Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2012, №4(110) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ (ЗА РОБОТАМИ НАУКОВОЇ ШКОЛИ Ю. І. ПЕТУНІНА)

С. І. Ляшко, В. В. Семенов

Резюме. В статті наведено огляд деяких результатів наукової школи Ю. І. Петуніна, які пов'язані з узагальненими ров'язками екстремальних задач.

Вступ

Починаючи з 2002 року Ю. І. Петунін приділяв багато уваги проблемі побудови теорії узагальнених розв'язків екстремальних задач. Для досліджень у цьому напрямі він залучив Д. А. Номіровського та В. В. Семенова. Відштовхуючись від попередніх результатів дослідження задач узагальненого керування [1, 2] та теорії підпросторів спряжених банахових просторів [3], в 2008 році варіант указаної теорії був побудований. Більшість результатів підсумовано у монографіях [4, 5]. Загальна схема пошуку узагальнених розв'язків екстремальних задач (узагальнених екстремальних елементів в термінології Ю. І. Петуніна) давно відома: необхідно щільно вкласти допустиму множину в секвенційно компактний топологічний простір, такий, що цільовий функціонал буде секвенційно напівнеперервним знизу в його топології. Для Ю. І. Петуніна та його колег мотиваційними прикладами були лінійні неперервні функціонали та оператори, що не досягають норми, та задачі опуклого програмування. Це обумовило певну специфіку в реалізації абстрактної схеми.

Мета даної статті — дати огляд основних результатів по узагальненій розв'язності екстремальних задач, що одержані Ю. І. Петуніним та його колегами.

1. Узагальнені екстремальні елементи для лінійних та додатньо однорідних опуклих функціоналів

У роботі Д. А. Номіровського, Ю. І. Петуніна та М. Ю. Савкіної [6] було введено поняття узагальненого розв'язку екстремальної задачі. Автори розглянули задачу мінімізації неперервного функціонала φ, заданого у нескінченновимірному банаховому просторі E і обмеженого на обмеженій замкненій множині $M \subseteq E$. Звичайно, що φ не завжди досягає інфімуму на M. Суть конструкції узагальненого розв'язку екстремальної задачі

$$\varphi \to \inf_M$$

наступна. Припустимо, що на E задано векторну і хаусдорфову топологію τ, яка є слабшою за сильну топологію простору E; функціонал φ —

неперервний на M у топології τ. Узагальненим екстремальним (мінімальним) елементом $\bar{x}$ функціонала φ на множині M назвемо такий елемент поповнення $(M)^\tau$ множини M за введеною топологією τ[1], що

$$\inf_{x\in M} \varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x}),$$

де $\bar{\varphi}$ — розширення φ за неперервністю на $(M)^\tau$ за топологією τ. Бажано обрати топологію τ так, щоб множина $(M)^\tau$ була компактною — це гарантує існування узагальнених екстремальних елементів.

Розглянемо реалізацію абстрактної конструкції на прикладі задачі

$$|f| \to \sup_{B_E},$$

де B_E — замкнена одинична куля банахового простору E, $f \in E^*$. Нехай банаховий простір E щільно вкладений в банаховий простір F (тобто, існує лінійний неперервний ін'єктивний оператор $i : E \to F$ зі щільною в F областю значень). Нагадаємо, що при цьому E називається компактно вкладеним в F, якщо оператор i компактний, тобто замикання образу одиничної кулі B_E простору E у нормі F є компактною множиною простору F. Як відомо, в цьому випадку спряжений простір F^* буде алгебраїчно і топологічно вкладеним в E^* (за допомогою оператора $i^* : F^* \to E^*$), тому для довільного лінійного функціонала $f \in F^*$ має сенс включення $f \in E^*$, а також існує такий елемент $\bar{x}^* \in F$, що має місце рівність

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x\in B_E} |f(x)| = \sup_{x\in (B_E)^F} |f(x)| = |f(\bar{x})|, \;\; \bar{x} \in (B_E)^F,$$

оскільки замикання $(B_E)^F$ одиничної кулі B_E у просторі F є компактною множиною, а звуження функціонала $f \in F^*$ на $(B_E)^F$ буде неперервною функцією. Отже, $\bar{x}$ — узагальнений екстремальний (максимальний) елемент, на якому функціонал f досягає своєї норми. Зауважимо, що у випадку нерефлексивного банахового простору E в спряженому просторі E^* обов'язково існують функціонали f, які не досягають верхньої межі на одиничній кулі B_E. Але, якщо такий функціонал f належить простору F^*, то для нього існує узагальнений максимальний елемент на замиканні $(B_E)^F$ одиничної кулі B_E в сильній топології простору F.

Відштовхуючись від наведених міркувань, Ю. І. Петунін поставив задачу конструктивної побудови простору F.

Зауваження 1. Легко навести приклад такого локально–опуклого лінійного топологічного простору F, що $E \subset F$ — компактне вкладення. Слід лише покласти $F = E^{**}$ з топологією $\sigma(E^{**}, E^*)$. Проте, коли E — нескінченновимірний банаховий простір, топологія $\sigma(E^{**}, E^*)$ є неметризованою, а для застосувань іноді важливо, щоб простір F був лінійним нормованим.

Спираючись на результати [3], в [6] доведено таку теорему вкладення.

[1]Оскільки топологія τ узгоджується зі структурою векторного простору E, то вона породжує на E рівномірну структуру, і тому є сенс вести мову про поповнення $(M)^\tau$ множини M за топологією τ (точніше, за відповідною рівномірною структурою).

Теорема 1. *Для кожного сепарабельного банахового простору* $(E, \|\cdot\|_E)$ *існує такий сепарабельний банаховий простір* $(F, \|\cdot\|_F)$*, що* E *щільно та компактно вкладений в* F.

Зауважимо, що простір F можна побудувати так, щоб забезпечити для заданого зліченного набору $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\} \subseteq E^*$ виконання вкладення $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\} \subseteq F^*$.

З теореми 1 безпосередньо випливає

Теорема 2 ([6]). *Довільний лінійний неперервний функціонал, що визначений на одиничній кулі сепарабельного банахового простору, має узагальнений екстремальний (максимальний) елемент, на якому цей функціонал досягає своєї норми.*

2. Компактне вкладення в банаховий простір

У зв'язку з теоремою 1 у 2009 році на своєму семінарі Ю. І. Петунін поставив таку задачу. Нехай задано два банахових простори E та F. Питання:

коли простір E щільно та компактно вкладений в простір F?

Тобто, слід з'ясувати за яких умов існує лінійний компактний оператор $i : E \to F$ з властивостями: $N(i) = \{0\}$, $\overline{R(i)} = F$.

Оскільки область значень лінійного компактного оператора є сепарабельним лінійним підпростором, то в несепарабельний банаховий простір F жоден банаховий простір E не вкладається щільно та компактно.

У книзі [5] опублікована отримана В. В. Семеновим теорема — відповідь на поставлене питання.

Теорема 3. *Нехай* E, F *— нескінченновимірні банахові простори. Тоді такі твердження рівносильні:*

1) *простір* F *— сепарабельний, простір* E^* *— сепарабельний в топології* $\sigma(E^*, E)$*;*
2) *простір* E *щільно та компактно вкладається в простір* F.

3. Узагальнені екстремальні елементи опуклих функціоналів

У роботі [7] (див. також [4, 5]) було запропоновано та досліджено конструкцію узагальненої постановки опуклих екстремальних задач. Зокрема, було показано, що опуклий неперервний функціонал, визначений на замкненій опуклій і обмеженій підмножині сепарабельного банахового простору, має узагальнений екстремальний елемент.

Розглядались екстремальні задачі вигляду

$$f \to \inf_X, \tag{1}$$

де X — непорожня опукла обмежена та замкнена підмножина сепарабельного банахового простору $(E, \|\cdot\|_E)$, функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ — неперервний та опуклий. У такій постановці без додаткових припущень (наприклад, рефлексивність простору E) сформульована задача може не мати розв'язків.

Основна ідея конструкції роботи [7] — ізометричне і щільне у спеціальній слабкій топології вкладення вихідного банахового простору у деякий спряжений банаховий простір. Останній простір буде залежати від елементів задачі (1) — функціонала f та допустимої множини X. Основою підходу є три наступні теореми.

Теорема 4. *Нехай X — опукла, обмежена та замкнена підмножина сепарабельного банахового простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Тоді існує лінійний підпростір $F \subseteq E^*$, такий, що:*

1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ *— сепарабельний лінійний нормований простір;*
2) F *— підпростір, характеристика[2] якого дорівнює одиниці, тобто,*

$$\forall x \in E: \ \ \|x\|_E = \sup_{y \in F \cap B_{E^*}} \left| \langle y, x \rangle_{E^*, E} \right| ;$$

3) *довільна точка $x \in E \backslash X$ строго відділяється від множини X елементом підпростору F, тобто,*

$$\forall x \in E \backslash X \ \ \exists y \in F: \ \ \langle y, x \rangle_{E^*, E} > \sup_{x' \in X} \left\langle y, x' \right\rangle_{E^*, E}.$$

Якщо банаховий простір $(E, \|\cdot\|_E)$ є рефлексивним, то замикання побудованого у теоремі 4 лінійного підпростору $F \subseteq E^*$ збігається з E^*, оскільки топологічний спряжений простір до рефлексивного простору Банаха не містить власних замкнених та тотальних лінійних підпросторів.

Теорема 5. *Нехай X — непорожня підмножина сепарабельного банахового простору $(E, \|\cdot\|_E)$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — напівнеперервний знизу опуклий функціонал, $\operatorname{int} \operatorname{dom} f \supseteq X$. Тоді існує такий лінійний підпростір $F \subseteq E^*$, що:*

1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ *— сепарабельний лінійний нормований простір;*
2) *якщо для всіх $y \in F$ маємо $\langle y, x_n \rangle_{E^*, E} \to \langle y, x \rangle_{E^*, E}$ при $n \to \infty$ ($x \in X$, $x_n \in X$), то $f(x) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} f(x_n)$.*

Твердження наступної теореми безпосередньо випливає з теорем 4, 5.

Теорема 6. *Нехай X — непорожня, опукла, обмежена та замкнена підмножина сепарабельного банахового простору $(E, \|\cdot\|_E)$, функціонали $f_k : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($k \in \mathbb{N}$) напівнеперервні знизу, опуклі та $\operatorname{int} \operatorname{dom} f_k \supseteq X$. Тоді існує лінійний підпростір $F \subseteq E^*$ з такими властивостями:*

1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ *— сепарабельний банаховий простір;*
2) F *— лінійний підпростір E^* характеристики одиниця;*
3) *довільна точка $x \in E \backslash X$ строго відділяється від множини X елементом підпростору F;*

[2]Нагадаємо [3, с. 29], що характеристикою лінійного підпростору $F \subseteq E^*$ називають число $r(F) = \inf_{x \in S_E} \sup_{y \in F \cap B_{E^*}} \langle y, x \rangle_{E^*, E}$. Ясно, що характеристика нетотального лінійного підпростору дорівнює нулю. Характеристика довільного лінійного підпростору лежить між нулем і одиницею. Підпростори, характеристика яких дорівнює одиниці, іноді називають 1–нормуючими підпросторами.

4) *якщо для всіх* $y \in F$ *маємо* $\langle y, x_n\rangle_{E^*,E} \to \langle y, x\rangle_{E^*,E}$ *при* $n \to \infty$ *(*$x \in X$, $x_n \in X$*), то* $f_k(x) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} f_k(x_n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Перейдемо тепер до побудови узагальнених екстремальних елементів для задачі (1). Інфімум множини значень функціонала f на множині X позначимо через $\inf_X f$, а множину розв'язків задачі (1) (можливо порожню) — $\arg\inf_X f = \{x \in X : \ f(x) = \inf_X f\}$.

Побудуємо для множини X і функціонала f банаховий простір $(F, \|\cdot\|_{E^*})$, що задовольняє твердження теореми 6. Звуження норми $\|\cdot\|_{E^*}$ на F будемо позначати $\|\cdot\|_F$. Лінійний підпростір $F \subseteq E^*$ тотальний. Отже, в E можна розглянути хаусдорфову і локально опуклу топологію $\sigma(E, F)$, фундаментальною системою околів нуля якої є набір усіх множин вигляду

$$W(y_1, ..., y_n; \varepsilon) = \left\{x \in E : \ \left|\langle y_k, x\rangle_{E^*,E}\right| \le \varepsilon, \ y_k \in F, \ 1 \le k \le n\right\}.$$

Із теореми 6 випливає, що функціонал f напівнеперервний знизу на X відносно топології $\sigma(E, F)$, а множина X замкнена в топології $\sigma(E, F)$.

Розглянемо простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$, спряжений до простору $(F, \|\cdot\|_F)$. Цей простір буде грати роль природного розширення простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Якщо банаховий простір $(E, \|\cdot\|_E)$ є рефлексивним (ясно, що тоді задача (1) розв'язна), то простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$ співпаде з $(E, \|\cdot\|_E)$.

У наступних твердженнях описано зв'язок між просторами $(E, \|\cdot\|_E)$ і $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$.

Твердження 1. *Простір* $(E, \|\cdot\|_E)$ *лінійно та ізометрично вкладається у простір* $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$.

Нехай $j : E \to F^*$ — відповідний оператор вкладення. Зауважимо, що $\forall x \in E$ $jx = \pi x|_F$, де $\pi : E \to E^{**}$ — канонічне вкладення E у другий спряжений E^{**}.

Твердження 2. *Множина* $j(B_E)$ *секвенційно щільна в* B_{F^*} *відносно топології* $\sigma(F^*, F)$.

Твердження 3. *Множина* $j(E)$ *секвенційно щільна в* F^* *відносно топології* $\sigma(F^*, F)$.

З теореми Банаха-Алаоглу випливає

Твердження 4. *Обмежена множина* $M \subseteq F^*$ *відносно секвенційно компактна у топології* $\sigma(F^*, F)$.

Розглянемо множину $\widetilde{X} \subseteq F^*$ — секвенційне замикання множини $j(X)$ у топології $\sigma(F^*, F)$. Звичайно, множина $\widetilde{X}$ є опуклою та $\sigma(F^*, F)$-компактною підмножиною простору F^*. Зазначимо, що в множину $\widetilde{X}$ не можуть потрапити елементи простору E, які не лежать у множині X, точніше, якщо $x \notin X$, то $jx \notin \widetilde{X}$.

Побудуємо продовження функціонала f на множину $\widetilde{X}$. Для всіх $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ покладемо

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf\left\{\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) : \ x_n \in X, \ jx_n \to \tilde{x} \text{ в топології } \sigma(F^*, F)\right\}.$$

Лема 1. *Мають місце такі твердження:*

1) *функціонал* $\tilde{f}$ *опуклий на* $\widetilde{X}$*;*
2) $\tilde{f}\big|_{j(X)} = f$ *;*
3) $\inf_X f = \inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$*;*
4) *функціонал* $\tilde{f}$ *є* $\sigma(F^*, F)$*-напівнеперервним знизу на множині* $\widetilde{X}$*.*

Задачі (1) поставимо у відповідність таку задачу мінімізації

$$\tilde{f} \to \inf_{\widetilde{X}}, \tag{2}$$

яку у роботі [7] названо узагальненою постановкою екстремальної задачі (1) або F^*-розширенням задачі (1).

Зауваження 2. Якщо простір $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивний, то F^*-розширення задачі (1), тобто, задача (2), збігається з вихідною задачею (1), яка у цьому випадку, звичайно, має непорожню множину розв'язків.

Зауваження 3. Як випливає з теореми 6, можна побудувати узагальнені постановки з використанням спільного простору F^* для довільної зліченної сім'ї опуклих екстремальних задач $f_k \to \inf_X$.

Означення 1. Елемент $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (1), якщо $\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$.

Множину усіх узагальнених розв'язків позначимо $\arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$.

Теорема 7. *Множина* $\arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$ *непорожня, опукла та* $\sigma(F^*, F)$*-компактна.*

Має місце такий зв'язок між узагальненими розв'язками, класичними розв'язками та мінімізуючими послідовностями задачі (1).

Теорема 8. *Мають місце такі твердження:*

1) $j(\arg\inf_X f) = j(X) \cap \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$*;*
2) *якщо* (x_n) *— мінімізуюча послідовність задачі (1), то існують елемент* $\tilde{x} \in \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$ *і підпослідовність* (x_{n_k})*, такі, що* $jx_{n_k} \to \tilde{x}$ *в топології* $\sigma(F^*, F)$*;*
3) *якщо* $\tilde{x} \in \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$*, то існує мінімізуюча послідовність задачі (1)* (x_n)*, така, що* $jx_n \to \tilde{x}$ *в топології* $\sigma(F^*, F)$*.*

Наведемо твердження, яке є деяким секвенційним аналогом класичної умови екстремуму для задачі (1). Припустимо додатково, що функціонал f диференційовний у розумінні Гато на множині X.

Теорема 9. *Нехай* $\tilde{x} \in \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$*. Тоді існує послідовність* (x_n)*,* $x_n \in X$*, така, що*

$$jx_n \to \tilde{x} \ \text{ в топології } \sigma(F^*, F),$$
$$f(x_n) \to \inf_X f = \tilde{f}(\tilde{x}),$$
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\langle f'(x_n), x - x_n \right\rangle_{E^*,E} \geq 0 \ \ \forall x \in X.$$

Зауваження 4. Якщо для елемента $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ існує послідовність (x_n), $x_n \in X$, така, що $jx_n \to \tilde{x}$ в топології $\sigma(F^*, F)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \langle f'(x_n), x - x_n \rangle_{E^*,E} \geq 0$ $\forall x \in X$, то $\tilde{x} \in \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$.

Поміркуємо про можливість застосування схеми F^*-розширення до задач мінімізації неопуклих функціоналів. Нехай дано задачу (1), де функціонал f неопуклий. Розглянемо підпростір $F \subseteq E^*$ з теореми 4. Якщо функціонал f є напівнеперервним знизу на X відносно топології $\sigma(E, F)$, то можна побудувати розв'язну у просторі F^* узагальнену постановку задачі (1). Отже, фундаментальним питанням є напівнеперервність знизу функціонала f у топології $\sigma(E, F)$ на множині X для заданого тотального підпростору $F \subseteq E^*$.

4. Узагальнені екстремальні елементи для некоерцитивних функціоналів

У роботі Є. М. Рисая та В. В. Семенова [8] конструкція з попереднього розділу отримала розвиток.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ — сепарабельний банаховий простір, $f : E \to \mathbb{R}$ — неперервний опуклий функціонал, X — опукла (можливо необмежена) підмножина простору E. Розглянемо задачу

$$f \to \inf_X . \tag{3}$$

Використовуючи попередні результати, будуємо узагальнену постановку задачі (3). А саме: оберемо лінійний підпростір характеристики одиниця $F \subseteq E^*$ такий, що:

1) F — сепарабельний лінійний підпростір спряженого простору E^*;
2) якщо $x_n \to x$ в топології $\sigma(E, F)$, то $f(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$;
3) множина X секвенційно $\sigma(E, F)$-замкнена.

Далі розглянемо $\tilde{f}$ — опукле та секвенційно $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервне знизу продовження f на F^*, побудоване за формулою

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf \{ \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) : \ x_n \in E, \ jx_n \to \tilde{x} \ \text{ в топології } \sigma(F^*, F), \\ (x_n) \ \text{— обмежена} \},$$

та $\widetilde{X} \subseteq F^*$ — секвенційне замикання множини $j(X)$ в топології $\sigma(F^*, F)$.

Узагальненою постановкою задачі (3) є екстремальна задача

$$\tilde{f} \to \inf_{\widetilde{X}} . \tag{4}$$

Нагадаємо класичне означення.

Означення 2. Функціонал $f : E \to \mathbb{R}$ називається коерцитивним, якщо

$$f(x) \to +\infty \ \text{ при } \ \|x\|_E \to +\infty \tag{5}$$

або рівносильно $\forall \alpha > \inf_E f$ множина $\{f \leq \alpha\} = \{x \in E : \ f(x) \leq \alpha\}$ обмежена.

Якщо функціонал f коерцитивний, то очевидно, що $\arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f} \neq \emptyset$, тобто, множина узагальнених розв'язків задачі (3) непорожня. Дійсно, тоді для f існує обмежена мінімізуюча послідовність $x_n \in X$. Можна вважати, що $jx_n \to \tilde{x}$ в топології $\sigma(F^*, F)$. Ясно, що $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ (випливає із секвенційної $\sigma(F^*, F)$–замкненості множини $\widetilde{X}$). Із напівнеперервності знизу $\tilde{f}$ відносно топології $\sigma(F^*, F)$ випливає, що

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \leq \varliminf_{n\to\infty} \tilde{f}(jx_n) = \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_X f = \inf_{\widetilde{X}} \tilde{f},$$

тобто, $\tilde{x} \in \arg\inf_{\widetilde{X}} \tilde{f}$.

Існує багато важливих задач, в яких цільові функціонали не задовольняють умову (5). Наприклад, задачі вигляду

$$f(x) = g(Ax) \to \inf_{x\in E},$$

де $g : Y \to \mathbb{R}$ — коерцитивний опуклий неперервний функціонал, заданий на банаховому просторі $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $A : E \to Y$ — лінійний неперервний оператор з нетривіальним ядром $N(A) \neq \{0\}$.

Виникає питання: за яких умов можна гарантувати існування узагальнених розв'язків задачі (3) з некоерцитивним функціоналом f?

Із задачею мінімізації (4) пов'яжемо послідовність задач

$$\tilde{f} \to \inf_{nB_{F^*}\cap\widetilde{X}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де $nB_{F^*} = \{x \in F^* : \|x\|_{F^*} \leq n\}$. Ясно, що кожна задача (6) має непорожню множину розв'язків. Оберемо з множини $\arg\inf_{nB_{F^*}\cap\widetilde{X}} \tilde{f}$ деякий елемент $\tilde{x}_n$. Якщо побудована послідовність $(\tilde{x}_n)$ обмежена, то вона має граничні точки відносно топології $\sigma(F^*, F)$, на яких функціонал $\tilde{f}$ досягає свого мінімуму на множині $\widetilde{X} \subseteq F^*$.

Висновок: слід знайти достатні умови, за яких можлива побудова обмеженої в просторі F^* послідовності $(\tilde{x}_n)$, $\tilde{x}_n \in \arg\inf_{nB_{F^*}\cap\widetilde{X}} \tilde{f}$.

Природно обирати точки $\tilde{x}_n$ з умови мінімальності норми

$$\|\tilde{x}_n\|_{F^*} = \min\left\{\|\tilde{x}\|_{F^*} : \ \tilde{x} \in \arg\inf_{nB_{F^*}\cap\widetilde{X}} \tilde{f}\right\}.$$

Тобто, елементи послідовності $(\tilde{x}_n)$ суть нормальні розв'язки екстремальних задач (6).

У попередніх міркуваннях ми ніде не використовували опуклість f, тому все справедливо для неопуклих функціоналів $f : E \to \mathbb{R}$, які є секвенційно $\sigma(E, F)$-напівнеперервними знизу для заданого сепарабельного лінійного підпростору $F \subseteq E^*$ характеристики одиниця.

Оскільки принциповими є лише факти $\sigma(F^*, F)$–напівнеперервності знизу $\tilde{f}$ на F^* і $\sigma(F^*, F)$-замкненості множини $\widetilde{X} \subseteq F^*$, то замість задачі (3) та її узагальненої постановки (4) для спрощення нотацій розглянемо задачу, поставлену у спряженому просторі F^* до деякого нескінченновимірного банахового простору F. Точніше, будемо вивчати задачу вигляду

$$f \to \inf_{X}, \tag{7}$$

де X — замкнена в топології $\sigma(F^*, F)$ підмножина простору F^*, $f : F^* \to \mathbb{R}$ — напівнеперервний знизу в топології $\sigma(F^*, F)$ функціонал. Подальші результати сформулюємо саме для задачі (7).

Доведення нижченаведених теорем полягає у встановленні обмеженості послідовності нормальних розв'язків задач $f \to \inf_{nB_{F^*} \cap X}$.

Теорема 10. *Нехай $\sigma(F^*, F)$-замкнена множина $X \subseteq F^*$ та $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу функціонал $f : F^* \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1) *якщо для послідовності (x_n), $x_n \in X$*

$$\|x_n\|_{F^*} \to +\infty, \;\; y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \;\; \text{в топології} \; \sigma(F^*, F),$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) < +\infty,$$

то $\|y_n - y\|_{F^*} \to 0$;

2) *якщо для $y \in F^*$ існує така послідовність (x_n), $x_n \in X$, що*

$$\|x_n\|_{F^*} \to +\infty, \;\; \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \;\; \text{в топології} \; \sigma(F^*, F),$$

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n\|_{F^*}} \leq 0,$$

то існує таке $\alpha > 0$, що $x_n - \alpha y \in X$, $f(x_n) \geq f(x_n - \alpha y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тоді задача (7) має непорожню множину розв'язків.

Розглянемо клас екстремальних задач вигляду

$$f(x) = \|Ax\|_G^2 + g(x) \to \inf_{x \in F^*}, \tag{8}$$

де A — лінійний неперервний оператор, що діє з F^* у простір Банаха $(G, \|\cdot\|_G)$, а $g : F^* \to \mathbb{R}$ — опуклий та $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу функціонал. Має місце

Лема 2. *Нехай лінійний неперервний оператор $A \in L(F^*, G)$ та функціонал $g : F^* \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1) $\dim N(A) < +\infty$;
2) *$F^* = N(A) \oplus Y$, де Y — замкнений лінійний підпростір F^* і оператор A коерцитивний на Y, тобто $\exists c > 0$: $c\|x\|_{F^*} \leq \|Ax\|_G$ $\forall x \in Y$;*
3) *функціонал g — $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу та опуклий.*

Тоді функціонал

$$F^* \ni x \mapsto f(x) = \|Ax\|_G^2 + g(x)$$

задовольняє умову 1) теореми 10 з $X = F^*$.

З теореми 10 випливає

Теорема 11 ([8])**.** *Нехай лінійний неперервний оператор $A \in L(F^*, G)$ та функціонал $g : F^* \to \mathbb{R}$ задовольняють умови леми 2 та*

$$\forall y \in N(A) \quad \exists \alpha > 0 : \quad g(x) \geq g(x - \alpha y) \quad \forall x \in F^*. \tag{9}$$

Тоді задача (8) має непорожню множину розв'язків.

Зауваження 5. Якщо $g \in F$, то умова (9) має місце при

$$N(A) \subseteq \{y \in F^* : \ g(y) = 0\}.$$

В [8] отримано узагальнення теореми 10 на ширший клас функціоналів.

Твердження 5. *Нехай $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу функціонал $f : F^* \to \mathbb{R}$ задовольняє умову 1) теореми 10 з $X = F^*$. Тоді він матиме таку властивість: якщо для послідовності точок (x_n)*

$$\|x_n\|_{F^*} \to +\infty, \ \ y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \ \text{ в топології } \sigma(F^*, F),$$

$$\|x_n\|_{F^*} \leq \|x_n - y\|_{F^*} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то $\exists x \in F^*$: $f(x) < \overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$.

Зауваження 6. Якщо F^* — простір зі скалярним добутком, то в умові твердження 5 елемент y може бути лише нулем. Дійсно, з $\|x_n\|_{F^*} \leq \|x_n - y\|_{F^*}$ випливає нерівність $(x_n, y)_{F^*} \leq \frac{1}{2}\|y\|^2_{F^*}$. Звідки $(y_n, y)_{F^*} \leq \frac{\|y\|^2_{F^*}}{2\|x_n\|_{F^*}}$. Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в останній нерівності, приходимо до $y = 0$.

Зауваження 7. Властивість 1) з теореми 10 строго сильніша за властивість із твердження 5. Побудуємо відповідний приклад. Оберемо неперервну зростаючу та обмежену функцію $[0, +\infty) \xrightarrow{\Phi} [0, A)$, $A > 0$, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = A$ (наприклад, $\Phi(t) = \operatorname{arctg} t$, $t \geq 0$). Покладемо

$$f(x) = \Phi(\|x\|_{F^*}), \ \ x \in F^*.$$

Функціонал f секвенційно $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу. Покажемо, що f не має властивість 1) з теореми 10. Оберемо послідовність точок $y_n \in S_{F^*}$, таку, що не містить сильно збіжних підпослідовностей. Розглянемо послідовність $x_n = ny_n$. Тоді $\|x_n\|_{F^*} = n \to +\infty$. Можна вважати, що $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \in B_{F^*}$ в топології $\sigma(F^*, F)$ (цього завжди можна досягти, перейшовши до деякої підпослідовності). Ясно, що $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) < +\infty$. Але (y_n) не збігається сильно до y. Тепер візьмемо послідовність $x_n \in F^*$, таку, що $\|x_n\|_{F^*} \to +\infty$. Тоді

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A > 0 = f(0).$$

Отже, функціонал f має властивість із твердження 5.

Теорема 12 ([8])**.** *Нехай $\sigma(F^*, F)$-напівнеперервний знизу функціонал $f : F^* \to \mathbb{R}$ та $\sigma(F^*, F)$-замкнена множина $X \subseteq F^*$ задовольняють умови:*

1) *якщо для послідовності* (x_n), $x_n \in X$

$$\|x_n\|_{F^*} \to +\infty, \;\; y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \;\; \textit{в топології} \; \sigma\left(F^*, F\right),$$

$$\|x_n\|_{F^*} \leq \|x_n - y\|_{F^*} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то $\exists x \in X\colon f\left(x\right) < \overline{\lim}_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$;

2) *якщо для* $y \in F^*$ *існує така послідовність* (x_n), $x_n \in X$, *що*

$$\|x_n\|_{F^*} \to +\infty, \;\; \frac{x_n}{\|x_n\|_{F^*}} \to y \;\; \textit{в топології} \; \sigma\left(F^*, F\right),$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{f\left(x_n\right)}{\|x_n\|_{F^*}} \leq 0,$$

то $x_n - y \in X$, $f\left(x_n\right) \geq f\left(x_n - y\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тоді задача мінімізації (7) має непорожню множину розв'язків.

Висновки

У статті наведено огляд основних результатів наукової школи Ю. І. Петуніна, які пов'язані з узагальненими ров'язками екстремальних задач. Можна сказати, що це є своєрідним звітом про нашу роботу на науковому семінарі професора Ю. І. Петуніна, виконану у 2002–2009 роках.

Водночас, зі своїми оптимізаційними колегами Ю. І. Петунін обговорював не лише ідеї, описані в статті. Так, під його впливом в роботах [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] було отримано ряд результатів для задач опуклої максимізації, що не мають розв'язків. А в статті [16], використовуючи двоїстість, досліджено існування розв'язків задач оптимізації на, так званих, передопуклих множинах. Топологічні теореми про майже скрізь розв'язність задач, пов'язаних с теорією найкращого наближення у несиметричних нормах отримано в [17, 18, 19].

На завершення відмітимо, що спілкування з Ю. І. Петуніним було завжди стимулюючим, а його ідеї та гіпотези вказували учням та колегам перспективний шлях для подальшої плідної роботи.

Література

1. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко — К.: Наукова думка, 1998. — 472 с.
2. Lyashko S. I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters / S. I. Lyashko — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
3. Петунин Ю. И. Теория характеристик подпространств и её приложения / Ю. И. Петунин, А. Н. Пличко — К.: Вища школа, 1980. — 216 с.
4. Ляшко С. И. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений / С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, В. В. Семенов — М.: ООО И. Д. Вильямс, 2009. — 192 с.
5. Klyushin D. A. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D. A. Klyusin, S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskii, Yu. I. Petunin, V. V. Semenov — New York / Dordrecht / London: Springer, 2012. — 202 p.

6. Номировский Д. А. Обобщенные экстремальные элементы в банаховом пространстве / Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, М. Ю. Савкина // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2003. — № 2 (89). — С. 71–79.
7. Семенов В. В. Узагальнені екстремальні елементи опуклих функціоналів / В. В. Семенов // Вісник КНУ. Серія: фіз-мат. науки. — 2007. — №3. — С. 189–193.
8. Рисай Є. М. F^*-розширення некоерцитивних екстремальних задач / Є. М. Рисай, В. В. Семенов // Вісник КНУ. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — №3. — С. 174–179.
9. Lyashko S. I. Some remarks concerning supremum attainment by convex functional // S. I. Lyashko, V. V. Semenov, M. V. Katsev // Journal of Automation and Information Sciences. — 2006. — V. 38, № 4. — P. 1–7.
10. Семенов В. В. Про щільність множин лінійних операторів та білінійних форм, що досягяють норми / В. В. Семенов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2006. — Вип. 3. — С. 255–259.
11. Кацев М. В. Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації / М. В. Кацев, В. В. Семенов // Доповіді НАН України, 2007. — № 3. — С. 51–58.
12. Semenov V. V. Linear variational principle for convex vector maximization / V. V. Semenov // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — V. 43, Iss. 2. — P. 246–252.
13. Апостол Р. Я. Задачі максимізації і умова Лінденштраусса / Р. Я. Апостол, В. В. Семенов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.–мат. науки. — 2008. — Вип. 4. — С. 169–172.
14. Semenov V.V. Convex maximization and Schachermayer property α / V.V. Semenov // Cybernetics and Systems Analysis. — 2009. — V. 45, Iss. 2. — P. 309–313.
15. Семенов В. В. Локально рівномірно опуклі функціонали та одна «патологія» в WCG–просторах без властивості Радона-Нікодима / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 115–124.
16. Гриненко А. А. Мінімізація на передопуклих множинах: існування розв'язків / А. А. Гриненко, В. В. Семенов, О. В. Чубенко // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2007. — №2 (95). — С. 32–35.
17. Семенов В. В. Типовість розв'язності деяких задач оптимального керування / В. В. Семенов // Доповіді НАН України. — 2008. — № 8. — С. 36–42.
18. Semenov V. V. On Solvability of Maximization Problems in Conjugate Spaces / V. V. Semenov // Journal of Automation and Information Sciences. — 2009. — V. 41, N. 4. — P. 51–55.
19. Семенов В. В. Категорные свойства разрешимости одного класса задач минимизации / В. В. Семенов // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 106–117.

Факультет кібернетики, Київський національный університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 29.11.12