Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №1(111)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.91

ГОМОТОПІЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕКРИТИЧНИХ М-ФУНКЦІЙ НА ТРИВИМІРНОМУ ДИСКУ

О. Н. Вятчанінова, О. О. Пришляк, К. О. Пришляк

Резюме. Використовуючи розклади на m-ручки, дається критерій гомотопічної еквівалентності функцій на тривимірних тілах. Для трививимірного диску доводиться, що дві m-функції без внутрішніх критичних точок можна з'єднати шляхом у просторі m-функцій, якщо вони мають однакові числа критичних точок кожного індексу.

Вступ

При дослідженні простору функцій на многовиді часто виділяють підмножини, які складаються з функцій загального положення (страти корозмірності 0). Це функції, які при малому ворушінні зберігають свої топологічні властивості. На замкнутих многовидах такими функціями є прості функції Морса. Шлях в просторі функцій Морса це неперервна сім'я функцій Морса. Будемо такий шлях називати гомотопією. В. Шарком [1] та С. Максименком [2] було доведено, що дві функції Морса можна з'єднати шляхом у просторі функцій Морса на замкненому двовимірному многовиді тоді та тільки тоді, коли функції мають однакове число критичних точок кожного індексу.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m-функції. Це такі функції, у яких всі критичні точки є невиродженими та не лежать на краю, а також такі, що обмеження функції на край є функцією Морса. Топологічні властивості m-функцій досліджувалися у роботах [3–8]. С. Максименко для топологічної класифікації m-функцій використовував графи з інволюцією [8]. В роботі [9] описані всі прості орієнтовані атоми на поверхнях з краєм, а також дана повна пошарова класифікація простих m-функцій на компактних орієнтованих поверхнях з краєм.

Мета даної роботи — використовуючи m-ручки, дати критерій існування шляху між двома m-функціями на тривимірному тілі без внутрішніх критичних точок, а також гомотопічна класифікація таких функцій на тривимірному диску.

Нехай M — гладкий компактний n-вимірний многовид з краєм.

Означення 1. Функція $f : M \to \mathbf{R}$ називається *m-функцією*, якщо:

а) усі її критичні точки — невироджені і не лежать на краю ∂M;

б) обмеження f_∂ функції f на ∂M є функція Морса.

Критичні значення m-функції складаються з критичних значень функцій f і f_∂. m-функції це узагальнення функцій Морса для многовидів на многовиди з краєм.

Означення 2. Нехай $x \in \partial M$ — критична точка f_∂. Індексом ind x цієї критичної точки називається пара (λ, ϵ), де λ — звичайний індекс, а $\epsilon = +1$, якщо вектор grad f_x спрямований назовні і $\epsilon = -1$, якщо grad f_x спрямований усередину многовиду M. Якщо $x \notin \partial M$ — критична точка f, то індекс визначається звичайним чином.

1. m-ручки

Для диска, напівдиска, сфери і півсфери введемо такі позначення:
$D^\lambda=\{x=(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{\lambda'})\in\mathbf{R}^\lambda|\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 \le 1\}$, $D_+^\lambda=\{x\in D^\lambda|x_\lambda\ge 0\}$,
$S^{\lambda-1}=\partial D^\lambda$, $S_+^{\lambda-1}=\{x\in S^{\lambda-1}|x_\lambda\ge 0\}$.

Прості ручки

Означення 3. Будемо говорити, що многовид W отримано з многовида M за допомогою приклейки ручки $h^\lambda = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ індексу λ, якщо $W = M\bigcup_\varphi D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, де $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to \mathrm{Int}\partial_+ M$ — гладке вкладення.

Отриманий многовид W будемо розглядати як многовид з кутами $(W,\, \partial W,\, V_-\cup V_+)$. Тут $\partial W=\partial_- M\, \cup\partial_0 M\, \cup\partial_+ W$ і $\partial_+ W$ — многовид з краєм, отриманий в результаті перебудови Морса многовида $\partial_+ M$; $\partial_- M$, $\partial_0 M$, V_- і V_+ — початкові підмноговиди.

Означення 4. Диски $D^\lambda\times\{0\}$ і $\{0\}\times D^{n-\lambda}$ називаються середнім і косереднім дисками, а їх границі $S^{\lambda-1}\times\{0\}$ і $\{0\}\times S^{n-\lambda-1}$ — середньою і косередньою сферами.

m-ручки індексу $(\lambda, -1)$

Означення 5. Множина W отримана з многовиду M за допомогою приклейки тонкої m-ручки $h_T^{\lambda-} = D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$ індексу $(\lambda,\ -1)$, якщо

$$W = M \cup_\varphi D^\lambda \times D^{n-\lambda-1},$$

де $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \to V_+$ — гладке вкладення.

m-ручки індексу $(\lambda, -1)$ є стовщенням тонкої m-ручки індексу λ. Більш точно: многовид W отримано з многовиду M за допомогою приклейки m-ручки $h^{\lambda-} = D^\lambda \times D_+^{n-\lambda}$ індексу $(\lambda, -1)$ якщо $W = M \cup_\varphi D^\lambda \times D_+^{n-\lambda}$, де $\varphi : \partial D^\lambda \times D_+^{n-\lambda} \to \partial_+ M$ — гладке вкладення таке, що $\varphi(\partial D^\lambda \times D_+^{n-\lambda})\bigcap V_+ = \varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})$ і $D^{n-\lambda-1} = \partial D_+^{n-\lambda}\backslash \mathrm{Int} S_+^{n-\lambda-1}$.

При цьому $\partial_0 W$ виходить з $\partial_0 M$ приклейкою ручки індексу λ: $\partial_0 W=\partial_0 M \cup D^\lambda\times D^{n-\lambda-1}$, де $\psi = \varphi|_{S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda-1}}$, а $\partial_+ W$ дифеоморфно $\partial_+ M$ із приклеєною ручкою індексу λ: $\partial_+ W=(\partial_+ M\ \backslash\varphi(\partial D^\lambda\times S_+^{n-\lambda}\,))\cup_\phi D^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1}$, де $\phi = \varphi|_{S^{\lambda-1}\times S_+^{n-\lambda-1}}$. Кут V_+ заміняється (у результаті перебудови Морса) на підмноговид $V_+\backslash(\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}))\cup_\gamma(D^\lambda \times \partial D^{n-\lambda-1}\,)$, де $\gamma = \varphi|_{S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda-2}}$. Підмноговид ∂_-M і V_- при приклейці m-ручки індексу $(\lambda,\ -1)$ не змінюються.

Означення 6. Диски $D^\lambda \times \{0\}$ і $\{0\} \times D_+^{n-\lambda}$ називаються середнім диском і косереднім напівдиском, а їх границі $S^{\lambda-1} \times 0$ і $0 \times S^{n-\lambda-1}$ — середньою і косередньою сферами m-ручки.

За побудовою, приклейка m-ручки індексу $(\lambda, -1)$ рівносильна (результати дифеоморфні) приклейці коміру $(\partial_+ M \bigcup_\varphi D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}) \times [0,1]$ після приклейки тонкої m-ручки.

m-ручки індексу $(\lambda, +1)$

Означення 7. Кажуть, що многовид W отриманий з многовиду M за допомогою приклейки m-ручки $h^{\lambda+} = D_+^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1}$ індексу $(\lambda, +1)$, якщо

$$W = M \cup_\varphi D_+^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1},$$

де $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \to \partial_+ M$ — гладке вкладення таке, що

$$\varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}) \bigcap \partial_+ V = \varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}).$$

Тут $D^\lambda = \partial D_+^{\lambda+1} \backslash \mathrm{Int} S_+^\lambda$. При цьому $\partial_0 W$ виходить із $\partial_0 M$ приклейкою ручки індексу λ: $\partial_0 W = \partial_0 M \cup_\psi D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$, де $\psi = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda-1}}$, а $\partial_+ M$ дифеоморфно $\partial_+ W$ із приклеєною ручкою індексу $n - \lambda - 2$:

$$\partial_+ W = (\partial_+ M \ \backslash \mathrm{Int} \varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})) \cup_\phi D_+^{\lambda+1} \times S^{n-\lambda-2},$$

де $\phi = \varphi|_{D^\lambda \times S^{n-\lambda-2}}$. Кут V_+ заміняється (у результаті перебудови Морса) на підмноговид $V_+ \backslash (\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})) \cup_\gamma (D^\lambda \times \partial D^{n-\lambda-1})$, де $\gamma = \varphi|_{S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-2}}$. Підмноговиди ∂_-M і V_- при приклейці m-ручки індексу $(\lambda, +1)$ не змінюються.

Зауваження. Многовиди W і M є дифеоморфними при приклеюванні ручки індексу $(\lambda,+1)$. Змінюється лише розбиття їх країв на дві частини і кут. Крім того, якщо після приклеювання ручки індексу $(\lambda,+1)$ приклеїти комір (це не змінює многовиду і розбиття його краю), то це те ж саме, що приклеїти комір до $\partial_+ M \backslash \varphi(D^\lambda \times D^{n-\lambda-1})$, не приклеюючи ручки. Отже, при приклеюванні ручки індексу $(\lambda,+1)$ з $\partial_+ M$ видаляється тонка λ-ручка.

Означення 8. Диски $D_+^{\lambda+1} \times \{0\}$ і $\{0\} \times D^{n-\lambda-1}$ називаються середнім напівдиском і косереднім диском, а їх границі $S^\lambda \times \{0\}$ і $\{0\} \times S^{n-\lambda-2}$ — середньою і косередньою сферами.

2. M-РОЗКЛАДИ НА РУЧКИ

Означення 9. m-розкладом на ручки називається послідовність вкладень $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_N = M$ таких, що $M_0 = \partial_- M \times [0,1]$, M_{i+1} отримано з M_i за допомогою приклейки звичайної чи m-ручки.

Означення 10. m-розкладом на ручки з комірами називається послідовність вкладень $M_0' \subset M_1 \subset M_1' \subset M_2 \subset ... \subset M_N' = M$ таких, що $M_0' = \partial_{-M} \times [0{,}1]$, M_i виходить з M_{i-1}' за допомогою приклейки звичайних чи m-ручок, а M_i' виходить з M_i за допомогою приклейки коміра $N_i \times [0,1]$, де $N_i = \partial_+ M_i$. На кожнім комірі задана проекція $\pi : N_i \times [0,1] \to [0,1]$.

Означення 11. m-розклади на ручки з комірами називаються ізоморфними, якщо існує гомеоморфізм між многовидами, що переводить ручки в ручки, коміри в коміри, зберігаючи розбивку комірів на шари.

За кожною m-функцією $f : M \to \mathbf{R}^1$ із критичними значеннями {1,2,..., N} задамо m-розклад на ручки з комірами так, що при цьому внутрішності комірів $N_i \times [0,1]$ будуть пошарово гомеоморфними компонентам зв'язності множини $M \setminus f^{-1}(\{1,2,...,N\})$. Це можна зробити так само, як і для функцій Морса, якщо взяти в якості ручок регулярні околи критичних точок, а внутрішності комірів — доповнення до цих околів і критичних рівнів.

Розпишемо цю конструкцію детальніше для випадку тривимірного тіла і функції без внутрішніх критичних точок. Почнемо з ручок індексу $(\lambda,+1)$. Для відповідної критичної точки спочатку побудуємо ручку на межі ∂M для функції f_∂. Середніми дисками ручки для критичної точки x буде перетин стійкого многовиду поля grad f_∂ з множиною $f^{-1}(f(x)-\delta, f(x)+\delta)$, а сама ручка це ϵ-окіл середнього диску в перетині з цією множиною. M-ручка буде об'єднанням частин траекторій поля grad f, для точок яких значення функції не менше $f(x)-\delta$. M-ручка індексу $(\lambda,-1)$ може бути побудована як ручка індексу $(n-\lambda,+1)$ для функції $-f$. Виріжемо так побудовані m-ручки і розріжемо многовид за критичними рівнями. Компоненти зв'язності отриманої множини будуть комірами.

Для отримання розкладу на m-ручки розглянемо на кожному комірі градієнтно-подібне векторне поле, яке дотикається бокової поверхні кожного коміру (існування такого поля доведено в [5]). Параметризувавши кожну траєкторію параметром з [0,1] пропорційно довжині дуги, отримаємо структуру прямого добутку на комірі. Стиснемо дугу кожної траєкторії між верхньою і нижньою основами коміра в точку. Фактично ми позбудемось комірів, а відповідне приклеювання ручок буде задаватися структурами прямих добутків на комірах.

3. Гомотопічна еквівалентність m-функцій

Теорема 1. *(Еквівалентність функцій на комірах). Якщо функції мають однакові градієнтно-подібні векторні поля з локальними координатами {0,0,1} на $F \times [0,1]$, де F – поверхня, а функції сталі і мають однакові значення на основах циліндра $F \times \{0\}$ (мінімальне) і $F \times \{1\}$ (максимальне), то існую деформація однієї функції в іншу, стала на основах.*

Доведення. Нехай x, y — координати на M, а z — координата на [0,1].

Для функцій f і g шукана деформація задається формулою

$$f_t = (1-t)\,f + tg.$$

При цьому $f_0{=}f$, $f_1{=}g$, $f_t(x,y,0) = (1-t)\,f(x,y,0) + tg(x,y,0) = f(x,y,0)$, $f_t(x,y,1) = (1-t)\,f(x,y,1) + tg(x,y,1) = f(x,y,1)$. За умовою теореми $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$ і $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$. Тоді $\frac{\partial f_t}{\partial z} = (1-t)\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial g}{\partial z} > \min\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) > 0$. Отже, поле {0,0,1} є градієнтно подібним для f_t при кожному t.

Наслідок. Теорема залишиться справедливою, якщо в умові однакові поля замінити на ізотопні.

Доведення. Якщо $h_t : M \to M$ — ізотопія, то $f_t = f(h_t)$ — шукана деформація функції.

Оскільки ізотопія ручок задає структуру прямого добутку на комірі, то вона може бути реалізована, як деформація функцій.

Теорема 2. *(Перестановка ручок або критичних точок). Якщо в розкладі на ручки вони не перетинаються, то їх можна приклеювати в довільному порядку (зробити значення однієї критичної точки більшим за інші).*

Доведення аналогічне доведенню для звичайних функцій [1].

Ці теореми дозволяють довільний розклад на руки звести до такого, що ручки приклеюються в такому порядку: спочатку ручки індексу (0, –1), далі ручки індексу (0,+1), (1, –1), (1,+1), (2, –1) і останніми ручки індексу (2,+1). При цьому ручки індексу (1,±1) не перетинаються між собою. Ручки індексу (1, –1) будемо також називати зовнішніми 1-ручками, а індексу (1,+1) — внутрішніми 1-ручками.

Додавання ручок — це операція, при якій одна (1,±1)-ручка ковзає по іншій (1,±1)-ручці. При цьому, якщо внутрішня (1,+1)-ручка ковзає по зовнішній одним кінцем середнього диску, то щоб позбутися перетину між ними треба також здійснити ковзання по цій самій зовнішній ручці іншого кінця, або того самого кінця в зворотньому напрямку.

Дві ручки називаються доповняльними, якщо середній диск однієї перетинає косередній диск іншої в одній точці і вони мають сусідні індекси та однакові знаки. Доповняльними можуть бути такі пари ручок: 1) (0, –1) і (1, –1); 2) (0,+1) і (1,+1); 3) (1, –1) і (2, –1); 4) (1,+1) і (2,+1). Отже, однією з доповняльних ручок є 1-ручка.

Скорочення ручок — це операція, яка знищує пару доповняльних ручок. Це означає, що в розкладі на ручки будуть відсутні ці дві ручки. При цьому геометрично збільшується на об'єднання пари доповняльних ручок та (0,±1)- або (2,±1)-ручка, до якої належить інший кінець середнього або косереднього диску (1,±1)-ручки, відповідно. Обернена операція — уведення пари доповняльних ручок.

Теорема 3. *Дві функції на тривимірному тілі є гомотопічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли вони мають однакові числа ручок для кожного індексу і з розкладу на m-ручки однієї можна отримати розклад іншої за допомогою ізотопій, перестановок, додавань, скорочень та уведень пар доповняльних ручок.*

Доведення. Необхідність. Нехай функції гомотопічно еквівалентні. Оскільки невиродженість критичної точки забезпечує їй структурну стійкість, то при гомотопії зберігаються критичні точки і їх індекси. Вектор градієнта не може дотикатися краю в критичних точках, а отже, при гомотопії зберігається також знак критичної точки. Якщо зафіксувати ріманову метрику, то при гомотопії з розкладами на ручки будуть відбуватися ізотопії ручок, а також перестановка ручок (коли значення функції в одній критичній точці збільшується, або в іншій зменшується) та додавання, коли стійкі та нестійкі многовиди 1-ручок проходять положення, в якому вони нетрансверсальні.

Достатність. Ізотопії, перестановки та додавання ручок можуть бути реалізовані за допомогою гомотопії згідно теорем 1 та 2. Пара доповняльних ручок гомеоморфна двовимірному диску приклеєному по дузі свого краю. Вона може бути зроблена як завгодно малою і переміщена ізотопією в будь-яке місце. Число доповняльних ручок, що скоротилися або були уведені, задається різницею чисел ручок індексу (0,±1) та (2,±1) початкового і кінцевого розкладів на ручки. Це забезпечує рівність пар доповняльних ручок. А отже, існує ізотопія набору пар доповняльних ручок першого розкладу в такий набір пар іншого розкладу. Ця ізотопія, як і раніше, реалізується гомотопією функцій.

4. Функції на тривимірному диску.

Наша подальша мета — побудувати розклад з мінімальним числом ручок кожного індексу.

Оскільки межа многовиду зв'язна, то для кожної, крім першої, (0, ±1)-ручки знайдеться доповняльна (1, ±1)-ручка. Якщо вони однакового знаку, то ця пара ручок може бути скорочена. Дві (0, –1)-ручки не можуть бути з'єднані (1,+1)-ручкою. Проте (0,+1)-ручка може бути з'єднана (1, –1)-ручкою з іншими ручками. В цьому випадку ця пара ручок рівносильна одній простій 1-ручці на 3-многовиді. Аналогічно, (2, ±1)-ручки, крім однієї (2,+1)-ручки, з'єднуються (1, ±1)-ручками. Пари однакового знаку скорочуються, а пара (1,+1)-ручки з (2, –1)-ручкою рівносильна простій 2-ручці. Якщо пара (0,+1) та (1, –1)-ручок утворюють просту 1-ручку, то незаклеєна частина краю (0,+1)-ручки буде дугою на краю поверхні. Тоді будь-яка (1,+1)-ручка, що приклеюється хоча б одним кінцем до цієї компоненти краю, може бути зроблена доповняльною до (0,+1)-ручки. Аналогічно, для простої 2-ручки.

Розклад на ручки, що не містить пар доповняльних ручок чи пар, що можуть бути зроблені доповняльними після ізотопії, будемо називати мінімальним.

Теорема 4. *Дві m-функції без внутрішніх критичних точок на тривимірному диску можна з'єднати шляхом в просторі m-функцій без внутрішніх критичних точок, якщо вони мають однакові числа критичних точок кожного індекса.*

Доведення. Необхідність випливає з теореми 3.

Достатність. Нехай функції мають однакові числа критичних точок кожного індекса. Це означає, що в розкладі на m-ручки у них однакове число ручок кожного індекса. Скоротимо всі пари доповняльних ручок. Якщо пара (0,+1)- та (1, –1)-ручок утворюють просту 1-ручку, то її приклейка додасть твірну до фундаментальної групи многовида. Оскільки ця група тривіальна, то знайдеться 2-ручка (утворена парою (1,+1)-ручки з (2, –1)-ручкою) доповняльна до цієї 1-ручки. Тоді (1,+1)-ручка від 2-ручки буде доповняльною до (0,+1)-ручки з 1-ручки. Отже, поскорочуються всі (0,±1)-ручки, крім однієї (0, –1)-ручки.

Так само поскорочуються всі (2,±1)-ручки, крім однієї (2, +1)-ручки. Тоді число (1,±1)-ручок буде визначати рід поверхні краю. Оскільки для тривимірного диску цей рід дорівнює 0, то (1,±1)-ручок не буде. Отже, розклад на ручки звівся до двох ручок індексу (0, −1) та (2, +1). Два будь-яких таких розклади будуть ізотопні оскільки на двовимірній сфері ізотопні границі (0, −1)-ручок. Використання теореми 3 завершує доведення.

Висновок.

Доведено критерій гомотопічної еквівалентності (теорема 3) без внутрішніх критичних точок на тривимірних тілах. На його основі отримана гомотопічна класифікація таких m-функцій на тривимірному диску. Цей критерій важливий для отримання гомотопічної класифікації на довільному тривимірному тілі. Фактично він зводить задачу гомотопічної класифікації до задачі побудови канонічного розкладу на m-ручки та проблеми ізотопії таких розкладів.

Література

1. Шарко В. В. Функции на поверхностях I/ В. В. Шарко // Некоторые вопросы совр. математики. Т. 25. — К.: Праці ін-ту математики НАНУ. — 1998. — С. 408–434.
2. Maksymenko S. I. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / S. I. Maksymenko// Comment. Math. Helv. — 2005. — V. 80. — P. 655–690.
3. Лукова-Чуйко Н. В. Пошарова еквівалентність m-функцій загального положення на 3-многовидах з межею / Н. В. Лукова-Чуйко, О. О. Пришляк. // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106) — С. 114–123.
4. Пришляк А. О. Эквивалентность m-функций на трехмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАНУ. — 2000. — №6. — С. 22–26.
5. Пришляк О. О. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанінова. // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101) — С. 113–119.
6. Hajduk B. Minimal m-functions / B. Hajduk // Fund. math. — 1981. — V. 110. — №3. — P. 178–200.
7. Jankowski A. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary / A. Jankowski, R. Rubinsztein // Comm. Math. — 1972. — XVI. — P. 99–112.
8. Максименко С. И. Классификация m-функций на поверхностях / С. И. Максименко // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51. — №8. — С. 1129-1135.
9. Пришляк О. О. Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, К. І. Міщенко, Н. В. Лукова// Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 1–12.

Механіко-математичний факультет та факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 18.04.2012