Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №1(111)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ОРБИТРОН: УСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

С. С. Зуб

Резюме. Основная цель этой статьи — привести конструктивное доказательство существования устойчивых орбитальных движений в системах тел, взаимодействующих только магнитными силами, то есть предъявить конкретную магнитную систему, для которой строго аналитически доказывается устойчивость. Рассматривается динамика малого магнитного тела — магнитного диполя, совершающего квазиорбитальное движение в поле двух неподвижных магнитных полюсов, расположенных на оси системы. Доказательство использует обобщенный метод энергии-момента для нахождения условий устойчивости исследуемых относительных равновесий. Впервые предложена модель магнитной системы, для которой удается полностью аналитически получить условия устойчивости и прояснить их физический смысл. Подобраны физически реализуемые параметры системы, для которых проведено численное моделирование траекторий движения со случайным выбором начальных данных (метод Монте-Карло) в заданной окрестности.

Введение

Проблема устойчивости магнитных конфигураций имеет давнюю историю. В 1600 году вышел трактат У. Гильберта "О магните, магнитных телах и о большом магните Земле", в котором автор предположил, что магниты могут образовывать бесконтактные устойчивые системы.

С тех пор и по наше время в изучение этой проблемы внесли вклад ряд ученых, имена некоторых из них, например, Ньютона, Ирншоу, Гейзенберга, Капицы, Браунбека, Тамма, Гинзбурга хорошо известны всем.

Проблема устойчивости магнитного равновесия естественным образом распадается на задачи статического и динамического равновесия.

К сожалению, и в той и в другой области возник ряд предубеждений и заблуждений, не до конца проясненных и сегодня.

Что касается статического равновесия, то таким заблуждением стало некритическое перенесение вывода теоремы Ирншоу о неустойчивости систем из электростатики на область магнитных явлений. Отчасти это заблуждение было отброшено по результатам опытов Браунбека и Капицы-Аркадьева по магнитной левитации (т.е. в комбинации как магнитной силы, так и силы тяжести).

Что касается статического равновесия тел, взаимодействующих исключительно магнитными силами, то решению этого вопроса посвящены ряд работ и диссертация автора [1, 2].

Определенные предубеждения сложились и в проблеме устойчивости динамического равновесия магнитных систем.

На заре ядерной эры в годы бурного исследования атомного ядра магнитное взаимодействие рассматривалось, как возможный механизм удержания частиц в ядре. В работах Тамма и Гинзбурга (1941-1947) было показано, что в случае взаимодействия двух магнитных диполей орбитальное движение невозможно, т.к. имеет место падение частицы на центр как в классической, так и в квантовой механике [3]. Этот факт в физике получил название "проблемы $1/r^3$" и вместе с теоремой Ирншоу, распространенной на случай магнитостатики, на многие годы сформировал мнение "о глобальной неустойчивости магнитных систем".

Но и после этих результатов интерес к магнитной модели материи проявляли такие известные физики как Ю. Швингер [4].

Новый всплеск интереса к проблеме динамического равновесия в магнитных системах вызвало создание Роем Хэрригеном левитрона в 1983 году. Интернет предоставил широкие возможности для популяризации этой необычной игрушки, а также других опытов с магнитными телами [5].

На этом фоне представляется незаслуженной малая известность теоретических и экспериментальных исследований В.В.Козореза, проведенных почти десятью годами раньше в 1974 году [6, 7].

В. В. Козорез пытался реализовать известную идею решения проблемы устойчивости магнитных систем, основанную на учете протяженности магнитной частицы, высказаную Гейзенбергом в 20-х годах прошлого века.

Ему удалось создать экспериментальную установку, в которой небольшой магнит совершал квазиорбитальное движение продолжительностью до 6 минут (эта установка, в отличие от левитрона не была запатентована).

Как уже отмечалось в нашей работе [8], его теоретические исследования носят скорее оценочный характер, т.к. в то время еще не был создан адекватный математический аппарат [9, 10, 11, 12] для исследования устойчивости систем типа [13].

В частности, полученное Козорезом условие устойчивости для системы, аналогичной рассмотренной ниже в данной статье, является только одним из трех достаточных условий устойчивости. Это условие дает просто точное выражение того хорошо известного факта, что на значительном удалении любая магнитная система выглядит как диполь.

Что касается эксперимента, то с философской точки зрения эксперимент как натуральный, так и численный в принципе не может доказать динамическую устойчивость, а может только дать определенные доводы в пользу последней [13, 15, 14].

Впервые строго аналитическое доказательство устойчивости орбитального движения в магнитных системах дано в работе [8]. Аналитические условия устойчивости для системы из двух "магнитных гантелей" имеют довольно сложный вид и значения параметров из области устойчивости этой системы определялись численно.

Поэтому имеет смысл рассмотреть более простую магнитную систему, условно названную нами Орбитроном, для которой в данной работе не только доказывается аналитически существование устойчивых орбит, но и условия устойчивости имеют простой физический смысл.

В этой системе подвижное тело является небольшим постоянным магнитом с осевой симметрией. Его взаимодействие с магнитным полем описывается в приближении магнитного диполя, а движение подчиняется законам движения твердого тела.

Это отличается от модели, принятой в работе [14]. Мы не используем аналогию, возникающую из попыток классического описания такой квантово-механической величины, как спин частицы.

Уравнения движения магнитного диполя в заданном внешнем магнитном поле в рамках гамильтонового подхода были приведены в работе [15], а в работе [16] дан гамильтонов формализм для системы магнитно взаимодействующих осесимметричных тел (как с постоянными магнитными моментами, так и сверхпроводящих), что позволяет получить правильные уравнения для магнитного диполя как частный случай.

В математической модели, которую мы будем называть Орбитроном, на основе результатов работ [11, 17, 18] строго аналитически доказывается существование устойчивого орбитального движения небольшого намагниченного твердого тела, описываемого как магнитный диполь. Достаточные условия устойчивости принимают в этой модели простой вид, допускающий ясную физическую интерпретацию.

1. Гамильтонов фомализм для магнитного диполя в осесимметричном магнитном поле

Рассмотрим гамильтонову динамику "небольшого" твердого тела, для которого справедливо приближение магнитного диполя, в осесимметричном магнитном поле. Такое поле могут создавать цилиндрические магниты, соленоиды, токонесущие кольца и др. с осью симметрии вдоль оси z.

Вариант такого формализма может быть получена из формализма работы [16] путем предельного перехода к массе $m_1 \to \infty$. Т.о. мы считаем первое тело неподвижным и ориентированным по оси z. Тогда его динамические переменные исчезают из рассмотрения либо становятся параметрами модели. При этом группа симметрии задачи сужается до $S^1 = SO(2)$.

Для построения гамильтоновой динамики на основе пуассоновых структур необходимо указать пуассоново многообразие, а также кинетическую и потенциальную энергию системы.

Пуассоновым многообразием Орбитрона является прямое произведение евклидовых пространств

$$P = R_x^3 \times R_p^3 \times R_\nu^3 \times R_n^3 \tag{1}$$

вместе со скобками Пуассона для соотвествующих образующих.

Образующими для Орбитрона будут: x_i - координаты диполя; p_i - его компоненты импульса (орбитального движения); n_i - компоненты собственного момента импульса диполя; ν_i - компоненты направляющего орта оси симметрии диполя.

Ненулевые скобки Пуассона между образующими на P имеют вид

$$\begin{cases} \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}; \\ \{n_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijk}\nu_k; \quad \{n_i, n_j\} = \varepsilon_{ijk}n_k. \end{cases} \tag{2}$$

Переменные в (2) относятся к внешней инерциальной системе отсчета. Подобный подход используется в работах [19, 20]. В работе [20] отмечается, что полученные из (2) уравнения всегда обладают двумя первыми интегралами, являющимися функциями Казимира, а именно, нетрудно проверить, что они имеют следующий вид: $\vec{\nu}^{\,2} = 1$ и $(\vec{\nu}, \vec{n}) = const$. Выражения (2) приводят к скобкам Пуассона динамических переменных общего вида:

$$\begin{aligned} &\{f(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\nu}, \vec{n}), g(\vec{x}, \vec{p}, \vec{\nu}, \vec{n})\} = \\ &\quad \langle \nabla^{(x)} f, \nabla^{(p)} g\rangle - \\ &\quad \langle \nabla^{(p)} f, \nabla^{(x)} g\rangle + \\ &\quad \langle \vec{\nu}, \nabla^{(n)} f \times \nabla^{(\nu)} g + \nabla^{(\nu)} f \times \nabla^{(n)} g\rangle + \\ &\quad \langle \vec{n}, \nabla^{(n)} f \times \nabla^{(n)} g\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Справедливость тождества Якоби для данной структуры проверялась прямыми вычислениями.

Гамильтониан системы запишем в виде:

$$h = T + U(r, c^{'}, c^{''}, c^{'''}), \tag{4}$$

где

$$U = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}), \tag{5}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r, c')\vec{e}_r + B_z(r, c')\vec{e}_z, \tag{6}$$

$$\begin{cases} r = |\vec{r}|; \\ \vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|; \\ c' = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = x_3/r; \\ c'' = \vec{\nu} \cdot \vec{e}_r; \\ c''' = \vec{e}_z \cdot \vec{\nu} = \nu_3. \end{cases} \tag{7}$$

Как обычно, кинетическая энергия подвижного тела (диполя) складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений [16, 8].

$$T(p^2, \vec{n}^2) = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{\alpha}{2}\vec{n}^2,$$

где M — масса диполя; $\alpha = \frac{1}{I_\perp}$ (как и ранее мы полагаем, что $I_1 = I_2 = I_\perp$, где I_1, I_2, I_3 — собственные моменты инерции тела).

Получаем систему уравнений движения для магнитного диполя в осесимметричном магнитном поле:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p}/M; \\ \dot{\vec{p}} = -\partial_r U \vec{e}_r - \frac{1}{r}(\partial_{c'} U P^e_\perp(\vec{e}_z) + \partial_{c''} U P^e_\perp(\vec{\nu})); \\ \dot{\vec{\nu}} = \alpha(\vec{n} \times \vec{\nu}); \\ \dot{\vec{n}} = -\vec{\nu} \times (\vec{e}_r \partial_{c''} + \vec{e}_z \partial_{c'''}) U, \end{cases} \tag{8}$$

где $P^e_\perp$ — проектор на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{e}_r$, т.е. $P^e_\perp(\vec{e}_z) = \vec{e}_z - c^{'} \vec{e}_r$ и $P^e_\perp(\vec{\nu}) = \vec{\nu} - c^{''} \vec{e}_r$.

Известны выражения для силы и момента сил, действующих на диполь во внешнем магнитном поле. Покажем, что второе и четвертое уравнение системы (8) могут быть представлены в классическом виде.

Что касается второго уравнения системы (8), то оно получено из стандартного для гамильтонового формализма соотношения

$$\dot{p_i} = \{p_i, H\} = \{p_i, U\} = \partial_r U\{p_i, r\} + \partial_{c'} U\{p_i, c^{'}\} + \partial_{c''} U\{p_i, c^{''}\}. \tag{9}$$

Для потенциальной энергии вида (5) получаем классическое выражение силы

$$\dot{\vec{p}} = \{\vec{p}, H\} = \{\vec{p}, U\} = -\nabla U = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Что касается четвертого уравнения системы (8), то для потенциальной энергии диполя, описываемой (5), в магнитном поле осесимметричного типа, описываемого (6), имеет место

$$(\vec{e}_r \partial_{c''} + \vec{e}_z \partial_{c'''}) U = -\mu \vec{B}. \tag{10}$$

Тогда получаем последнее уравнение из (8) в привычном классическом виде

$$\dot{\vec{n}} = \mu \vec{\nu} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{11}$$

Теперь система уравнений (8) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{p}/M; \\ \dot{\vec{p}} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}); \\ \dot{\vec{\mu}} = (\vec{n} \times \vec{\mu})/I_\perp; \\ \dot{\vec{n}} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \end{cases} \tag{12}$$

По поводу систем уравнений движения (8, 12) необходимо сделать несколько замечаний.

1. Как та, так и другая системы справедливы в приближении квазистационарного электромагнитного поля [21, 22]. Это приближение характеризуется тем, что в пределах системы пренебрегается конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений и током смещения, а магнитные поля расчитываются по формулам магнитостатики.

2. Система уравнений (8) использует понятие магнитной потенциальной энергии, свойственное концепции дальнодействия в классической механике. Как только что отмечено, это допустимо в квазистационарном приближении. Выбранная форма потенциальной энергии, как в (4), описывает не

только диполи, но и достаточно широкий класс осесимметричных магнитных тел.

3. Система уравнений (12) соответствует концепции близкодействия в теории электромагнитного поля. При этом очевидно, что эти уравнения справедливы не только для осесимметричного магнитного поля, но и описывают движение диполя в *произвольном* внешнем магнитном поле.

4. Мы рассматриваем магнитный диполь, как малое намагниченое твердое тело с осевой симметрией, например, как в левитроне. Уравнение (1) работы [14] не может в этом случае заменить третье и четвертое уравнение системы (12). Это и отличает нашу математическую модель от той, что принята в работе [14].

2. Математическая модель Орбитрона

Не все осесимметричные магнитные поля могут создать возможность для устойчивого орбитального движения магнитного диполя. Например, поле магнитно-дипольного типа приводит к упомянутой во введении "проблеме $1/r^3$". Следовательно, имеет смысл воспользоваться гипотезой Гейзенберга о возможности устойчивых магнитных конфигураций с протяженными магнитными телами (см. также [7]).

Итак, предлагается следующая модель Орбитрона.

На оси z в точках $\pm h$ расположим два разноименных магнитных полюса. Эти полюса создают осесимметричное магнитное поле, в котором и движется магнитный диполь. Предполагается, что при определенных параметрах системы возможно устойчивое орбитальное движение.

Здесь следует дать пояснение. Уравнения магнитостатики не предполагают существование уединенных магнитных зарядов. Однако, поле, например, тонкого соленоида (то же и для тонкого цилиндрического магнита) *вне соленоида* с большой точностью будет совпадать с полем двух полюсов [23]. С другой стороны, поле *внутри соленоида* не только не совпадает с полем зарядов, но и противоположно по знаку, так что поток через замкнутую поверхность, охватывающую только один полюс, равен нулю, как это и требуют уравнения магнитостатики.

Предполагается, что диполь движется на достаточном удалении от полюсов магнита, являющегося источником поля, и модель двух магнитных зарядов описывает поле с высокой точностью.

Таким образом, магнитное поле в системе имеет вид суммы кулоновских полей двух зарядов:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \vec{B}_\varepsilon(\vec{r}), \qquad \vec{B}_\varepsilon = \frac{\mu_0}{4\pi}\varepsilon\kappa \frac{\vec{r}-\varepsilon h\vec{e}_z}{|\vec{r}-\varepsilon h\vec{e}_z|^3}, \tag{13}$$

где каждое из полей $\vec{B}_\varepsilon$, а следовательно и суммарное поле может быть представленно в виде (6).

Тогда для потенциальной энергии диполя в магнитном поле получаем следующее выражение

$$U(r,c',c'',c''') = -\frac{\lambda_0}{4\pi}\sum_{\varepsilon=\pm 1}\varepsilon U_\varepsilon(r,c\,',c\,'',c\,'''),\quad \lambda_0=\mu_0\kappa\mu, \tag{14}$$

где

$$U_\varepsilon(r,c\,',c\,'',c\,''') = \frac{rc\,''-\varepsilon hc\,'''}{R_\varepsilon(r,c\,')^3} \tag{15}$$

и

$$R_\varepsilon(r,c\,') = \left(r^2-2\varepsilon hrc\,'+h^2\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Приведем первые производные функции U_ε:

$$\partial_r U_\varepsilon = \frac{c''}{R_\varepsilon(r,c\,')^3} - \frac{3\left(rc''-\varepsilon hc'''\right)\left(r-\varepsilon hc'\right)}{R_\varepsilon(r,c\,')^5}, \tag{17}$$

$$\partial_{c'} U_\varepsilon = \frac{3\left(rc''-\varepsilon hc'''\right)\varepsilon hr}{R_\varepsilon(r,c\,')^5}, \tag{18}$$

$$\partial_{c''} U_\varepsilon = \frac{r}{R_\varepsilon(r,c\,')^3}, \tag{19}$$

$$\partial_{c'''} U_\varepsilon = -\frac{\varepsilon h}{R_\varepsilon(r,c\,')^3}. \tag{20}$$

3. Пример устойчивого орбитального движения

Основная цель этой работы состоит в доказательстве существования устойчивого орбитального движения в системах тел, взаимодействующих исключительно магнитными силами. Примером такой системы является описанный в п.2 Орбитрон, а устойчивой орбитой будет круговая орбита в плоскости $z=0$.

3.1 Относительные равновесия

Особую роль в вопросах устойчивости орбитальных движений гамильтоновых систем играют так называемые *относительные равновесия* [18, 10, 11, 12], т.е. такие траектории динамики системы, которые одновременно являются однопараметрическими подгруппами группы инвариантности системы.

Как уже отмечалось, группой инвариантности Орбитрона является S^1. Каждая однопараметрическая подгруппа этой группы будет характеризоваться своей угловой скоростью вращения $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z$. Скорость изменения любой физической величины $\vec{v}$ нашей задачи вдоль орбиты данной подгруппы будет задаваться формулой $\dot{\vec{v}}=\vec{\omega}\times\vec{v}$.

Поэтому, для относительного равновесия должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{r}); \\ \dot{\vec{p}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{p}); \\ \dot{\vec{\nu}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{\nu}); \\ \dot{\vec{n}} = \omega(\vec{e}_z \times \vec{n}). \end{cases} \tag{21}$$

Покажем, что существует динамическая орбита, для которой выполняются эти соотношения. Рассмотрим орбиту, пространственно расположенную в плоскости $z = 0$. Предположим также, что $\vec{\nu} \parallel \vec{e_z}$ и $\vec{n} \parallel \vec{e_z}$. Тогда вдоль всей этой траектории $c^{'} = c^{''} = 0$, $c^{'''} = \pm 1$ и из (14), (18-20) следует, что $\partial_{c'}U = \partial_{c''}U = \partial_{c'''}U = 0$.

Третье и четвертое уравнение системы (8) при этом выполняются тождественно, а первое и второе сводятся к уравнению второго порядка вида

$$M\ddot{\vec{r}} + \left(\frac{\partial_r U}{r}\right)_{|r=r_0} \vec{r} = 0. \tag{22}$$

При услови $(\partial_r U)_{|r=r_0} > 0$ уравнение (22) имеет решение, соответсвующее движению по окружности радиуса r_0 с частотой, которая определяется соотношением

$$\left(\frac{\partial_r U}{r}\right)_{|r=r_0} = \omega^2 M. \tag{23}$$

Таким образом, можно считать доказанным, что приведенная орбита, действительно, является относительным равновесием.

Подходящим инструментом для исследования устойчивости относительных равновесий на пуассоновых многообразиях является теорема 4.8. статьи [11]. Важным преимуществом теоретико-групповых методов представляется то, что исследование функционального пространства траекторий заменяется на исследование конечномерного векторного пространства вариаций динамических переменных в *фиксированной* точке траектории. При этом схема исследования устойчивости во многом аналогична изучению условного экстремума функции методом неопределенных множителей Лагранжа.

3.2 Выбор опорной точки

Зададим такую точку на орбите относительного равновесия

$$z_e = \begin{cases} \vec{x}_0 = r_0 \vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_2; \\ \vec{\nu} = -\vec{e}_3; \\ \vec{n} = n_0 \vec{e}_3. \end{cases} \tag{24}$$

Заметим, что знак механического момента n_0 мы не фиксируем, он может быть *любым*. Что же касается знака p_0, то для положительной угловой скорости он будет положительным.

Покажем, что в опорной точке выполняются соотношения

$$\partial_{c'} U_{|z_e} = 0; \qquad \partial_{c''} U_{|z_e} = 0. \tag{25}$$

Т.к. в опорной точке

$$\begin{cases} c' = 0; \\ c'' = 0; \\ c''' = -1, \end{cases} \tag{26}$$

то

$$R_\varepsilon(r, c')_{|z_e} = (r^2 + h^2)^{1/2} \tag{27}$$

Из выражений для производных потенциальной энергии (18-19)

$$(\partial_{c'} U_\varepsilon)_{|z_e} = \frac{3h^2 r}{(r^2 + h^2)^{5/2}}, \qquad (\partial_{c''} U_\varepsilon)_{|z_e} = \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \tag{28}$$

замечаем, что оба этих выражения не зависят от ε, а, значит, в сумме по ε (с множителем ε) они дадут 0.

3.3 Необходимое условие устойчивости и множители Лагранжа

В качестве интегралов движения мы возьмем

$$\begin{cases} j_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + n_3; \\ C_1 = \frac{\lambda_1}{2} \vec{\nu}^2; \\ C_2 = \lambda_2 (\vec{\nu}, \vec{n}), \end{cases} \tag{29}$$

где 1-я строка представляет сохраняющуюся 3-ю компоненту полного момента тела, а 2 остальные являются функциями Казмира системы.

Выпишем соответствующие дифференциалы в точке z_e

$$\begin{cases} (\boldsymbol{d} j_3)_{|z_e} = p_0 \boldsymbol{d} x_1 + r_0 \boldsymbol{d} p_2 + \boldsymbol{d} n_3; \\ (\boldsymbol{d} C_1)_{|z_e} = -\lambda_1 \boldsymbol{d} \nu_3; \\ (\boldsymbol{d} C_2)_{|z_e} = \lambda_2 (n_0 \boldsymbol{d} \nu_3 - \boldsymbol{d} n_3). \end{cases} \tag{30}$$

Целевая функция (присоединенный гамильтониан) имеет вид

$$\tilde{H} = T + U - \omega j_3 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2. \tag{31}$$

Необходимым условием устойчивости в теореме 4.8. статьи [11] является равенство нулю дифференциала целевой функции в опорной точке, т.е. $\boldsymbol{d}\tilde{H}_{|z_e} = 0$.

Для дифференциала потенциальной энергии имеем

$$\boldsymbol{d} U_{|z_e} = \partial_r U \boldsymbol{d} x_1 + \partial_{c'''} U \boldsymbol{d} \nu_3. \tag{32}$$

Для дифференциала кинетической энергии имеем

$$\boldsymbol{d} T_{|z_e} = \frac{p_0}{M} \boldsymbol{d} p_2 + \alpha n_0 \boldsymbol{d} n_3. \tag{33}$$

Собирая дифференциалы целевой функции, получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}\tilde{H}_{|z_e} = (\partial_r U_{|z_e} - \omega p_0)\boldsymbol{d}x^1 + \\ + \left(\frac{p_0}{M} - \omega r_0\right)\boldsymbol{d}p_2 + \\ +(\partial_{c'''}U_{|z_e} - \lambda_1 + \lambda_2 n_0)\boldsymbol{d}\nu^3 + \\ +(\alpha n_0 - \omega - \lambda_2)\boldsymbol{d}n_3.\end{aligned} \tag{34}$$

Приравнивая $\boldsymbol{d}\tilde{H}_{|z_e}$ нулю выводим следующее выражения для множителей Лагранжа

$$\begin{cases} p_0/M = \omega r_0; \\ \omega p_0 = \partial_r U_{|z_e} = \frac{3Kr_0}{R^2}; \\ \lambda_2 = \alpha n_0 - \omega; \\ \lambda_1 = \partial_{c'''}U_{|z_e} + \lambda_2 n_0 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega), \end{cases} \tag{35}$$

где

$$K = \partial_{c'''}U_{|z_e} = \frac{\lambda_0 h}{2\pi R^3}. \tag{36}$$

1-е из уравнений (35) — это обычная связь между линейной и угловой скоростью при круговом орбитальном движении.

2-е из уравнений (35) — равенство центробежной (слева) и центростремительной (справа) сил.

Из этих двух выражений получаем соотношение для угловой скорости, а именно

$$M\omega^2 = \frac{1}{r_0}\partial_r U_{|z_e} = \frac{3K}{R^2}. \tag{37}$$

3.4 Допустимые вариации

Для применения достаточного условия устойчивости по теореме 4.8 статьи [11] необходимо выделить линейное подпространство допустимых вариаций.

Рассмотрим вариации динамических переменных, аннулирующих дифференциалы (30).

Из 2-й строки (30) следует $\delta\nu^3 = 0$, тогда из 3-й строки следует $\delta n^3 = 0$.

Т.о. получаем

$$\begin{cases} \delta\nu^3 = 0; \\ \delta n_3 = 0; \\ \delta p_2 = -\frac{p_0}{r_0}\delta x_1. \end{cases} \tag{38}$$

Отсюда следует, что как независимые могут рассматриваться вариации вида

$$\delta x^1,\ \delta x^2,\ \delta x^3; \quad \delta p_1,\ \delta p_3; \quad \delta\nu^1,\ \delta\nu^2; \quad \delta n_1,\ \delta n_2, \tag{39}$$

при этом, мы еще должны исключить из этого подпространства направление, касательное к орбите.

Из формулы (21) следует, что это направление в точке z_e определяется так

$$\begin{cases} \delta\vec{x} = r_0\vec{e}_2; \\ \delta\vec{p} = -p_0\vec{e}_1; \\ \delta\vec{\nu} = 0; \\ \delta\vec{n} = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Чтобы исключить вариацию вида (40), наложим на вариации еще одно дополнительное условие, и тогда получим связи

$$\begin{cases} \delta\nu^3 = 0; \\ \delta n_3 = 0; \\ \delta p_1 = \frac{p_0}{r_0}\delta x_2; \\ \delta p_2 = -\frac{p_0}{r_0}\delta x_1, \end{cases} \tag{41}$$

а независимым набором вариаций будет

$$\delta x^1,\ \delta x^2,\ \delta x^3; \quad \delta p_3; \quad \delta\nu^1,\ \delta\nu^2; \quad \delta n_1,\ \delta n_2. \tag{42}$$

3.5 Основная квадратичная форма

Достаточное условие минимума состоит в положительной определенности квадратичной формы вида $\boldsymbol{d}^2\tilde{H}_{|z_e}(\delta z, \delta z)$, где вектор вариации δz должен быть выражен через независимые вариации (42) с учетом связей (41). Полученную квадратичную форму от независимых вариаций обозначим через Q.

Вычисление гессиана целевой функции (присоединенного гамильтониана) и основной квадратичной формы от независимых вариаций выполнены в Maple.

Для лучшего структурирования выражений неопределенные множители Лагранжа на первом этапе не раскрываются.

После незначительной перестановки столбцов (и соответствующих строк с тем же номером) матрица основной квадратичной формы приобретает вид

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{33} & Q_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{35} & Q_{55} & Q_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{57} & Q_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & Q_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{68} & Q_{88} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Выпишем ненулевые элементы матрицы квадратичной формы (построчно). Подставляя выражение для $M\omega^2$ из (37) в Q_{11}, Q_{22}, получим

$$Q_{11} = 3\left(\frac{h^2 - 4r_0^2}{R^2}\frac{K}{R^2} + M\omega^2\right) = \frac{3K}{R^2}\frac{4h^2 - r_0^2}{R^2}, \tag{44}$$

$$Q_{22} = 3\left(\frac{K}{R^2} + M\omega^2\right) = \frac{12K}{R^2}, \tag{45}$$

$$Q_{44} = \frac{1}{M}, \tag{46}$$

$$Q_{33} = \frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2}\frac{3K}{R^2}, \qquad Q_{35} = -\frac{3Kr_0}{R^2}, \tag{47}$$

$$Q_{55} = \lambda_1, \quad Q_{57} = \lambda_2, \tag{48}$$

$$Q_{77} = \alpha, \tag{49}$$

$$Q_{66} = \lambda_1 = Q_{55}, \quad Q_{68} = \lambda_2 = Q_{57}, \tag{50}$$

$$Q_{88} = \alpha = Q_{77}. \tag{51}$$

3.6. Условия положительной определенности основной квадратичной формы

Для положительной определенности матрицы Q необходимо, прежде всего, чтобы все диагональные элементы матрицы были положительными.

Заведомо положительными являются Q_{22}, Q_{44}, Q_{77}, Q_{88}. Оставшиеся условия выглядят так

$$\begin{cases} 0 < Q_{11} = \frac{3K}{R^2}\frac{4h^2 - r_0^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{33} = \frac{3K}{R^2}\frac{3r_0^2 - 2h^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega). \end{cases} \tag{52}$$

Первые два условия сводятся к чисто геометрическим ограничениям

$$(Q_{11} > 0)\,\&\,(Q_{33} > 0) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{r_0}{h}\right)\&\left(\frac{r_0}{h} < 2\right). \tag{53}$$

Эти условия положительной определенности матрицы Q теперь следует дополнить условими положительной определенности двух подматриц 3×3 и 2×2, а именно

$$\begin{bmatrix} Q_{33} & Q_{35} & 0 \\ Q_{35} & Q_{55} & Q_{57} \\ 0 & Q_{57} & Q_{77} \end{bmatrix} \tag{54}$$

и

$$\begin{bmatrix} Q_{66} & Q_{68} \\ Q_{68} & Q_{88} \end{bmatrix}. \tag{55}$$

С учетом выше сказаного для матрицы (55) достаточно проверить условие положительности ее детерминанта $Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2$. Таким образом к условиям (53) добавляется следующее условие

$$0 < Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2 = \alpha K + \omega(\alpha n_0 - \omega). \tag{56}$$

Исследуем теперь условия положительной определенности матрицы (54). 1-е условие $Q_{33} > 0$ мы уже рассмотрели. Т.о. дополнительные условия положительной определенности матрицы (54) сводятся к положительности двух детерминантов

$$0 < Q_{33}Q_{5,5} - Q_{35}^2 \tag{57}$$

и

$$0 < Q_{33}Q_{55}Q_{77} - Q_{33}Q_{57}^2 - Q_{77}Q_{35}^2. \tag{58}$$

Условие (58) может быть также записано в виде

$$Q_{77}(Q_{33}Q_{55} - Q_{35}^2) > Q_{33}Q_{57}^2 \tag{59}$$

и, так как $Q_{77} > 0$, то (58) переходит в

$$Q_{33}Q_{55} - Q_{35}^2 > \frac{Q_{33}}{Q_{77}}Q_{57}^2, \tag{60}$$

которое заменяет условие (57), т.к. перекрывает его.

Итак, условие (57) является излишним и надо изучать только условие (58). Напомним, что

$$\begin{cases} Q_{33} = \frac{3K}{R^2}\frac{3r_0^2-2h^2}{R^2}; \\ Q_{35} = -3\frac{Kr_0}{R^2}; \\ Q_{55} = K + n_0(\alpha n_0 - \omega) = Q_{66}; \\ Q_{57} = \alpha n_0 - \omega = Q_{68}; \\ Q_{77} = \alpha = Q_{88}. \end{cases} \tag{61}$$

Запишем теперь (58) в форме

$$Q_{55}Q_{77} - Q_{57}^2 > \frac{Q_{77}Q_{35}^2}{Q_{33}}, \tag{62}$$

т.к. следует полагать, что $Q_{33} > 0$.

Учитывая (61), условие (62) эквивалентно

$$Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2 > \frac{Q_{77}Q_{35}^2}{Q_{33}} > 0. \tag{63}$$

Т.о., условие (56) является следствием условия (58) и $Q_{33} > 0$ из (52). Это означает, что условие (56) может быть опущено.

Имеем следующий сокращенный набор условий положительной определенности матрицы Q

$$\begin{cases} 0 < Q_{11} = \frac{3K}{R^2}\frac{4h^2-r_0^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{33} = \frac{3K}{R^2}\frac{3r_0^2-2h^2}{R^2}; \\ 0 < Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 = K + n_0(\alpha n_0 - \omega); \\ 0 < Q_{33}Q_{55}Q_{77} - Q_{33}Q_{57}^2 - Q_{77}Q_{35}^2. \end{cases} \tag{64}$$

Исследуем последнее из условий (64) в форме

$$\begin{aligned} 0 &< Q_{33}(Q_{55}Q_{77} - Q_{57}^2) - Q_{77}Q_{35}^2 = \\ &= Q_{33}(Q_{66}Q_{88} - Q_{68}^2) - Q_{77}Q_{35}^2 = \\ &= \frac{3K}{R^4}[(3r_0^2 - 2h^2)\omega(\alpha n_0 - \omega) - 2\alpha K h^2]. \end{aligned}$$

Это условие эквивалентно

$$\frac{\omega}{\alpha}(\alpha n_0 - \omega) > \frac{K}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1}. \tag{65}$$

В частности, т.к. $Q_{33} > 0$, имеем $\alpha n_0 - \omega > 0$, а это значит, что условия $Q_{55} = Q_{66} = \lambda_1 > 0$ заведомо выполняется и может быть опущено.

Итак, выполнение условий

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{r_0}{h} < 2; \\ \frac{\omega}{\alpha}(\alpha n_0 - \omega) > \frac{K}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1} \end{cases} \tag{66}$$

обеспечивает положительную определенность формы Q.

4. Физический смысл условий положительной определенности

В предыдущем разделе были найдены такие условия на параметры системы, которые обеспечивают положительную определенность основной квадратичной формы (66).

1-е условие в (66) является чисто геометрическим, определяя допустимый диапазон для радиуса орбиты, представляющей относительное равновесие (24). 2-е условие является динамическим и определяет нижнюю границу для собственного момента импульса тела. В частности, это означает, что тело должно достаточно быстро вращаться. Поэтому есть смысл разрешить это неравенство относительно n_0.

Используя соотношения (37), получим

$$n_0 \ > \ \frac{\omega}{\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1 + (\frac{h}{r_0})^2}{\frac{3}{2}(\frac{r_0}{h})^2 - 1}(\omega M r_0^2). \tag{67}$$

Величина ω/α соответствует собственному моменту, который имело бы тело, если бы вращалось с угловой скоростью ω перпендикулярно своей оси симметрии.

Величина $\omega(M r_0^2)$ является ни чем иным, как орбитальным моментом импульса $(L_z)_{|z_e}$.

Условию (67) можно придать такой физический смысл: *собственный момент вращения тела должен быть порядка орбитального или больше него.*

Действительно, множитель перед $\omega(M r_0^2)$ является геометрическим фактором, который при $r_0/h = 1,0$ равен $\sim 1,33$, а при $r_0/h = 1,5$ равен $\sim 0,2$.

В этих оценках 1-м слагаемым в правой части выражения (67) можно пренебречь.

5. Численное моделирование

В математическом плане полученные выше условия устойчивости допускают широкий диапазон значений параметров задачи, однако не все они могут быть реализованы физически. В физическом плане значение параметров ограничивается свойствами имеющихся материалов.

Кроме того, очевидно, на практике трудно реализовать высокие скорости вращений, особенно это касается собственной угловой скорости вращения подвижного магнитного тела (диполя).

Поэтому представляется необходимым указать такие значения параметров, которые могут быть реализованы в эксперименте. Для магнитов, изготовленных из $Nd - Fe - B$, имеем следующие физические характеристики: $\rho = 7,4 \cdot 10^3$(кг/м^3) – плотность и $B_r = 0,25$(Тл) — остаточная индукция. Тогда нетрудно получить магнитный "заряд" полюса $\kappa = 17,6$(А $\cdot$ м). Растояние между полюсами $L = 2h = 0,1$(м).

Подвижный магнит выберем в форме цилиндра (диска) с диаметром $d = 0,014$(м) и высотой $l = 0,006$(м). Тогда магнитный момент диска $\mu = 0,18$(А $\cdot$ м^2).

В результате для орбиты радиусом $r_0 = 1,5h = 0,075$(м) получим угловую скорость орбитального движения $\omega = 1,54$(рад/с), при этом минимальная угловая скорость собственного вращения диска в этом случае составит $\Omega = 72,8$(рад/с). Такие значения угловых скоростей представляются вполне разумными.

С использованием указаных значений параметров Орбитрона было проведено численное моделирование орбитального движения при отклонениях начальных значений динамических переменных от значений, соответствующих относительному равновесию, в пределах 1%. Методом Монте-Карло (т.е. случайно выбирая начальные значения в данной окрестности) было совершено 1000 бросаний, которые продемонстрировали устойчивость орбитального движения. Более подробно это будет освещено в следующих частях данной работы.

Выводы

Была предложена новая математическая модель магнитной системы, для которой впервые существование устойчивых орбитальных движений может быть доказано полностью аналитически.

Показано, что обобщенный метод энергии–момента обеспечивает необходимый математический аппарат для исследования устойчивости орбитальных движений в рассмотренной модели.

Дана физически прозрачная интерпретация полученных условий устойчивости и подобраны физически реализуемые параметры исследуемой системы.

Проведены независимые (методом прямого численного моделирования) исследования траекторий в окрестности найденных относительных равновесий. Для генерации начальных условий испытуемых траекторий использовался метод Монте-Карло.

Литература

1. Zub S. S. Contact-free Static Stable Equilibrium in the Ground and Space Systems / S. S. Zub // in Proc. of the Int. Conf. on MagLev Sys. and Linear Drivers / Lausanne, Switzerland. — 2002.
2. Зуб С. С. Вплив топології надпровідних елементів на стійкість рівноваги вільного тіла: автореф. канд. тех. наук / С. С. Зуб. — К., 2005. — 15 с.
3. Гинзбург В. Л. Теория мезона и ядерные силы / В. Л. Гинзбург // — Усп. физ. наук. — 1947. — Т. 31, вып. 2. — С. 174–209.

4. Schwinger J. A Magnetic Model of Matter / J. Schwinger // Science/ — 1969. — Vol. 165, № 3895.
5. Harrigan R. M. Levitation device / R. M. Harrigan // U. S. Patent 382245, May 3, 1983.
6. Козорез В. В. О задаче двух магнитов / В. В. Козорез // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1974. — № 3. — С. 29–34.
7. Козорез В. В. Динамика системы магнитно взаимодействующих свободных тел / В. В. Козорез — К. : Наук. думка, 1981. — 140 с.
8. Zub S. S. Research into Orbital Motion Stability in System of Two Magnetically Interacting Bodies / S. S. Zub // Int.-Arch., — 2012. — Vol. 1, iss. 2. — P. 10.
9. Marsden J. E. Introduction to Mechanics and Symmetry / J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Cambridge University Press, London, 1998.
10. Marsden J. E. Lectures on Mechanics / J. E. Marsden // Cambridge University Press, London, 1992.
11. Ortega J-P. Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry / J-P. Ortega, T. S. Ratiu // J. Geom. Phys. — 1999. — 32. — P. 160.
12. Marsden J. E. Hamiltonian reduction by stages / J. E. Marsden, G. Misiolek, J-P. Ortega, M. Perlmutter, T. S. Ratiu // Springer-Verlag, New York, 2007.
13. Zub S. S. Hamiltonian formalism for magnetic interaction of free bodies / S. S. Zub // J.Num.Appl.Math., — 2010. — Vol. 102., issues 3. –P. 49.
14. Simon M. D. Spin stabilized magnetic levitation / M. D. Simon, L. O. Heflinger, S. L. Ridgway // Am.J.Phys., — 1997. — 65, — P. 286.
15. Dullin H. R. Stability of Levitrons / H. R. Dullin, R. W. Easton // Physica D. — 1999. — 126. — P. 1.
16. Zub S. S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies / S. S. Zub // PoS(ACAT08)116, — 2009. — P. 5.
17. Simo J. C. Stability of relative equilibria II: Three dimensional elasticity / J. C. Simo, D. Lewis, J. E. Marsden // Arch. Rational Mech. Anal., 115, — P. 61 — 100.
18. Patrick G. W. Relative equilibria in Hamiltonian systems: the dynamic interpritation of nonlinear stability on a reduced phase space / G. W. Patrick // J.Geom.Phys., — 1992. — 9. — P. 111.
19. Bogoyavlenskii O. I. Integrable Euler Equations on Lie Algebras Arising in Problems of Mathematical Physics / O. I. Bogoyavlenskii // Mathematics of the USSR-Izvestiya, — 1985. — Vol. 25, issues 2. — P. 207.
20. Borisov A. V. Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // Izd. UdSU, Izhevsk, 1999.
21. Tamm I. E. Fundamentals of the theory of electricity / I. E. Tamm // Mir, 1979.
22. Landau L. D. Electrodynamics of continous media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz // Pergamon, Oxford, 1960.
23. Smythe W. R. Static and Dynamic Electricity / W. R. Smythe // McGraw-Hill, New York, 1939.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 29.08.2012