Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №1(111) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.91

ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Г. Руткас, М. С. Филипковская

Резюме. Доказана теорема существования и единственности глобального решения полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с регулярным характеристическим пучком матриц индекса один в конечномерном вещественном пространстве. Нелинейная правая часть может не удовлетворять глобальному условию Липшица. Используется метод продолжения решений через дифференциальные неравенства с функциями Ляпунова и Ла-Салля, а также доказанный в работе вариант глобальной теоремы о неявной функции.

Введение

Дифференциально-алгебраические уравнения, не разрешенные относительно производных (см. ниже (4)), возникают в теории электрических цепей, радиотехнике и электронике, математической экономике, робототехнике, дескрипторных системах управления, экологии [1, 2, 3, 4, 5]. Особенностью этих уравнений, порождающей проблему для исследователя, является следующее: в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ существует многообразие размерности $n+1$, точки (t,x) которого недоступны для траекторий $(t,x(t))$ вырожденной динамической системы $\frac{d}{dt}(Ax(t))+Bx(t)=f(t,x)$, для которой $\det A=0$. Все возможные траектории этой системы в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ принадлежат некоторому эволюционному многообразию точек (t,x) размерности меньшей, чем $n+1$, которое будет описано в п. 3.

Вторая проблема — получение глобальных теорем существования и единственности решений нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений, которые необходимы для долгосрочного прогнозирования динамики и управления соответствующими реальными системами. Известные в настоящее время глобальные теоремы основаны на предположениях, эквивалентных глобальным условиям Липшица [5]. Однако реальные нелинейности в радиотехнике, электронике, математической экономике не являются глобально липшицевыми.

В связи с этим в п. 3 мы доказываем глобальную теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения путем продолжения локальных решений с использованием дифференциальных неравенств типа Ляпунова и Ла-Салля.

1. Об одном методе продолжения решений

Предварительно рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$, векторная форма которой имеет вид:

$$\dot{x} = F(t, x), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (t_0 \geq 0), \tag{2}$$

где функция $F(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial F}{\partial x}$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на некотором интервале $[t_0, t_1)$, удовлетворяющая системе (1) и начальному условию (2).

Ниже используются следующие классические понятия и факты (см. [6, 7]).

Решение $x(t)$ задачи (1), (2) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех $t \geq t_0$, то есть решение продолжаемо на весь луч $t_0 \leq t < \infty$ как решение задачи (1), (2). Если решение $x(t)$ *имеет конечное время определения*, то есть не продолжаемо на весь луч $t_0 \leq t < \infty$, то существует такое $c > t_0$, что $\lim\limits_{t \to c-0} \|x(t)\| = \infty$.

Скалярнозначная функция $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если выполнены условия: функция $W(x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в $\mathbb{R}^n$; $W(0) = 0$; $W(x) > 0$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Скалярнозначная функция $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если выполнены условия: функция $V(t, x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$; $V(t, 0) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$; существует такая положительно определенная функция $W(x)$, что $W(x) \leq V(t, x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$.

Производная функции V в силу системы (1) определяется как

$$\dot{V}\Big|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + (gradV, F)\,.$$

Для произвольного $T > 0$ введем срезку $F_T(t, x) = \begin{cases} F(t, x), & 0 \leq t \leq T, \\ F(T, x), & t > T \end{cases}$ функции $F(t, x)$ из (1), систему

$$\dot{x} = F_T(t, x) \tag{3}$$

и производную функции V в силу системы (3)

$$\dot{V}\Big|_{(3)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (gradV, F_T).$$

Заметим, что гладкость функции $F_T(t, x)$ такая же, как и у функции $F(t, x)$.

Через Ω^c будем обозначать дополнение произвольного множества Ω в $\mathbb{R}^n$. Следующая лемма из [8] обобщает соответствующие результаты из [7].

Лемма 1. *Пусть существуют функция* $K(t,v) \in C([0,\infty)\times(0,\infty),\mathbb{R})$ *и положительно определенная функция* $V(t,x) \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *такие, что:*

1) $V(t,x) \to +\infty$, $\|x\| \to \infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном интервале* $[a,b)$ $(b > a \geq 0)$*;*

2) для любого $T > 0$ *найдется ограниченное множество* Ω_T *в* $\mathbb{R}^n$*, содержащее начало координат, такое, что*

$$\dot V\Big|_{(3)} \leq K(t, V(t,x)), \quad x \in \Omega_T^c, \quad t \geq 0;$$

3) дифференциальное неравенство $\dot v \leq K(t,v)$, $t \geq 0$ *не имеет ни одного положительного решения* $v(t)$ *с конечным временем определения.*

Тогда каждое решение $x(t)$ *системы* (1) *неограниченно продолжаемо.*

2. Постановка задачи и вспомогательные построения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t,x), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (t_0 \geq 0), \tag{5}$$

где x, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x) : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, A, B — квадратные вещественные матрицы, вообще говоря, необратимые. Если $\det A = 0$, то уравнение (4) называется *вырожденным*.

Определение 1. Функция $x(t)$ называется *решением задачи* (4), (5) на некотором интервале $(t_0-\delta, t_0+\delta)$, если $x(t) \in C((t_0-\delta,t_0+\delta),\mathbb{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1((t_0-\delta,t_0+\delta,\mathbb{R}^n)$, $x(t_0) = x^0$, $x(t)$ удовлетворяет (4) на $(t_0-\delta,t_0+\delta)$.

Влияние левой (линейной) части уравнения (4) естественно учитывать с помощью свойств характеристического пучка матриц $\lambda A + B$. Здесь рассматривается регулярный пучок, когда $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$.

Поскольку точки спектра пучка могут быть комплексными, то резольвенту $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ следует рассматривать в комплексной плоскости. Стандартной комплексификацией пространства $\mathbb{R}^n$ является пространство $\mathbb{C}^n$ с элементами $(x,y) = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}^n$ (см. [9]). Ассоциируя исходные матрицы A, B с линейными операторами A, B в $\mathbb{R}^n$, можно ввести комплексные расширения [9, с. 482–486] — операторы $\tilde A$, $\tilde B$ в $\mathbb{C}^n$. Соответствующий комплексный матричный пучок $\lambda\tilde A + \tilde B$ является регулярным (вместе с исходным вещественным пучком), поэтому его спектр ограничен, т. е. существует константа $C_2 > 0$ такая, что все собственные числа λ пучка $\lambda\tilde A + \tilde B$ находятся внутри круга $|\lambda| < C_2$ в комплексной плоскости.

Наше основное ограничение на матрицы A, B для (4) состоит в том, что резольвента $\tilde R(\lambda) = (\lambda\tilde A + \tilde B)^{-1}$ ограничена для больших λ:

$$\exists C_1 > 0 \; \exists C_2 > 0 : \left\|(\lambda\tilde A + \tilde B)^{-1}\right\| \leq C_1, \; |\lambda| \geq C_2. \tag{6}$$

В теории линейных дифференциально-алгебраических уравнений принято говорить, что пучок $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$, а также исходный пучок $\lambda A+B$ со свойством резольвенты (6), является пучком индекса 1.

В дальнейшем мы будем использовать введенные в статье [10] спектральные проекторы пучка $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$:

$$P_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2}\tilde{R}(\lambda)d\lambda\tilde{A},\quad P_2=E-P_1, \tag{7}$$

$$Q_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2}\tilde{A}\tilde{R}(\lambda)d\lambda,\quad Q_2=E-Q_1, \tag{8}$$

где E — единичная матрица, причем эти проекторы являются вещественными операторами (см. [5, с. 50–51, 181]). Мы сохраняем обозначения P_1, P_2, Q_1, Q_2 для соответствующих индуцированных операторов в $\mathbb{R}^n$ и их матричных представлений в координатном базисе $\bar{e}=\{e_i\}_{i=1}^n$ (у вектора e_i i-ая компонента равна 1, а все остальные — нулевые) пространства $\mathbb{R}^n$.

Две пары взаимно дополнительных проекторов P_1, P_2 и Q_1, Q_2 расщепляют пространство $\mathbb{R}^n$ в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^n=X_1\dot{+}X_2,\quad X_j=P_j\mathbb{R}^n,\quad j=1,2, \tag{9}$$

$$\mathbb{R}^n=Y_1\dot{+}Y_2,\quad Y_j=Q_j\mathbb{R}^n,\quad j=1,2. \tag{10}$$

Относительно разложения (9) любой вектор $x\in\mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы $x=x^1+x^2$, где $x^1=P_1x\in X_1$, $x^2=P_2x\in X_2$.

Суженные операторы $A_j=A|_{X_j}$, $B_j=B|_{X_j}$, $j=1,2$ отображают X_j в Y_j, причем $A_2=0$, существуют обратные операторы $A_1^{-1}:Y_1\to X_1$, $B_2^{-1}:Y_2\to X_2$ и выполнены равенства (см. [5]):

$$AP_j=Q_jA,\quad BP_j=Q_jB,\quad j=1,2. \tag{11}$$

В [11, 5] введен обратимый оператор в $\mathbb{R}^n$

$$G=AP_1+BP_2=Q_1A+Q_2B,\quad GX_j=Y_j,\quad j=1,2,$$

обладающий свойствами

$$G^{-1}AP_1=P_1,\quad G^{-1}BP_2=P_2,\quad AG^{-1}Q_1=Q_1,\quad BG^{-1}Q_2=Q_2. \tag{12}$$

Так как $\mathbb{R}^n=X_1\dot{+}X_2$, то объединение базисов подпространств X_1 и X_2 является базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\dim X_1=m$, тогда $\dim X_2=d$, где $d=n-m$. В силу (9) $rangP_j=\dim X_j$, $j=1,2$. В $(n\times 2n)$-матрице $P_{1,2}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2\end{pmatrix}$ можно выбрать n линейно независимых столбцов $\{p_i\}_{i=1}^n$, где $\{p_1,...,p_m\}$ — столбцы матрицы P_1, а $\{p_{m+1},...,p_n\}$ — столбцы матрицы P_2. Две системы векторов $\bar{e}=\{e_i\}_{i=1}^n$, $\bar{p}=\{p_i\}_{i=1}^n$ образуют, соответственно, два базиса в $\mathbb{R}^n$: «старый» координатный базис $\bar{e}$ и «новый» базис $\bar{p}$, расщепляющий пространство $\mathbb{R}^n$ в том смысле, что набор векторов $\{p_1,...,p_m\}$ образует базис подпространства X_1, а набор векторов $\{p_{m+1},...,p_n\}$ — базис подпространства X_2, где X_1, X_2 из разложения (9).

Обозначим через x^e, x^p векторы-столбцы из координат вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в базисах $\bar{e}$, $\bar{p}$ соответственно и заметим, что $x^e = x$. Обратимая $(n \times n)$-матрица

$$P = (p_1 \cdots p_n)$$

задает в базисе $\bar{e}$ оператор $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ перехода от базиса $\bar{e}$ к базису $\bar{p}$: $Pe_i = p_i$, $i = \overline{1,n}$. Координаты вектора x в базисах $\bar{e}$, $\bar{p}$ преобразуются с помощью матриц P, P^{-1} [12, гл. III]: $x = x^e = Px^p$, $\; x^p = P^{-1}x$.

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ из разложения по базису $\bar{p}$, имеющего вид $x = \sum\limits_{i=1}^{m} z_i\, p_i + \sum\limits_{k=1}^{n-m} v_k\, p_{m+k}$, вытекает представление: $x^p = \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$, где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$, $d = n - m$, $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}P_1x$, $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}P_2x$. Значит оператор $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ действует так, что $P(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = X_1$, $P(\{0\} \times \mathbb{R}^d) = X_2$.

Относительно разложения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \{0\} \dot{+} \{0\} \times \mathbb{R}^d$ в базисе $\bar{p}$ проекторы P_1, P_2 вида (7) имеют блочную структуру

$$P^{-1}P_1P = \begin{pmatrix} E_{\mathbb{R}^m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m \times \{0\}\,,$$

$$P^{-1}P_2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \{0\} \times \mathbb{R}^d.$$

Определение 2. *Аддитивным разложением единицы* E_y в s-мерном линейном пространстве Y назовем любую систему одномерных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$, $\Theta_k : Y \to Y$ ($\Theta_k^2 = \Theta_k$) таких, что $\Theta_i\,\Theta_j = 0$ при $i \neq j$ и $E_Y = \sum\limits_{k=1}^{s} \Theta_k$.

Система векторов $\{g_k \in Y : g_k = \Theta_k\, g_k,\ g_k \neq 0\}_{k=1}^s$ образует базис в Y.

Определение 3. Оператор-функция $\Phi(x) : D \to [X, Y]$, $D \subset X$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $conv\{x_1, x_2\}$ векторов $x_1, x_2 \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset conv\{x_1, x_2\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в s-мерном пространстве Y оператор $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{s} \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in [X, Y]$ является обратимым так, что $\Lambda^{-1} \in [Y, X]$ ($[X, Y]$ — множество непрерывных линейных операторов из X в Y).

Заметим, что факт базисной обратимости не зависит от выбора базиса или аддитивного разложения единицы в Y.

3. Основная теорема

В расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнения (4) введем многообразие
$$L_0 = \{(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n : BP_2x = Q_2f(t,x)\}.$$

Здесь и далее мы пользуемся спектральными проекторами P_k, Q_k и спектральными подпространствами X_k, Y_k, $k = 1,2$ характеристического пучка $\lambda A + B$ уравнения (4), определенными в п. 2.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t,x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ всюду на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, характеристический пучок $\lambda A+B$ уравнения (4) является регулярным пучком индекса 1. Пусть*
$$\forall t \geq 0\, \forall x^1 \in X_1\, \exists x^2 \in X_2 : (t, x^1 + x^2) \in L_0 \tag{13}$$
и для любых u_1, $u_2 \in X_2$ таких, что $(t, x^1 + u_k) \in L_0$, $k = 1,2$, функция
$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2f(t,x^1+u)) - B\right]P_2 \in C(X_2, [X_2, Y_2]) \tag{14}$$
является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{u_1, u_2\} \subset X_2$.

Предположим, что проекция Q_1f допускает представление:
$$Q_1f(t,x) = S_1(t)P_1x + \psi(t,x) + \Pi(x)e(t), \tag{15}$$
где $S_1(t) \in C([0,\infty), [X_1, Y_1])$, $\psi(t,x) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1)$ и $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $e(t) \in C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$, функция $\Pi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, [\mathbb{R}^n, Y_1])$ ограничена для больших норм P_1x так, что
$$\exists r > 0\, \exists C > 0\, \forall x : \|P_1x\| \geq r \Rightarrow \|\Pi(x)\| \leq C. \tag{16}$$

Пусть существует постоянная $(n \times n)$-матрица $H = H^* > 0$ и для каждого $T > 0$ найдется число $R = R_T > 0$ такое, что
$$(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)) \leq 0, \quad \forall (t,x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \quad \|P_1x\| \geq R_T. \tag{17}$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x^0) \in L_0$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (4), (5) на всей временной полуоси $t_0 \leq t < \infty$.

Доказательство. Применяя к уравнению (4) проекционные матрицы Q_1, Q_2 и учитывая (11), получим эквивалентную (4) систему из двух уравнений
$$\frac{d}{dt}(AP_1x) + BP_1x = Q_1f(t,x), \tag{18}$$
$$Q_2f(t,x) - BP_2x = 0. \tag{19}$$

Далее, используя преобразование G^{-1} и учитывая (12), получим систему, эквивалентную системе (18), (19):
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1x) + G^{-1}BP_1x = G^{-1}Q_1f(t,x), \\ \quad G^{-1}Q_2f(t,x) - P_2x = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Введем суженные операторы

$$P_m = P|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to X_1, \quad P_d = P|_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \to X_2,$$

для которых, очевидно, существуют обратные операторы $P_m^{-1} : X_1 \to \mathbb{R}^m$, $P_d^{-1} : X_2 \to \mathbb{R}^d$. Очевидно, $z = P_m^{-1} P_1 x$, $v = P_d^{-1} P_2 x$, $x = P_m z + P_d v$. Уравнения системы (20) умножим на P_m^{-1}, P_d^{-1} соответственно и получим эквивалентную (20) систему

$$\frac{d}{dt} z + P_m^{-1} G^{-1} B P_m z = P_m^{-1} G^{-1} Q_1 \tilde{f}(t, z, v), \tag{21}$$

$$P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = 0, \tag{22}$$

где $\tilde{f}(t, z, v) = f(t, P_m z + P_d v)$.

Рассмотрим отображение

$$F(t, z, v) = P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = \left[P^{-1} G^{-1} Q_2 f(t, x) - P^{-1} P_2 x\right]\Big|_{\mathbb{R}^d}.$$

Оно непрерывно вместе с функцией $f(t, x)$ и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial z} F(t, z, v) = P_m^{-1} G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) P_m,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v) = P_d^{-1} \left[G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - P_2\right] P_d = P_d^{-1} G^{-1} \Phi(P_d v) P_d,$$

где последнее равенство эквивалентно (14) при $u = P_d v$, а $P_d^{-1} P_2 P_d = E_{\mathbb{R}^d}$.

Согласно базисной обратимости функции $\Phi(u)$ (14) для любых $u_i \in X_2$ таких, что $(t, x^1 + u_i) \in L_0$ $(i = 1, 2)$, существует аддитивное разложение единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$ в Y_2 такое, что оператор $\Lambda_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} \Theta_k \Phi(\tilde{u}_k) \in [X_2, Y_2]$ является обратимым для любого набора векторов $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^d \subset conv\{u_1, u_2\}$. С помощью обратимого оператора $N = P_d^{-1} G^{-1} : Y_2 \to \mathbb{R}^d$ введем в $\mathbb{R}^d$ систему одномерных проекторов $\hat{\Theta}_k = N \Theta_k N^{-1}$, которые образуют аддитивное разложение единицы $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Выберем любые $v_i \in \mathbb{R}^d$ такие, что

$$(t, z, v_i) \in \tilde{L}_0 = \left\{(t, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d : P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, z, v) - v = 0\right\},$$

$i = 1, 2$, и любые $\tilde{v}_k \in conv\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1, d}$, положим $u_i = P_d v_i$, $\tilde{u}_k = P_d \tilde{v}_k$. При связи $P_1 x = P_m z$, $P_2 x = P_d v$ получается, что $(t, z, v) \in \tilde{L}_0 \Leftrightarrow (t, P_1 x + P_2 x) \in L_0$, следовательно, для введенных векторов u_i, $\tilde{u}_k$ оператор Λ_1 обратим, поэтому обратим и действующий в $\mathbb{R}^d$ оператор

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^{d} \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, \tilde{v}_k) = \sum_{k=1}^{d} \hat{\Theta}_k P_d^{-1} G^{-1} \Phi(P_d \tilde{v}_k) P_d = N \Lambda_1 P_d.$$

Таким образом, для $(t, z, v) \in \tilde{L}_0$ функция $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v} F(t, z, v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v_1, v_2\}$.

Из условия (13) и эквивалентности уравнений (19) и (22), следует, что для любых точек t, z можно выбрать v так, что $F(t, z, v) = 0$. Из базисной обратимости $\Psi(v)$ следует существование обратного оператора $\left[\frac{\partial}{\partial v}F(t,z,v)\right]^{-1}$.

Пусть (t_*, z_*) — произвольная точка из $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. В силу теорем [13, с. 294, 298] о неявной функции, существуют окрестности $U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v=v(t,z)\in C(U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*), U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по z, такая, что $F(t,z,v(t,z))=0$, $(t,z)\in\in U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*)$ и $v(t_*,z_*)=v_*$. Определим глобальную функцию $v=\eta(t,z):[0,\infty)\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^d$ в точке (t_*,z_*) как $\eta(t_*,z_*)=v(t_*,z_*)$. Докажем, что

$$\forall (t,z)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^m\,\exists! v\in\mathbb{R}^d:(t,z,v)\in\tilde{L}_0. \tag{23}$$

Существование v уже доказано, необходимо доказать единственность.

Рассмотрим точки $(t,z,v_i)\in\tilde{L}_0$, $i=1,2$, т. е. $F(t,z,v_i)=0$. Для функции $F(t,z,v)$ ее проекции $F_k(t,z,v)=\hat{\Theta}_kF(t,z,v)$, $k=\overline{1,d}$, являются функциями со значениями в одномерном пространстве $R_k=\hat{\Theta}_k\mathbb{R}^d$, изоморфном $\mathbb{R}$. По теореме о среднем (формула конечных приращений [13, с. 248]): $F_k(t,z,v_2)-F_k(t,z,v_1)=\frac{\partial}{\partial v}F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2-v_1)=0$, $\tilde{v}_k\in conv\{v_1,v_2\}$, $k=\overline{1,d}$, следовательно

$$\hat{\Theta}_k\frac{\partial}{\partial v}F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2-v_1)=0,\quad k=\overline{1,d}. \tag{24}$$

Суммирование выражений (24) по k дает $\Lambda_2(v_2-v_1)=0$, следовательно, $v_2=v_1$.

Так как в некоторой окрестности каждой точки (t_*,z_*) из $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$ существует единственное решение $v=\nu(t,z)$ неявного уравнения (22), непрерывное по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируемое по z, то функция $v=\eta(t,z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t,z)$ и обладает соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v=\eta(t,z)$ единственная на всем $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. Действительно, если бы существовала функция $v=\mu(t,z)$, обладающая в некоторой точке (t_*,z_*) из $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$ теми же свойствами, что и $v=\eta(t,z)$, то, в силу (23), $\eta(t_*,z_*)=\mu(t_*,z_*)=v_*$, следовательно, $\eta(t,z)=\mu(t,z)$ на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$.

Подставим $v=\eta(t,z)$ в (21):

$$\frac{d}{dt}z+P_m^{-1}G^{-1}BP_mz=P_m^{-1}G^{-1}Q_1\tilde{f}(t,z,\eta(t,z)). \tag{25}$$

Очевидно, что функция $Q_1f(t,x)$ вида (15) и ее частная производная $\frac{\partial}{\partial x}(Q_1f(t,x))$ непрерывны на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. В силу свойств функций $\eta(t,z)$ и $Q_1f(t,x)$, функция $Q_1\tilde{f}(t,z,\eta(t,z))=Q_1f(t,P_mz+P_d\eta(t,z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по z на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$. Следовательно, для любой начальной точки $(t_0,z_0)\in\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^m$ такой, что $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (25) на некотором интервале $t_0\le t<\varepsilon$ с начальным условием $z(t_0)=z_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0,x^0)\in L_0$ и $x^0=P_mz_0+P_d\eta(t_0,z_0)$, то начальная точка $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$.

Обозначим $\hat{\Pi}(t,z) = \Pi(P_m z + P_d \eta(t,z))$. Поскольку $P_d\eta(t,z) \in X_2$, то в силу (16) выполнено

$$\exists \hat{r} > 0\, \exists C > 0\, \forall t \geq 0\, \forall z : \|z\| \geq \hat{r} \Rightarrow \left\| \hat{\Pi}(t,z) \right\| \leq C. \tag{26}$$

Далее обозначим $\hat{\psi}(t,z) = \psi(t, P_m z + P_d\eta(t,z))$. С учетом всех новых обозначений уравнение (25) принимает вид

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}\left[(S_1(t) - B)P_m z + \hat{\psi}(t,z) + \hat{\Pi}(t,z)e(t)\right]. \tag{27}$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0,\infty)$ введем срезку функции $\hat{\psi}(t,z)$ по переменной t: $\hat{\psi}_T(t,z) = \begin{cases} \hat{\psi}(t,z), & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{\psi}(T,z), & t > T. \end{cases}$

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}\left[(S_1(t) - B)P_m z + \hat{\psi}_T(t,z) + \hat{\Pi}(t,z)e(t)\right], \quad t \geq 0, \tag{28}$$

и функцию $V(x^1) = \frac{1}{2}(Hx^1, x^1) = \frac{1}{2}(HP_m z, P_m z) = \frac{1}{2}(P_m^* H P_m z, z) = \frac{1}{2}\left(\hat{H}z, z\right) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_m^* H P_m$ и H — матрица из (17). Очевидно, $V(x^1)$ положительно определена и $V(x^1) \to +\infty$ при $\|x^1\| \to \infty$, аналогичными свойствами обладает функция $\hat{V}(z)$. Градиент функции $\hat{V}$ равен $grad\, \hat{V}(z) = \hat{H}z$.

Согласно (17) для каждого $T > 0$ найдется число $R = R_T > 0$ такое, что

$$\left(HP_m z, G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|P_m z\| \geq R_T. \tag{29}$$

Поскольку $\left(HP_m z, G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right) = \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right)$, то из (29) следует, что для каждого $T > 0$ найдется число $\hat{R} = \hat{R}_T > 0$ такое, что

$$\left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\hat{\psi}(t,z)\right) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|z\| \geq \hat{R}_T. \tag{30}$$

Коль скоро $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$ вместе с H, то существуют $\hat{H}^{-1}$ и $\hat{H}^{1/2}$, причем $\|z\|^2 = \left(\hat{H}^{-1}\left(\hat{H}^{1/2}\right)^2 z, z\right) = \left(\hat{H}^{1/2}\hat{H}^{-1}\hat{H}^{1/2}z, z\right) \leq \left\|\hat{H}^{-1}\right\| \left\|\hat{H}^{1/2}z\right\|^2 = \left\|\hat{H}^{-1}\right\| \left(\hat{H}z, z\right)$. Тогда $\left|\left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[S_1(t) - B]P_m z\right)\right| \leq$

$$\leq \left\|\hat{H}\right\| \left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \left\|[S_1(t) - B]P_m\right\| \left\|\hat{H}^{-1}\right\| \left(\hat{H}z, z\right).$$

Выбирая $\hat{R} \geq \max\left\{\sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r}\right\}$, с учетом (26) имеем оценку:

$$\left|\left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\hat{\Pi}(t,z)e(t)\right)\right| \leq C\left\|\hat{H}\right\|^{1/2} \left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \|e(t)\| \left(\hat{H}z, z\right), \quad \|z\| \geq \hat{R}.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус $\hat{R} = \hat{R}_T$ в условии (30) так, чтобы выполнялось неравенство $\hat{R} \geq \max\left\{\sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}, \hat{r}\right\}$, получаем оценку для производной функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (28), которая выполнена при всех z таких, что $\|z\| \geq \hat{R}$ и всех $t \geq 0$:

$$\dot{\hat{V}}\Big|_{(28)} = \left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\left[(S_1(t) - B)P_m z + \hat{\psi}_T(t,z) + \hat{\Pi}(t,z)e(t)\right]\right) \leq$$

$$\leq \left|\left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[S_1(t) - B]P_m z\right)\right| + \left|\left(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}\hat{\Pi}(t,z)e(t)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \left(\left\|\hat{H}\right\| \|[S_1(t) - B]P_m\| \left\|\hat{H}^{-1}\right\| + C\left\|\hat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right)\left(\hat{H}z, z\right) =$$

$$= k(t)\hat{V}(z),$$

где $k(t) = 2\left\|P_m^{-1}G^{-1}\right\| \left(\left\|\hat{H}\right\| \|[S_1(t) - B]P_m\| \left\|\hat{H}^{-1}\right\| + C\left\|\hat{H}\right\|^{1/2} \|e(t)\|\right)$ — непрерывная функция при $t \geq 0$.

Так как неравенство $\dot{v} \leq K(t,v)$, $t \geq 0$, где $K(t,\hat{V}) = k(t)\hat{V}$, не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения [7, с. 133] , то по лемме 1 каждое решение $z(t)$ уравнения (27) неограниченно продолжаемо. Значит, каждое решение $x(t) = P\begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t,z(t)) \end{pmatrix}$ уравнения (4) также неограниченно продолжаемо.

Проверим, что каждое локальное решение $x(t)$, $t \in [t_0, \varepsilon)$ $(t_0 \geq 0)$ уравнения (4) допускает единственное продолжение на всю временную полуось $t_0 \leq t < \infty$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи Коши (4), (5) единственно на некотором интервале $t_0 \leq t < \varepsilon$. Предположим, что решение не единственно на $t_0 \leq t < \infty$. Тогда существует $t_* \geq \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $t_* \leq t < \varepsilon_1$ должно существовать единственное решение уравнения (4) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению. □

4. Заключение: перспективы и приложения

Во многих практических задачах, в которых возникают дифференциально-алгебраические уравнения вида (4), проверка условий теоремы 1 оказывается вполне эффективной и эти условия выполняются в случае нелинейных функций $f(t,x)$, не являющихся глобально липшицевыми. В следующей статье мы покажем, как теорема 1 позволяет гарантировать существование глобальных решений уравнений динамики некоторых классов нелинейных радиотехнических систем.

Представляет интерес также изучение глобальных решений нелинейных систем с внешними импульсными возмущениями и эффектами запаздывания, для которых естественно использовать результаты работы [14].

Литература

1. Campbell S. L. Singular Systems of Differential Equations. / S. L. Campbell. — San Francisco, CA: Pitman, 1980. — 177 p.
2. Rutkas A. G. Existence of Solutions of Degenerate Nonlinear Differential Operador Equations. / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // Nonlinear Oscillations. — 2001. — Vol. 4, № 2. — P. 252–263.
3. Rutkas A. G. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // Nonlinear Analysis. TMA. — 2003. — Vol. 55, № 1-2. — P. 125–139.
4. Власенко Л. А. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика. — 2011. — № 1-3 (67-69). — С. 4–9.
5. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. / Л. А. Власенко. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 273 с.
6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л. С. Понтрягин — М.: Наука, 1974. — 331 с.
7. Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
8. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике. / М. С. Филипковская // Вiсник ХНУ iм. В. Н. Каразiна. Сер. "Математичне моделювання. Iнформацiйнi технологiї. Автоматизованi системи управлiння". — 2012. — № 1015, Вип. 19. — С. 306–319.
9. Канторович Л. В. Функциональный анализ. / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
10. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения Ax'(t)+Bx(t)=f(t). / А. Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.
11. Vlasenko L. Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications. / L. Vlasenko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2000. — 23. — P. 937–948.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
13. Шварц Л. Анализ. Т. 1. /Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 822 с.
14. Власенко Л. А. Об одной стохастической системе с импульсными воздействиями. / Л. А. Власенко, С. И. Ляшко, А. Г. Руткас // Доповiдi Нацiональної академiї наук України. — 2012. — № 2. — С. 50–55.

Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина.

Поступила 01.08.2012