Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №1(111) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.982.22

ДІЖКОВІСТЬ ПРОСТОРУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ СУМОВНИХ З ДЕЯКИМ СТЕПЕНЕМ, ІЗ ЗМІНЕНОЮ НОРМОЮ

А. В. Анікушин

Резюме. У роботі введено до розгляду простір послідовностей, що складається з елементів l_p, на якому введено норму простору l_q. При виконанні умов $1 < p < q < \infty$ у спряженому просторі наведено приклад системи функціоналів, що є поточково обмеженою, але не є обмеженою за нормою спряженого простору. На основі цього зроблено висновок, що простір, що розглядається, не є діжковим. Таким чином отримано конструктивне доведення недіжковості вказаного просторів.

Вступ

Діжкові простори *(barreled spaces)* виникають у функціональному аналізі поруч з принципом рівномірної обмеженості, або класичною теоремою Банаха-Штейнгауза. Це достатньо широкий клас просторів, що, наприклад, містить у собі всі банахові, повні простори, простори Бера тощо. Діжкові простори також важливі через їхній зв'язок з теоремою про замкнений графік [1]. У монографії [2] подано детальний огляд діжкових просторів, їх властивостей, критеріїв діжковості.

У роботах [3, 4] було отримано деякі достатні умови недіжковості лінійного нормованого простору. Зокрема в роботі [4] доведено, що простори

$$(l_p, \|\cdot\|_{l_q}), 1 < p < q < \infty$$

не є діжковими. Це твердження отримано з теореми, що встановлює достатні умови недіжковості лінійного нормованого простору. Доведення цієї теореми носить неконструктивний характер. У той же час видається цікавим навести конкретний приклад, що встановлював би недіжковість вказаного простору. Дана коротка замітка присвячена вирішенню цією задачі.

Основні означення та твердження

Розглянемо лінійний топологічний простір V. Нагадаємо [5, 6], що множина $S \subseteq V$ називається *абсолютно опуклою*, якщо $\forall |\alpha| \leq 1 : \alpha S \subseteq S$. Абсолютно опукла множина $S \subseteq V$ називається *поглинаючою*, якщо для кожного $x \in V$ існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $x \in \alpha S$. Множина $S \subseteq V$ називається *діжкою*, якщо S абсолютно опукла, замкнена та поглинаюча. Нарешті, лінійний топологічний простір V називається *діжковим*, якщо довільна діжка S у ньому є околом нуля.

Нагадаємо, що поняття діжковості тісно пов'язане [5, 6] з теоремою Банаха-Штейнгауза [7], а також з поточковою та рівномірною обмеженістю (одностайною неперервністю) лінійних відображень.

Конструкція послідовності функціоналів

Нехай $1 < p < q < \infty$. Розглянемо простір $E = (l_p, \|\cdot\|_{l_q})$. Через p', q' позначимо числа, що задовольняють рівностям $1/p + 1/p' = 1;\ 1/q + 1/q' = 1$.

Покладемо $\alpha = \frac{q-1}{q} = \frac{1}{q'}$ і розглянемо послідовність дійсних чисел $\{k^{-\alpha}\}_{k=1}^{\infty}$. Неважко перевірити, що виконується нерівність $p' > q'$. Тоді можна стверджувати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p'\alpha}} < \infty;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q'\alpha}} = \infty.$$

Розглянемо лінійні функціонали $f_n : E \to \mathbb{R}$, що визначені таким чином:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot x_k,\ x = (x_1, x_2, ...) \in E. \tag{1}$$

Лема 1. *Нехай f_n визначено згідно (1), тоді*

$$\|f_n\|_{E^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{q'\alpha}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Доведення. Скористаємося нерівністю Гьолдера [7]:

$$\forall x \in E:\ |f_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^{\alpha}}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{q'\alpha}}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{q'\alpha}}\right)^{\frac{1}{q'}} \|x\|_E.$$

Рівність досягається на елементі

$$x = \left(1^{-\frac{\alpha q'}{q}}, 2^{-\frac{\alpha q'}{q}}, ..., n^{-\frac{\alpha q'}{q}}, 0, 0, 0, ...\right) \in E.$$

□

Лема 2. *Послідовність функціоналів f_n, що визначена згідно (1) не є рівномірно обмеженою, але є поточково обмеженою.*

Доведення. Згідно леми 1 норми функціоналів f_n є частковими сумами ряду $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-q'\alpha}$. Але цей ряд є розбіжним внаслідок вибору параметра α. Тому $\|f_n\|_{E^*} \to \infty, n \to \infty$.

Розглянемо тепер довільний елемент $x \in E$. Оскільки $x \in l_p$, а ряд $\sum k^{-p'\alpha}$ — збіжний, то застосовуючи нерівність Гьолдера, отримаємо

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^{\alpha}}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p'\alpha}}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p'\alpha}}\right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_{l_p}.$$

□

На основі леми 2 можна сформулювати таку теорему:

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q < \infty$. *Тоді простір* $(l_p, \|\cdot\|_{l_q})$ *не є діжковим.*

Висновки

Таким чином, вдалося навести конструктивне доведення недіжковості просторів $(l_p, \|\cdot\|_{l_q}), 1 < p < q < \infty$. Відзначимо, що при $p = q$ ми маємо справу з класичними просторами $l_p, p > 1$. Як відомо [7], ці простори є повними, а тому [5, 6] також і діжковими. Це дозволяє, як висновок роботи, сформулювати теорему:

Теорема 2. *Нехай* $1 < p \leq q < \infty$. *Простір* $(l_p, \|\cdot\|_{l_q})$ *діжковий тоді і лише тоді, коли* $p = q$.

Література

1. Perez-Carreras P. Some aspects of the theory of barreled spaces/ P. Perez-Carreras // Casopis pro pestovani matematiky. — 1987. —V.112. —№.2. — P. 123–161.
2. Perez-Carreras P. Barrelled locally convex spaces / P. Perez-Carreras. — Elsevier Science Publishers. — 1987. — 529 p.
3. Анікушин А. В. Діжковість передгільбертових просторів / А.В. Анікушин // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №4(110). — С. 51–55.
4. Анікушин А. В. Про зв'язок між апріорними нерівностями та послабленими апріорними нерівностями для лінійних операторів / А.В. Анікушин // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101). — С. 3–8.
5. Робертсон А. П. Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 260 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
7. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К.: Выща школа, 1990. — 600 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 10.07.2012