових упорядкованих точкових процесів (УТП) і маркованих точкових процесів (УМТП) розпочато в роботах [10, 11] сумісно з Ю. І. Петуніним. Ці дослідження продовжені в роботах [12, 13, 14].

Дана стаття пов'язана з роботами [12, 13, 14]. Стаття має таку структуру. В першому розділі надано означення основних тверджень теорії випадкових МТП. В другому розділі розглянуто основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових УМТП з незалежним маркуванням в компактних метричних просторах. За допомогою апарата твірних функцій випадкових лічильних мір побудовано різноманітні моментні міри УМТП, які подано в третьому розділі. В останньому четвертому розділі на основі теорії змішаних емпіричних випадкових УМТП запропонована математична модель змішаного емпіричного пуассонівського випадкового процеса сферичних сегментів.

1. Основні поняття теорії випадкових маркованих точкових процесів

Надамо означення основних понять теорії випадкових ТП і МТП [10, 15], які нам будуть потрібні надалі.

Означення 1. Вимірний простір $(X, \mathfrak{A}_X)$ з виділеною структурою обмежених множин (ОМ) $\mathfrak{B}_X$ називається обмеженим простором (ОП) і позначається трійкою символів $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$ [17].

У випадковому маркованому точковому процесі (МТП) кожна випадкова подія розглядається як упорядкована пара $[x; k]$, що складається із точки положення x та її мітки (марки) k. Точка x є елементом простору положень X і вказує місце, де може відбутись подія, а марка k є елементом простору маркування K і визначає деякий кількісний показник події (наприклад, її величину, інтенсивність, швидкість, потужність). Тому фазовий простір Y такого МТП є декартовим добутком просторів X і $K : Y = X \times K$, де K — напівупорядкована (частково упорядкована [18]) множина з виділеними σ-алгеброю вимірних множин $\mathfrak{A}_K$ і структурою обмежених множин $\mathfrak{B}_K$.

Як завжди під σ-алгеброю в просторі Y будемо вважати декартовий добуток $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K$ σ-алгебр $\mathfrak{A}_X$ і $\mathfrak{A}_K$. Введемо у вимірному просторі $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ структуру обмежених множин $\mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_K$, вважаючи множину $B_Y \subset Y$ обмеженою тоді і тільки тоді, коли існують такі ОМ $B_X \in \mathfrak{B}_X$ і $B_K \in \mathfrak{B}_K$, що $B_Y \subseteq B_X \times B_K$. Для $\mathfrak{B}_Y$ виконуються також всі аксіоми структури обмежених множин [17], так що $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$ стає ОП.

Означення 2. МТП називається ймовірнісний простір $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$; при цьому $\mathcal{E}^* = \{E^*\}$ клас всіх РМ $E^* = ([x_1; k_1], ..., [x_n; k_n], ...)$ із ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, $\mathfrak{X}^*$ — мінімальна σ-алгебра підмножин простору $\mathcal{E}^*$.

Означення 3. МТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається простим в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, якщо для майже всіх його траєкторій $E^* = ([x_1; k_1], ..., [x_n; k_n], ...)$ виконується умова: $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, тобто $\forall x \in X$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, \{x\} \times K) \leq 1\} = 1,$$

де $N^*(E^*, B_Y) = card[E^* \bigcap B_Y]$ — випадкова лічильна міра МТП $(B_Y \in \mathfrak{E}_y = \mathfrak{A}_Y \bigcap \mathfrak{B}_Y)$.

Означення 4. Випадковий МТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається строго простим в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, якщо для майже всіх його траєкторій E^* виконується умова $x_i \neq x_j$ і $k_i \neq k_j$ $(i \neq j)$, тобто $\forall x \in X,\ k \in K$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, \{x\} \times K) \leq 1\} = 1,$$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, X \times \{k\}) \leq 1\} = 1.$$

Означення 5. Випадковий МТП ($\mathcal{E}^*$, $\mathfrak{X}^*$, P^*) називається скінченним в ОП ($Y, \mathfrak{A}_Y$, $\mathfrak{B}_Y$), якщо з ймовірністю одиниця об'єм майже кожної траєкторії E^* процесу є скінченним: $P^*\{E^* : card[E^*] = N^*(E^*, Y) < \infty\} = 1$.

Означення 6. Процес $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається скінченним простим упорядкованим МТП (УМТП) в ОП ($Y = X \times K$, $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K$, $\mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_K$), якщо його проекція $(\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P) = P_{r_X}(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ на простір положень X є скінченним простим УТП в ОП положень $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$ [19].

Довільна траєкторія E^* УМТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ є скінченною простою упорядкованою РМ (вектором) із фазового простору $Y = X \times K$:

$$E^* = (y_1, ..., y_i, ..., y_n) = ([x_1; k_1], ..., [x_i; k_i], ..., [x_n; k_n]),$$

де x_i — точка положення, k_i — марка випадкової події $y_i = [x_i; k_i]$.

2. Основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових упорядкованих маркованих точкових процесів

Кожна траєкторія E^* скінченного строго простого упорядкованого маркованого точкового процесу (УМТП) $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ в обмеженому просторі (ОП) ($Y = X \times K, \mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K, \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_X \odot \mathcal{B}_K$) є розрідженою множиною (РМ) декартового добутку $Y = X \times K$ [10]. Якщо X — компактний метричний простір положень з мірою ϑ, метрикою $\rho_X(x_i, x_j)$ і природнім чином вибраними структурами вимірних множин $\mathfrak{A}_X$ й обмежених множин $\mathfrak{B}_X$, а простір марок K є відрізком $[a, b] \subset R^1$, то фазовий простір $Y = X \times K$ можна зробити компактним метричним простором, якщо відстань між точками $y_i = [x_i; k_i]$, $y_j = [x_j; k_j] (i \neq j)$ визначити за формулою $\rho_Y([x_i; k_i], [x_j; k_j]) = \rho_X(x_i, x_j) + |k_i - k_j|$.

Розглянемо такий випадковий механізм побудови УМТП. Введемо три випадкові величини: $x = x(\omega)$, $k = k(\omega)$, $\nu = \nu(\omega)$. Будемо вважати, що ці випадкові величини задовольняють умовам:

2.1. Випадкові величини $x(\omega)$, $k(\omega)$ та цілочислова невід'ємна випадкова величина $\nu(\omega)$ визначені на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

2.2. Випадкові величини $x(\omega)$, $k(\omega)$ та $\nu(\omega)$ набувають відповідно значення із вибіркових ймовірнісних просторів $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$, $(K, \mathfrak{A}_K, P_k)$ та $(Z_+, \mathfrak{A}_{Z_+}, P_\nu)$, де

$$P_x(B_X) = \mathbb{P}\{\omega : x(\omega) \in B_X\} = \mu_1(B_X) \ (B_X \in \mathfrak{A}_X),$$

$$P_k(B_K) = \mathbb{P}\{\omega : k(\omega) \in B_K\} = \mu_2(B_K) \ (B_K \in \mathfrak{A}_K),$$

$$P_\nu(B_{Z_+}) = \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) \in B_{Z_+}\} \ (B_{Z_+} \in \mathfrak{A}_{Z_+}).$$

2.3. Розподіл $P_x(B_X)$ випадкової величини $x = x(\omega)$ вважається абсолютно неперервним відносно міри ϑ у вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$.

2.4. Розподіл $P_k(B_K)$ випадкової величини $k = k(\omega)$ вважається абсолютно неперервним відносно міри Лебега у вимірному просторі $(R^1, \mathfrak{A}_{R^1})$.

2.5. $x(\omega)$, $k(\omega)$ та $\nu(\omega)$ — незалежні в сукупності випадкові величини.

На σ-алгебрі борелівських множин $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K$ фазового простору $Y = X \times K$ розглянемо добуток ймовірнісних мір $P_y = P_x \otimes P_k$. Тоді $(Y, \mathfrak{A}_Y, P_y)$ можна вважати як вибірковий ймовірнісний простір двовимірної випадкової величини $y(\omega) = [x(\omega); k(\omega)]$ з ймовірнісною мірою

$$P_y(B_Y) = P_y(B_X \times B_K) = \mathbb{P}\{\omega : [x(\omega); k(\omega)] \in B_X \times B_K\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\omega : x(\omega) \in B_X, k(\omega) \in B_K\} = \mathbb{P}\{\omega; x(\omega) \in B_X\}\mathbb{P}\{\omega : k(\omega) \in B_K\} =$$

$$= P_x(B_X)P_k(B_K) = \mu_1(B_X)\mu_2(B_K) = \mu(B_X \times B_K) = \mu(B_Y),$$

де $B_Y = B_X \times B_K \in \mathfrak{E}_Y = \mathfrak{A}_Y \cap \mathcal{B}_Y$.

Нехай G_1 і G_2 — два незалежних випадкових експерименти, яким відповідають вибіркові ймовірнісні простори $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$ і $(K, \mathfrak{A}_K, P_k)$, тоді $G = (G_1, G_2)$ — "складений" випадковий експеримент з вибірковим ймовірнісним простором $(Y, \mathfrak{A}_Y, P_y)$. Випадково (у відповідності з розподілом ймовірностей P_ν випадкової величини $\nu(\omega)$) вибирається число $n \in Z_+$, а потім кожна траєкторія $E^* = ([x_1; k_1], ..., [x_i; k_i], ..., [x_n; k_n])$ об'єма n УМТП утворюється в результаті n незалежних повторень одного й того ж випадкового "складеного" експерименту $G = (G_1, G_2)$, що полягає у простому випадковому виборі без повернення маркованої пари $y_i = [x_i; k_i]$ $(i = \overline{1, n})$ із фазового простору $Y = X \times K$: точки положення x_i із простору X (експеримент G_1) і марки k_i із простору K (експернимент G_2).

Отже, траєкторію E^* можна розглядати як реалізацію у вибірковому вимірному просторі $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ послідовності

$$E^* = E^*(\omega) = (y_1(\omega), ..., y_i(\omega), ..., y_{\nu(\omega)}(\omega)) =$$

$$= ([x_1(\omega); k_1(\omega)], ..., [x_i(\omega); k_i(\omega)], ..., [x_{\nu(\omega)}(\omega); k_{\nu(\omega)}(\omega)]),$$

де $y_i(\omega) = [x_i(\omega); k_i(\omega)]$, випадкового об'єму $\nu(\omega)$ незалежних і однаково розподілених з ймовірнісною мірою P_y випадкових елементів (випадкових двовимірних величин), визначених на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Очевидно, випадкову величину $\nu(\omega)$ можна подати таким чином:

$$\nu(\omega) = N^* = N^*(E^*, Y) = card[E^* \bigcap Y] = \sum_{y \in E^*} I_Y(y),$$

де $N^*(E^*, Y)$ — випадкова величина, що визначає кількість точок множини E^* у просторі $Y, I_Y(y)$ — характеристична функція простору Y.

Означення 7. Випадковий процес $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називатимемо строго простим змішаним емпіричним УМТП з незалежним маркуванням в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathcal{B}_Y)$ [10, 11].

Для заданого n ($N^* = n$) і довільної фіксованої обмеженої вимірної множини $B_Y = B_X \times B_K (B_X \in \mathfrak{E}_X, B_K \in \mathfrak{A}_K)$ розглянемо випадкову емпіричну лічильну міру УМТП

$$N^*(B_Y) = N^*(E^*, B_Y) = card[E^* \bigcap B_Y] = \sum_{i=1}^{n} I_{B_Y}([x_i; k_i]).$$

3. Моментні міри змішаного емпіричного випадкового УМТП з незалежним маркуванням

Побудуємо сумісну твірну функцію випадкових лічильних мір $\{N^*(B_Y^j), j = \overline{1,s}\}$, де $\bigcup_{j=1}^{s} B_Y^j = Y (B_Y^i \bigcap B_Y^r = \varnothing,\ 1 \le i, r \le s,\ i \ne r)$, використовуючи обчислення із [13, 14]:

$$\Pi_{N^*(B_Y^1),...,N^*(B_Y^s)}(z_1, ..., z_s) = \Pi_{N^*}(z_1 \mu(B_Y^1) + ... + z_s \mu(B_Y^s)) =$$
$$= \Pi_{N^*}(z_1 \mu_1(B_X^1) \mu_2(B_K^1) + ... + z_s \mu_1(B_X^s) \mu_2(B_K^s)), \qquad (1)$$

де $\Pi_{N^*}(z) = M[z^{N^*}]$ — твірна функція випадкової величини N^*.

Введемо позначення мір УМТП $\mathcal{D}$:
$\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = M[\{N^*(B_Y^j)\}^h]$ — моментна міра порядку $h (h = 1, 2, ...)$;
$\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times ... \times B_Y^{j_h}) = M[N^*(B_Y^{j_1})...N^*(B_Y^{j_h})]$ — змішана моментна міра порядку $h (1 \le j_1 < ... < j_h \le s,\ h = \overline{1,s})$;
$\alpha_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = M[N^*(B_Y^j)(N^*(B_Y^j) - 1)...(N^*(B_Y^j) - h + 1)]$ — факторіальна моментна міра порядку h;
$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = M[N^*(B_Y^{j_1}) N^*(B_Y^{j_2})]$ — змішана моментна міра другого порядку $(1 \le j_1, j_2 \le s,\ j_1 \ne j_2)$;
$D(N^*(B_Y^j)) = \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) - \{\nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j)\}^2$ — дисперсія лічильної міри $N^*(B_Y^j)$;
$cov[N^*(B_Y^{j_1}), N^*(B_Y^{j_2})] = \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) - \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_1}) \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_2})$ — коваріаційна міра залежності між лічильними мірами $N^*(B_Y^{j_1})$ і $N^*(B_Y^{j_2})$.

Проводячи обчислення, подібні до обчислень із [13, 14] одержимо:

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times ... \times B_Y^{j_h}) = \mu(B_Y^{j_1})...\mu(B_Y^{j_h}) \Pi_{N^*}^{(h)}(1), \qquad (2)$$

$$\alpha_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = \mu^h(B_Y^j) \Pi_{N^*}^{(h)}(1), \quad \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j) = \mu(B_Y^j) \Pi'_{N^*}(1), \qquad (3)$$

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) = \mu^2(B_Y^j) \Pi''_{N^*}(1) + \mu(B_Y^j) \Pi'_{N^*}(1), \qquad (4)$$

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = \mu(B_Y^{j_1}) \mu(B_Y^{j_2}) \Pi''_{N^*}(1), \qquad (5)$$

$$D(N^*(B_Y^j)) = \mu^2(B_Y^j)[\Pi''_{N^*}(1) - \{\Pi'_{N^*}(1)\}^2] + \mu(B_Y^j) \Pi'_{N^*}(1). \qquad (6)$$

4. Випадковий процес сферичних сегментів

Як відомо, двомірна евклідова сфера

$$\widetilde{S}^2 = S^2 \setminus \{x(0,0,1), x(0,0,-1)\} = \{x(\varphi,\theta) : (\varphi,\theta) \in \Delta\}$$

одиничного радіуса з виколотими точками $x(0,0,1)$ і $x(0,0,-1)$, де (φ,θ) — сферичні координати, $\Delta = \{(\varphi,\theta) : 0 \le \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$, є передкомпактним метричним простором [20], якщо віддаль $r_{\widetilde{S}^2}(x_1,x_2)$ між двома довільними неантиполярними точками $x_1, x_2 \in \widetilde{S}^2$ визначити таким чином: $r_{\widetilde{S}^2}(x_1,x_2) = |(x_1x_2)|$ ((x_1x_2) — найменша дуга великого кола сфери $\widetilde{S^2}$, що проходить через точки x_1 і x_2) [21]. Сферу $\widetilde{S}^2$ разом з σ-алгеброю $\mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}$ її борелівських множин можна наділити структурою обмеженого простору (ОП) $(\widetilde{S}^2, \mathfrak{A}_{\widetilde{S}^2}, \mathfrak{B}_{\widetilde{S}^2})$ [16, 17].

Нехай $(K, \mathfrak{A}_K, \mathfrak{B}_K)$ — обмежений простір, де $K = [0, A]$ — інтервал і A значно менше $\pi (A << \pi)$.

На сфері $\widetilde{S}^2$ розглянемо скінченний упорядкований випадковий процес сегментів (ВПС) $\mathcal{A}$ [12], кожна траєкторія $E_{\mathcal{A}}$ якого вважається упорядкованою множиною, що містить n замкнутих напівсферичних сегментів:

$$E_{\mathcal{A}} = (Q_1(u_1(\varphi_1,\theta_1),a_1), ..., Q_i(u_i(\varphi_i,\theta_i),a_i), ..., Q_n(u_n(\varphi_n,\theta_n),a_n)),$$

що розміщені випадковим чином на $\widetilde{S}^2$, де $u_i(\varphi_i,\theta_i)$ — центри сегментів, (φ_i,θ_i) — їх сферичні координати, a_i — кутові діаметри сегментів $(a_i \in K)$, n — число сегментів траєкторії $E_{\mathcal{A}}$, причому для всіх i,j $(i \ne j; i,j = \overline{1,n})$ виконуються умови $(\varphi_i,\theta_i) \ne (\varphi_j,\theta_j)$ та $a_i \ne a_j$.

Оскільки довільний сегмент $Q_i(u_i(\varphi_i,\theta_i),a_i)$ на сфері $\widetilde{S}^2$ взаємно однозначно визначається сукупністю параметрів (точкою) $[\varphi_i,\theta_i;a_i]$ простору $Z = \Delta \times K$, то кожній траєкторії $E_{\mathcal{A}}$ ВПС $\mathcal{A}$ відповідає упорядкована строго проста розріджена множина параметрів

$$E^*_{\mathcal{D}} = (z_1, ..., z_i, ..., z_n) = ([\varphi_1,\theta_1;a_1], ..., [\varphi_i,\theta_i;a_i], ..., [\varphi_n,\theta_n;a_n])$$

в просторі Z, де $z_i = [\varphi_i,\theta_i;a_i]$, $(\varphi_i,\theta_i) = \delta_i$ — точки положення, a_i — їх марки. Таким чином, ВПС $\mathcal{A}$ на сфері $\widetilde{S}^2$ відповідає скінченний строго простий випадковий упорядкований МТП (УМТП) параметрів $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*_{\mathcal{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D}}, P^*_{\mathcal{D}},)$ з траєкторіями $E^*_{\mathcal{D}}$ в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, \mathfrak{B}_Z)$.

Будемо вважати, що кожна траєкторія $E^*_{\mathcal{D}}$ процеса $\mathcal{D}$ одержана в результаті дії такого ймовірнісного механізму. Введемо чотири випадкові величини: $\delta = \delta(\omega) = (\varphi(\omega), \theta(\omega))$, $a = a(\omega)$ і $\nu = \nu(\omega)$, що задовольняють умовам:

1) неперервні випадкові величини $\varphi(\omega)$, $\theta(\omega)$, $a(\omega)$ і цілочислова невід'ємна випадкова величина $\nu(\omega)$ визначені на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$;

2) випадкові величини $\delta(\omega)$, $a(\omega)$ і $\nu(\omega)$ приймають відповідно значення із вибіркових ймовірнісних просторів $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, P_\delta)$, $(K, \mathfrak{A}_K, P_a)$ і $(Z_+, \mathfrak{A}_{Z_+}, P_\nu)$,

де ймовірнісні міри мають вигляд:

$$P_\delta(B_\Delta) = \mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta\} = \mu_1(B_\Delta)(B_\Delta \in \mathfrak{A}_\Delta),$$

$$P_a(B_K) = \mathbb{P}\{\omega : a(\omega) \in B_K\} = \mu_2(B_K)(B_K \in \mathfrak{A}_K),$$

$$P_\nu(B_{Z_+}) = \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) \in B_{Z_+}\}\ (B_{Z_+} \in \mathfrak{A}_{Z_+})$$

і розподіли P_δ і P_a розглядаються відповідно як абсолютно неперервні відносно міри Лебега в просторах $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta)$ і $(K, \mathfrak{A}_K)$ із щільностями ймовірностей $f_1(\varphi, \theta)$ і $f_2(a)$;

3) $\varphi(\omega),\ \theta(\omega),\ a(\omega)$ і $\nu(\omega)$ — незалежні в сукупності випадкові величини.

На σ-алгебрі борелівських множин $\mathfrak{A}_Z = \mathfrak{A}_\Delta \otimes \mathfrak{A}_K$ введемо добуток ймовірнісних мір $P_Z = P_\delta \otimes P_a$. Тоді $(Z, \mathfrak{A}_Z, P_z)$ будемо вважати вибірковим ймовірнісним простором випадкової величини $z(\omega) = [\delta(\omega); a(\omega)]$ з ймовірнісною мірою

$$P_z(B_\Delta \times B_K) = \mathbb{P}\{\omega : [\delta(\omega); a(\omega)] \in B_\Delta \times B_K\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta,\ a(\omega) \in B_K\} = \mathbb{P}\{\omega : \delta(\omega) \in B_\Delta\}\mathbb{P}\{\omega : a(\omega) \in B_K\} =$$

$$= \mu_1(B_\Delta)\mu_2(B_K) = \mu(B_\Delta \times B_K)\ (B_\Delta \times B_K \in \mathfrak{A}_Z).$$

Позначимо через G_1 і G_2 — незалежні випадкові експерименти, що породжують вибіркові ймовірнісні простори $(\Delta, \mathfrak{A}_\Delta, P_\delta)$ і $(K, \mathfrak{A}_K, P_a)$; тоді $G = (G_1, G_2)$ — "складений" випадковий експеримент з вибірковим ймовірнісним простором $(Z, \mathfrak{A}_Z, P_z)$. Використовуючи процедуру, описану в розділі 2, будуємо траєкторію $E^*_{\mathcal{D}}$ у вигляді вибірки: $E^*_{\mathcal{D}} = ([\delta_1; a_1], ..., [\delta_i; a_i], ..., [\delta_n; a_n])$ $(\delta_i \neq \delta_j, a_i \neq a_j, i \neq j)$ скінченного об'єму n, що одержана простим випадковим вибором без повернення із генеральної сукупності $Z = \Delta \times K$ значень випадкової величини $z(\omega) = [\delta(\omega); a(\omega)]$, що має сумісний розподіл $P_z = P_\delta \otimes P_a$.

Означення 8. Випадковий процес $(\mathcal{E}^*_{\mathcal{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D}}, P^*_{\mathcal{D}})$ будемо називати скінченним строго простим змішаним емпіричним УМТП параметрів з незалежним маркуванням в ОП $(Z, \mathfrak{A}_Z, \mathfrak{B}_Z)$.

Теорема 1. [14]. *Якщо:*

1)випадкова величина $\nu = \nu(\omega)$ розподілена по закону Пуассона з параметром λ;

2)випадкова величина ν незалежна від випадкових величин $\{[\delta_i(\omega); a_i(\omega)] :\ i = \overline{1, \nu(\omega)}\}$;

3) $N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B_Z) = \sum_{i=1}^{\nu} I_{B_Z}([\delta_i; a_i])$ — випадкова лічильна міра УМТП $\mathcal{D}(B_Z \in \mathfrak{A}_Z)$;

4) $\{B_Z^j = B_\Delta^j \times B_K^j : B_\Delta^j \in \mathfrak{A}_\Delta,\ B_K^j \in \mathfrak{A}_K,\ j = \overline{1, s},\ s \geq 2\}$ — довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин простору Z, що попарно не перетинаються, то:

а) міра $N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B^j_Z)$ $(j=\overline{1,s})$ *розподілена по закону Пуассона* $\mathcal{P}(\lambda\mu(B^j_Z))$ *з параметричною мірою* $\lambda\mu(B^j_Z)$:

$$P^*_{\mathcal{D}}\{E^*_{\mathcal{D}} : N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B^j_Z) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu(B^j_Z)]^{k_j}}{k_j!} exp(-\lambda\mu(B^j_Z)),$$

де $\mu(B^j_Z) = P_z(B^j_Z),\ k_j = 0, 1, 2, ...;$

б) міри $\{N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B^j_Z),\ j=\overline{1,s}\}$ *— незалежні в сукупності випадкові величини:*

$$P^*_{\mathcal{D}}\{E^*_{\mathcal{D}} : N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B^j_Z),\ j=\overline{1,s}\} = \prod_{j=1}^{s} P^*_{\mathcal{D}}\{E^*_{\mathcal{D}} : N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B^j_Z) = k_j\}.$$

Наслідок 1. *Процес параметрів* $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*_{\mathcal{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D}}, P^*_{\mathcal{D}})$ *є змішаний емпіричний скінченний строго простий випадковий УМТП з незалежним маркуванням в ОП* $(Z, \mathfrak{A}_Z, \mathfrak{B}_Z)$ *розподілений по закону Пуассона* $\mathcal{P}(\lambda\mu(B_Z))$.

Означення 9. ВПС $\mathcal{A}$, якому відповідає змішаний емпіричний УМТП параметрів $\mathcal{D}$, розподілений по закону Пуассона $\mathcal{P}(\lambda\mu(B_Z))$, будемо називати змішаним емпіричним пуассонівським випадковим процесом сферичних сегментів.

Оскільки твірна функція $\Pi_{N^*}(z)$ випадкової величини $N^* = \nu(\omega)$ має похідну $\Pi'_{N^*}(1) = \lambda$ [13], то із формули (3) одержуємо моментну міру $\nu^{(1)}_{\mathcal{D}}(B_Z) = M[N^*(E^*_{\mathcal{D}}, B_Z)]$ першого порядку ВПС $\mathcal{A}$.

Теорема 2. [12]. *Якщо* $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*_{\mathcal{D}}, \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D}}, P^*_{\mathcal{D}})$ *— змішаний емпіричний випадковий УМТП параметрів з незалежним маркуванням, розподілений по закону Пуассона* $\mathcal{P}(\lambda\mu(B_Z))$, *то для довільної вимірної множини* $B_Z \in \mathfrak{A}_Z$ *його моментна міра* $\nu^{(1)}_{\mathcal{D}}(B_Z)$ *має вигляд:*

$$\nu^{(1)}_{\mathcal{D}}(B_Z) = \int\underset{B_Z}{\int}\int \lambda f_1(\varphi,\theta) f_2(a) d\varphi d\theta da.$$

Зауваження 1. Використовуючи твірну функцію (1) і результати (2)–(6) можна також одержати інші моментні міри УМТП параметрів $\mathcal{D}$ і відповідно моментні міри пуассонівського процеса сферичних сегментів $\mathcal{A}$.

Висновки

У роботі запропоновано удосконалена модель змішаного емпіричного випадкового упорядкованого маркованого точкового процеса (УМТП) в компактних метричних просторах. Досліджені моментні міри УМТП, використовуючи апарат твірних функцій випадкових лічильних мір. Ефективність теорії УМТП продемонстрована при побудові математичної моделі змішаного емпіричного пуассонівського випадкового процеса сферичних сегментів. Отримані результати становлять інтерес для спеціалістів з проблем стохастичної геометрії, стереології, математичної морфології.

Література

1. Семейко Н. Г. Исследование морфометрических характеристик поровых комплексов ядерной оболочки сенсорного нейрона методами сферической стохастической геометрии / Н. Г. Семейко, Ю. И. Петунин, В. П. Яценко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №6.– С. 175–182.
2. Baddeley A. Stereology for Statisticians / A. Baddeley, E. B. Vedel Jensen. — New York: Chapman and Hall / CRC, 2005. — 395 p.
3. Watson G. S. Mathematical Morfology (Ed. I.N. Srivastava, A Survey of Statistical Design and Linear Models) / G. S. Watson. — "North-Holland Publishing Company", 1975. — 547–553 p.
4. Karr A. F. Point Processes and Their Statistical Inference / A. F. Karr. — New York: Marcel Dekker, 1991. — 490 p.
5. Csörgö M. Strong Approximation in Probability and Statistics / M. Csörgö, P. Revesz. — New York: Academic Press, 1981.
6. Gaenssler P. Empirical Processes: On Some Basic Results from the Probabilistic Point of View / P. Gaenssler. — Hayward, CA: "Institute of Mathematical Statistics", 1984.
7. Gaenssler P. On uniform convergence of measures with application to uniform convergence of empirical distribution / P. Gaenssler, W. Stute // Lect. Notes Math. — 1976. — V. 566. — P. 45– 56.
8. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes / D. Pollard. — New York: Springer-Verlag, 1984.
9. Serfling R. Approximation Theorems of Mathematical Statistics / R. Serfling. — New York: Wiley, 1980.
10. Петунін Ю. І. Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 1 / Ю. І. Петунін, М. Г. Семейко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006. — 74 — С. 98–107.
11. Петунін Ю. І. Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 2 / Ю. І. Петунін, М. Г. Семейко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006. — 75 — С. 121–126.
12. Семейко Н. Г. Смешанный эмпирический пуассоновский случайный процесс сферических сегментов / Н. Г. Семейко // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — №5. — С. 119–130.
13. Семейко М. Г. Моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів в компактних метричних просторах. 1 / М. Г. Семейко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2013. — 88.
14. Семейко М. Г. Моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів в компактних метричних просторах. 2 / М. Г. Семейко // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2014. — 90.
15. Moyal J. E. The general theory of stochastic population processes / J. E. Moyal // Acta Math. — 1962. — 108, №1. — P. 1–31.
16. Керстан Й. Безгранично делимые точечные процессы / Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. — Москва: Наука, 1982. — 391 с.
17. Ripley B. D. Locally finite random sets: foundation for point process theory / B. D. Ripley // Ann. Probab. — 1976. — 4, №6. — P. 983–994.
18. Биркгоф Г. Теория структур / Г. Биркгоф. — Москва: Изд. иностр. лит., 1952. — 407 с.

19. Петутин Ю. И. Случайный процесс сегментов на двумерной евклидовой сфере. I / Ю. И. Петутин, Н. Г. Семейко // Теория вероятностей и математична статистика. — 1988. — 39. — С. 107–113.
20. Бурбаки Н. Общая топология / Н. Бурбаки. — Москва: Физматгиз, 1958. — 324 с.
21. Miles R. E. Random points, set and tessellations on the surface of a sphere / R. E. Miles // Sankhya. Ser. A. — 1971. — 33, №2. — P. 145–174.

Кафедра вищої математики, факультет управління персоналом та маркетингу, Київський Національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана, проспект Перемоги, 54/1, Київ 03680, Україна

Надійшла 15.11.12