

УДК 519.71

## ЗАДАЧІ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

Ю. І. ПЕТУНІН, Б. В. РУБЛЬОВ

**РЕЗЮМЕ.** До багатьох сучасних задач розпізнавання образів можна застосувати геометричні методи розпізнавання. Це впливає з можливості охарактеризувати дані у різних галузях виробництва, медицини тощо у вигляді точок в скінченновимірному просторі. Ну а фото або відео взагалі подаються як точки на площині. Тут і можуть стати в нагоді ефективні алгоритми обчислювальної геометрії для обробки та аналізу одержаних зображень чи даних.

У цій статті описані здобутки, які були одержані пліч-о-пліч з професором Петуніним, спираючись на його фундаментальні попередні результати та подальші ідеї.

### 1. КЛАСИФІКАЦІЯ КЛАСІВ ФІГУР, ЯКІ ЛІНІЙНО РОЗДІЛЯЮТЬСЯ

Нагадаємо класичне визначення множин, які можна лінійно розділити. Задані множини  $K_1, K_2, \dots, K_n \subset R^m$ , які попарно не перетинаються. Будемо називати їх такими, що лінійно розділяються, якщо існують  $n$  таких лінійних функцій:  $f_i(x) = a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + \dots + a_m^{(i)}x_m + a_0^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для яких виконується умова:  $x \in K_j \Leftrightarrow f_j(x) > \max_{i \neq j} f_i(x)$ . Таку сукупність множин будемо скорочено називати ЛРМ, інакше — ЛНР. Лінійні функції, які задовольняють останню умову, називаються лінійними дискримінантними функціями Фішера (ЛДФ).

**Теорема 1.** *(Лінійна розділимість двох множин). Дві компактні множини  $K_1$  та  $K_2$  є ЛРМ тоді і тільки тоді, коли їх опуклі оболонки не перетинаються.*

Це загальновідома теорема, а от наступна теорема є результатом професора Петуніна, яка була одержана разом з Шульдешовим [ 1 ].

**Теорема 2.** *(Лінійна розділимість куль). Будь-яка скінченна кількість  $m$ -вимірних куль, які попарно не перетинаються, завжди утворюють набір ЛРМ.*

Як це часто буває при перших доведеннях, воно виявилось складним і заплутаним. Зараз вже існують витончені доведення, навіть такі, в яких у явному вигляді за рівняннями куль виписуються шукані рівняння ЛДФ для цих куль.

Була поставлена така проблема: знайти ще класи фігур, які мають аналогічну властивість. В процесі роботи були одержані також узагальнення теореми 1 [2–4].

**Теорема 3.** (Критерій ЛРМ трьох множин на площині). Три компактні множини  $K_1$ ,  $K_2$  та  $K_3$  є ЛРМ тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють одну з двох умов: а) існують дві паралельні прямі  $l_1$ ,  $l_2$ , які розбивають площину на 3 відкриті підмножини  $M_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , і при цьому  $K_i \subset M_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  (рис. 1); б) існує точка  $O$  та три промені  $OA_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , які розбивають площину на 3 відкриті кути  $M_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , кожен з яких менший  $180^\circ$ , і при цьому  $K_i \subset M_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  (рис. 2).

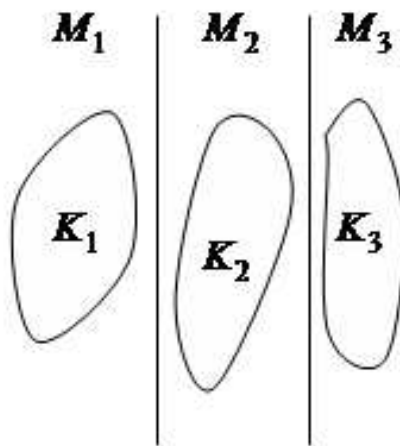


Рис. 1

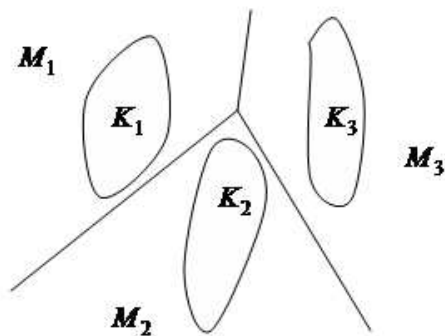


Рис. 2

Рис. 2

**Теорема 4.** (Критерій ЛРМ чотирьох множин на площині). Чотири компактні множини  $K_1, K_2, K_3$  та  $K_4$  є ЛРМ тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють одну з трьох умов: а) існують три паралельні прямі  $l_1, l_2, l_3$ , які розбивають площину на 4 відкриті підмножини  $M_i, i = \overline{1, 4}$ , і при цьому  $K_i \subset M_i, i = \overline{1, 4}$  (рис. 3); б) існує трикутник  $B_1B_2B_3$  точка  $O$  та три промені  $B_iA_i, i = \overline{1, 4}$ , доповнення яких до прямих перетинаються у точці  $O \in B_1B_2B_3$  (при цьому кути між променями  $OA_i, i = \overline{1, 3}$  менший  $180^\circ$ ), які розбивають площину разом з  $\Delta B_1B_2B_3$  на 4 відкриті множини  $M_i, i = \overline{1, 4}$ , і при цьому  $K_i \subset M_i, i = \overline{1, 4}$  (рис. 4);

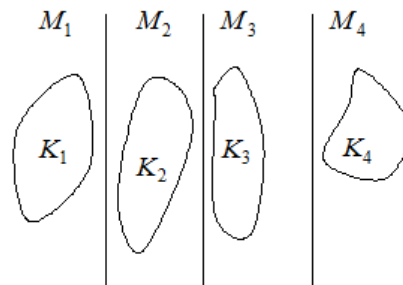


Рис. 3

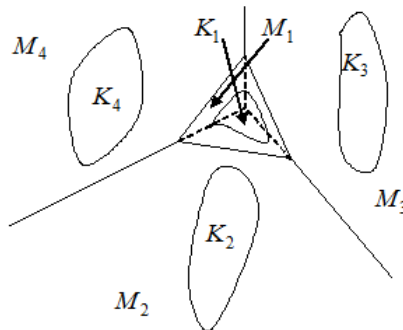


Рис. 4

в) існує відрізок  $AB$ , промені  $AA_1, AA_2, BB_1$  та  $BB_2$ , (при цьому усі 6 кутів, що утворилися менші  $180^\circ$ ), які розбивають площину разом на 4 відкриті множини  $M_i, i = \overline{1, 4}$ , і при цьому  $K_i \subset M_i, i = \overline{1, 4}$  (рис. 5).

Тепер щодо узагальнення класів фігур, для яких досліджувалась задача лінійної розділності. Вибираємо опуклу центрально симетричну фігуру  $F \subset R^2$ . А далі розглядається клас фігур  $S(F)$  — усі фігури, які можна

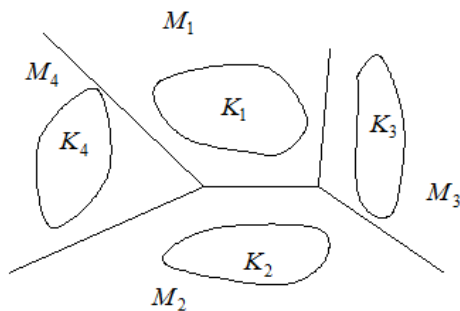


Рис. 5

одержати з  $F$  за допомогою перетворення гомотетії та паралельного переносу (так би мовити зберігається орієнтація фігури, тобто її повороти неприпустимі). Основна проблема, яка досліджувалась була такою.

**Проблема 1.** (Дослідження класів ЛРМ фігур). Знайти усі такі фігури  $F$  та натуральні  $n \geq 3$ , для яких фігури  $F_1, \dots, F_k \in S(F)$ , де  $k \leq n$ , завжди будуть утворювати набір ЛРМ як тільки вони попарно не перетинаються.

Зрозуміло, що якщо знайдена одна така фігура  $F$ , то аналогічні властивості має й будь-яка інша фігура  $F'$ , яку можна одержати з фігури  $F$  за допомогою афінного перетворення. Таким чином з теореми 2 ми маємо, що для будь-якого натурального  $n$  еліпс утворює подібний клас фігур.

В процесі досліджень були одержані такі результати.

**Теорема 5.** (Класи фігур, що породжують ЛРМ). 1) Якщо фігура  $F$  має гладку межу, то для довільного  $n \geq 3$  вона породжує ЛРМ тоді і тільки тоді, коли вона є еліпсом. 2) Якщо фігура  $F$  має не гладку межу, то для  $n = 3$  вона породжує ЛРМ, якщо вона є паралелограмом, для  $n \geq 4$  таких фігур не існує.

Зрозуміло, що одержані результати можна легко узагальнити на випадок довільного скінченновимірного простору. Таким чином, куля є певним чином унікальною фігурою стосовно питання побудови набору ЛРМ.

## 2. КЛАСИФІКАЦІЯ КЛАСІВ ФІГУР, ЯКІ ЛІНІЙНО РОЗДІЛЯЮТЬСЯ

Припустимо, що у нас є квадратна сітка зі стороною  $\varepsilon$  (рівень дискретизації) і на неї накладається деяка фігура  $F$  з класу фігур  $S$ , тобто таких, що мають кусково гладку жорданову межу, яка спрямляється. Після цього зафарбовуються ті квадрати сітки, які мають з фігурою ненульовий за площею перетин. Сукупність усіх чорних квадратиків утворює фігуру  $G(\varepsilon)$  — дискретизоване зображення фігури  $F$  (рис. 6).

Фактично це растрове зображення фігури. Зрозуміло, що чим ближче додатне значення  $\varepsilon$  до нуля, тим точніше дискретизоване зображення  $G(\varepsilon)$

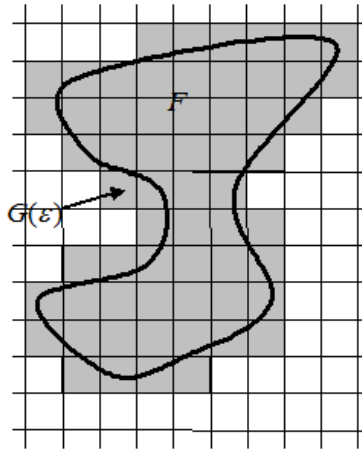


Рис. 6

відтворює фігуру  $F$ . Але так само й очевидно, що кількість елементів, які вимагають обробки, суттєва зростає. Так при зменшенні величини  $\varepsilon$  у два рази кількість елементів зростає вчетверо. Тому постала проблема оцінити певні елементи  $F$  за її дискретизованим зображенням  $G(\varepsilon)$  при заданому  $\varepsilon$ . Якщо площа  $G(\varepsilon)$  достатньо точно оцінює площу фігури  $F$ , то периметра це ніяким чином не стосується. У класичній роботі Петуніна [ 5 ] був наведений алгоритм, за яким будувалася лінія  $L(F)$ . При цьому було доведено, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  довжина лінії  $L(F)$  прямує до справжнього значення периметру фігури  $F$ . Але ні швидкість цього прямування, ні точність оцінити за тим алгоритмом було або неможливо, або надзвичайно складно. Тому природно була поставлена така проблема.

**Проблема 2.** (Оцінка периметра фігури за її дискретизованим зображенням). Для заданої фігури  $F \in C$  та довільного рівня дискретизації  $\varepsilon$  розробити алгоритм оцінювання периметра фігури за її дискретизованим зображенням  $G(\varepsilon)$ , який є слушним та оцінити точність цього наближення.

Для дослідження був визначений відповідний клас фігур  $C^{(0)}$ . Розглянемо деяку фігуру  $F \in C$ . Нехай на межі фігури  $F$  визначена орієнтація, і існує скінченний набір точок  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = M_0$  ( $M_{n+1} = M_1$ ) (точки йдуть послідовно в напрямі орієнтації), для якого виконуються умови: 1) фігури  $F_i$ , що розташовані між відрізком  $M_i M_{i+1}$  та дугою межі фігури між точками  $M_i, M_{i+1}$  (в напрямі заданої орієнтації) є опуклими  $\forall i = \overline{0, n-1}$ ; 2) фігури  $G_i$ , що розташовані між відрізком  $M_i M_{i+1}$  та дугою межі фігури між точками  $M_i, M_{i+1}$  не є опуклими  $\forall i = \overline{0, n-1}$ . Тоді фігура  $F \in C^{(0)}$ .

Для опуклої фігури  $F$ , яка очевидно належить класу  $C^{(0)}$ , побудуємо дискретизоване зображення  $G(\varepsilon)$ . Нехай ламана  $\bar{L}$  — це межа опуклої оболонки  $G(\varepsilon)$ , яка обмежує фігуру  $\bar{G}$ . Побудуємо ламану  $\underline{L}$ , яка розташована відступом на 1 клітину всередину  $\bar{L}$  (рис. 7).

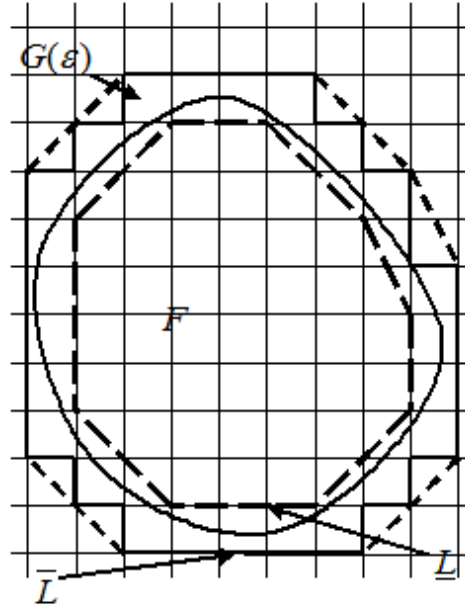


Рис. 7

Більш детально розписаний алгоритм можна подивитись у роботі [6]. Найголовніше, що при цьому виконуються такі оцінки стосовно периметра  $P(F)$ , а також довжин ламаних  $\bar{L}$  та  $\underline{L}$  (будемо ці довжини позначати тими самими літерами, якщо це не призведе до непорозуміння).  $\bar{L} - 8\varepsilon \leq \underline{L} \leq P(F) \leq \bar{L}$ . Таким чином, найкращою оцінкою периметра для опуклої фігури є величина  $\bar{L} - 4\varepsilon$ , точність цієї оцінки  $4\varepsilon$ . Далі стає зрозумілим ідея нового алгоритму апроксимації межі фігури класу  $C^{(0)}$ . Ми будемо апроксимувати опуклі ділянки межі фігури  $F$ , як складові опуклої фігури, а угнуті ділянки — як угнутої. Тоді одержана ламана  $L$  є шуканою апроксимацією межі, при цьому швидкість прямування  $L \rightarrow P(F)$  пропорційна  $\varepsilon$ . Детальне описання цього алгоритму а також аналіз його властивостей забирає багато місця, детально про це можна ознайомитись в роботі [6].

### 3. Визначення гладкої метрики у класі фігур $C^{(0)}$

Серед фігур на площині вже існують різні типи метрик, які виконують ту чи іншу функцію, тобто дозволяють вивчати певні властивості класів фігур. У наших дослідженнях виникла потреба у побудові метрики, яка

буде задовольняти такі властивості (вони були природним продовженням результатів попереднього розділу).

**Проблема 3.** (Побудова гладкої метрики) *Визначити у певному класі фігур на площині метрику, яка буде задовольняти таку умову: якщо послідовність фігур  $(F_n)$  збігається до фігури  $F$  у гладкій метриці при  $n \rightarrow \infty$ , то  $P(F_n) \rightarrow P(F)$ .*

Для визначення гладкої метрики виберемо клас фігур  $C^{(0)}$ , який був визначений у попередньому розділі. Визначимо поняття узагальненої дотичної до фігури  $F \in C^{(0)}$ . Нею буде така пряма, яка є опорною прямою до деякої підмножини межі фігури  $F$  (рис. 8). Внаслідок того, що фігура класу  $C^{(0)}$  розбивається на скінченну кількість опуклих фігур, а до опуклої фігури можна провести лише дві опорні прямі кожного напрямку, то і узагальнених дотичних можна провести скінченну кількість кожного напрямку.

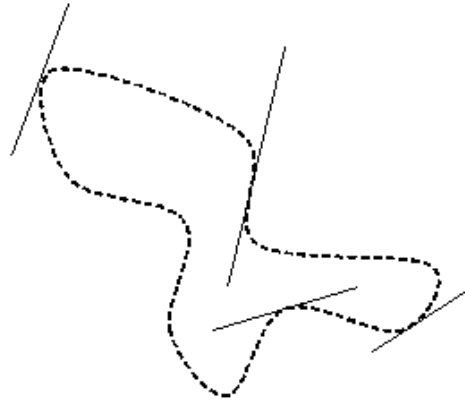


Рис. 8

Тепер визначимо поняття гладкої метрики [7–8]. Розглянемо дві довільні фігури  $F_1, F_2$  з класу  $C^{(0)}$ . Виберемо довільну точку  $M_1 \in \Gamma(F_1)$  (межа фігури  $F_1$ ) і деяку узагальнену дотичну  $l_1$  до фігури  $F_1$  в точці  $M_1$ . Побудуємо всі узагальнені дотичні до фігури  $F_2$ , що паралельні прямій  $l_1$  (зрозуміло, що їх існує скінченна кількість) і виберемо серед них найближчу до  $l_1$ . Цю відстань між паралельними прямими позначимо  $r_1(M_1, l_1)$ . Далі визначаємо

$$r_1(M_1) = \max_{M_1 \in l_1} r_1(M_1, l_1), \quad (1)$$

$$r_1 = \max_{M_1 \in \Gamma(F_1)} r_1(M_1). \quad (2)$$

Міняючи місцями фігури  $F_1$  та  $F_2$  знаходимо величину  $r_2$ . Тоді покладемо

$$\rho_1(F_1, F_2) = \max \{ r_1, r_2 \}, \quad (3)$$

$$\rho^{(1)}(F_1, F_2) = \rho_1(F_1, F_2) + \rho^{(0)}(F_1, F_2), \quad (4)$$

де  $\rho^{(0)}(F_1, F_2)$  — метрика Хаусдорфа ([ 6 ]) між фігурами  $F_1$  та  $F_2$ .

Назвемо точку на межі фігури  $F \in C^{(0)}$  — піком, або точкою звороту, якщо будь-яка пряма, що проходить через цю точку є узагальненою дотичною до фігури  $F$ . Фігури класу  $C^{(0)}$  утворюють клас  $C^{(1)}$ , якщо на їх межі немає піків.

**Теорема 6.** (Про гладку метрику). Якщо фігура  $F \in C^{(1)}$  та послідовність фігур  $(F_n) \subset C^{(1)}$  такі, що  $\rho^{(1)}(F_n, F) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $P(F_n) \rightarrow P(F)$ .

#### 4. ПОВУДОВА ЕЛІПСА МІНІМАЛЬНОЇ ПЛОЩІ

Якщо є генеральна сукупність точок на площині і треба певним чином виділити їх основну частину, то з точки зору практичного використання це повинна бути фігура мінімальної можливої площі. Саме таким міркування задовольняє еліпс мінімальної площі (ЕМП) для заданої сукупності точок (особливо в припущенні нормального розподілу точок). Петуніним був запропонований наближений алгоритм побудови еліпса мінімальної площі [9].

##### Алгоритм 1. (Наближена побудова ЕМП)

- 1) Знаходимо діаметр множини  $M$ :  $BC = \max_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ .
- 2) Проведемо поворот системи координат таким чином, щоб відрізок  $BC$  попав на вісь абсцис, при цьому множина  $M$  перетворюється в множину  $M'$  (образ кожної точки  $x_i, i = \overline{1, n}$  з множини  $M$  позначимо через  $x'_i, i = \overline{1, n}$ ).
- 3) Будуємо прямокутник  $P$  зі сторонами, паралельними координатним осям, що містить множину  $M'$ .
- 4) Проводимо операцію стискання, при якій прямокутник  $P$  перетворюється в квадрат  $Q$ , множина точок  $M'$  перетворюється при цьому в деяку множину  $M''$ , (образ кожної точки  $x'_i, i = \overline{1, n}$  з множини  $M'$  позначимо через  $x''_i, i = \overline{1, n}$ ).
- 5) Будуємо коло  $\gamma$  найменшого радіуса з центром, який збігається з центром квадрата  $Q$ , що містить усі точки множини  $M''$ .
- 6) Тепер проводимо всі зворотні операції, при яких спочатку квадрат  $Q$  перетворюється знов в прямокутник  $P$ , а далі поворот системи координат, при якій множина  $M'$  відображається в первісну множину  $M$ , при цьому коло  $\gamma$  перетворюється в шуканий еліпс, який ми й будемо вважати наближенням ЕМП для опуклого многокутника  $M$ .

Для одержаного еліпсу виконується важлива практична властивість, імовірність попадання чергової точки  $x_{n+1}$  із заданої генеральної сукупності у побудований еліпс складає  $\frac{n-1}{n+1}$ .

Наступний алгоритм буде точний ЕМП, при цьому були вивчені геометричні властивості фігур задля ефективної роботи алгоритму. а також різні його модифікації [10–13].



**Алгоритм 2. (Точна побудова ЕМП)**

- 1) Розглянемо всі трикутники вигляду  $A_i A_j A_k$ , де  $1 \leq i < j < k \leq n$ , що утворені вершинами многокутника  $M$ , серед них знаходимо трикутник  $A_i A_j A_k$  найбільшої площі. Для цього трикутника будуюмо ЕМП  $e_{ijk}$ ; якщо виконується включення  $M \subset e_{ijk}$ , то  $e_{ijk}$  шуканий ЕМП для всього многокутника  $M$ , і алгоритм побудови ЕМП завершується; якщо ж  $M \not\subset e_{ijk}$ , то переходимо до наступного кроку.
- 2) Розглянемо всі чотирикутники вигляду  $A_i A_j A_k A_l$   $1 \leq i < j < k < l \leq n$ , що утворюються вершинами многокутника  $M$ . Для кожного з них необхідно перевірити умову  $M \subset e_{ijkl}$ , де  $e_{ijkl}$  є ЕМП для відповідного чотирикутника (і серед усіх ЕМП розглядаємо лише ті, що містять усі чотири його вершини, бо інакше цей еліпс вже було б розглянуто на першому кроці алгоритму). Якщо ця умова виконується для одного з чотирикутників, то відповідний ЕМП буде ЕМП для всього многокутника  $M$ , і алгоритм завершує роботу. Якщо ж включення  $M \subset e_{ijkl}$  не виконується для жодного з еліпсів  $e_{ijkl}$ , то переходимо до останнього кроку роботи алгоритму.
- 3) Розглянемо всі можливі п'ятикутники  $A_i A_j A_k A_l A_m$ ,  $1 \leq i < j < k < l < m \leq n$ , що утворюються вершинами многокутника  $M$ , і для кожного з них будуюмо відповідний ЕМП (знову ми розглядаємо лише ті ЕМП, що містять усі вершини відповідного п'ятикутника, а тому він будується дуже легко, бо він є описаним навколо заданого опуклого п'ятикутника, а тому він існує єдиний). Серед усіх таких ЕМП існує єдиний, що містить многокутник  $M$ . Цей ЕМП і є шуканим, і алгоритм завершує свою роботу.

Практично неможливо показати оптимальність цього алгоритму, але практичні реалізації його надзвичайно добре себе показують в застосуваннях. Також було розроблено ще багато інших геометричних алгоритмів, до яких дещо менше відношення мав Петунін, а тому не будемо тут детально їх розписувати [14–18]. Розроблені геометричні алгоритми разом з професором Милейком Ю. Ю. (Duke University) та магістром Галковським Т. О. були протестовані та порівняні з аналогічними алгоритмами Всесвітньої електронної бібліотеки геометричних алгоритмів та показали свої переваги. У вересні 2008 року при черговому перегляді Бібліотеки їх було включено до офіційного реєстру.

**5. Висновки**

Навіть ця невеличка добірка результатів професора Петуніна та його учнів показує всю його велич як ученого. Його ідеї, його перші результати задавали цілий напрямок його учням для подальшого дослідження на багато років вперед.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Петунин Ю. И. Проблемы распознавания образов с помощью линейных дискриминантных функций Фишера / Ю. И. Петунин, Г. А. Шульдешов // Кибернетика. — 1979. — № 6. — С. 134–137.
2. Рублев Б. В. Структура гомотетичных линейно разделимых множеств в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Часть 1 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин, П. Г. Литвинко // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 1 — С. 3–15.
3. Рублев Б. В. Структура гомотетичных линейно разделимых множеств в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Часть 2 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин, П. Г. Литвинко // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 2 — С. 23–32.
4. Рублев Б. В. Структура гомотетичных линейно разделимых множеств в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Часть 3 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин, П. Г. Литвинко // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 4 — С. 43–53.
5. Петунин Ю. И. Вычисление периметра плоской фигуры по ее дискретизованному изображению / Ю. И. Петунин, Г. А. Шульдешов // Кибернетика. — 1985. — № 2. — С. 1–7.
6. Рублев Б. В. Алгоритм оценивания периметра плоской фигуры по ее дискретизованному изображению / Б. В. Рублев // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4 — С. 101–110.
7. Рублев Б. В. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. Часть 1 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 125–135.
8. Рублев Б. В. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. Часть 2 / Рублев Б. В., Петунин Ю. И. // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 2. — С. 111–120.
9. Петунин Ю. И. Распознавание образов с помощью квадратичных дискриминантных функций / Ю. И. Петунин, Б. В. Рублев // Обчислювальна та прикладна математика. — 1996. — 80 вып. — С. 89–104.
10. Петунін Ю. І. Оптимальний алгоритм побудови еліпса мінімальної площі / Ю. І. Петунін, Б. В. Рубльов, Ю. Ю. Милейко // Вісник Київського університету. — 1998. — Вип. 3. — С. 87–95.
11. Рубльов Б. В. Різні модифікації оптимального алгоритма побудови еліпса мінімальної площі / Б. В. Рубльов // Вісник Київського університету. — 1999. — Вип. 1. — С. 223–228.
12. Рублев Б. В. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Часть 1 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин // Український математичний журнал. — 1998. — 50 — № 7. — С. 973–981.
13. Рублев Б. В., Петунин Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Часть 2 / Б. В. Рублев, Ю. И. Петунин // Український математичний журнал. - 1998. - 50. - № 8 - С. 1098–1105.
14. Рябченко В. В. Новий алгоритм лінійної складності для побудови трикутника максимальної площі, вписаного в опуклий багатокутник / В. В. Рябченко, С. І. Ляшко, О. М. Грушецький, Б. В. Рубльов // Вісник Київського університету. — 2003. — Вип. 2. — С. 239–245.
15. Рубльов Б. В. Екстремальні властивості чотирикутника для побудови наближення еліпса мінімальної площі / Б. В. Рубльов // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 1999. — № 1. — С. 205–208.