Журнал обчислювальної та прикладної математики **2013, №1(111)** Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

С. М. Шахно

Резюме. Запропоновано нові різницеві і параметричні ітераційні методи для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів. Обгрунтовано локальну збіжність методів і знайдено область єдиності розв'язку. Побудовано модифікації методу Гаусса-Ньютона з послідовною та паралельною апроксимаціями оберненого оператора та вивчено їхню збіжність.

Вступ

Нелінійні задачі найменших квадратів часто потрібно розв'язувати в наукових та інженерних задачах. Зокрема, вони виникають при розв'язуванні перевизначених систем рівнянь, при оцінюванні параметрів фізичних процесів за результатами вимірювань, при побудові нелінійних регресійних моделей, при оцінюванні параметрів і перевірці гіпотез в математичній статистиці, в керуванні різними об'єктами, процесами тощо.

Для їх розв'язування можна використовувати добре відомі методи Гаусса-Ньютона та Левенберга-Марквардта, які мають квадратичну збіжність у спеціальному випадку нульового відхилу [1, 2, 3, 4, 5]. Ці методи використовують похідні від функцій. Однак на практиці значення функцій часто отримують з експериментів або як результат обчислення на комп'ютері, тоді аналітичних похідних не існуватиме. Якщо похідна функції задається складною формулою, її обчислення може бути обтяжливим. Тому актуальними є розробка і використання методів, що використовують у своїх ітераційних формулах тільки значення функцій, і разом з тим володіють високою швидкістю збіжності. Найпростішим методом такого типу є метод [6], який збігається з надлінійною швидкістю збіжності — з порядком 1,618... у випадку нульового відхилу. Проте в даному випадку виникає проблема вибору кроку скінченних різниць. У цій статті запропоновано і досліджено за єдиною методикою, розробленою нами, методи з порядками збіжності 1,618. . . , 1,839..., 2 та $1 + \sqrt{2}$, які використовують апроксимацію якобіана поділеними різницями. Також розроблено параметричні модифікації методів Гаусса-Ньютона та Левенберга-Маркварта і методи з апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати.

Головні результати цієї праці детально викладені в статтях [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

У статтях [11, 18] для розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати пропонуються нові ітераційні методи без похідних зі швидкістю збіжності 1,618, 1,839... та 2. Розроблена схема доведення, за якою з єдиної точки зору проведено дослідження класу ітераційно-різницевих методів з різними порядками збіжності. За результатами проведеного чисельного експерименту новий метод порівнюється з відомими різницевими методами та класичним методом Гаусса-Ньютона.

У статтях [17, 19] проведено дослідження однокрокової модифікації методу Гаусса-Ньютона з використанням апроксимації похідної поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Встановлено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі. Проведено аналогічні дослідження за узагальнених умов Гьольдера.

У статті [15] досліджено ітераційно-різницевий метод з надквадратичною збіжністю розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати, який не потребує обчислення матриці похідних. Доведено теорему, яка обгрунтовує збіжність, та визначено швидкість збіжності розглянутого методу. Наведено результати числового експерименту. У статті [14] вивчено локальну збіжність цього методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Знайдено область єдиності розв'язку задачі.

У статтях [7, 20] запропоновано та досліджено збіжність однопараметричної модифікації методу Гаусса-Ньютона та Левенберга-Маркварта і наведено результати чисельних розрахунків.

У статті [8] застосовано метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ до нелінійних задач найменших квадратів та проведено чисельний експеримент, у [12] запропоновано та вивчено швидкість збіжності методів з послідовною і паралельною апроксимаціями оберненого оператора,

Стаття [21] присвячена практичній реалізації методів розв'язування нелінійних задач найменших квадратів, у [22, 23] побудовано алгоритм для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів з обмеженнями типу рівностей і нерівностей.

Опишемо коротко структуру статті. У першому пункті наведені означення поділених різниць та умов Ліпшиця для поділених різниць, сформульовано різницеві методи розв'язування нелінійних задач найменших квадратів. Другий пункт присвячений обгрунтуванню локальної збіжності різницевих методів. У третьому пункті вивчено збіжність методу типу хорд за узагальнених умов Ліпшиця та Гьольдера для поділених різниць першого порядку. У четвертому пункті вивчено збіжність різницевого методу з надквадратичною збіжністю за звичайних та узагальнених умов Ліпшиця, встановлено область єдиності розв'язку задачі. Всі теореми сформульовані в термінах поділених різниць. У п'ятому пункті розглянуто параметричні методи розв'язування нелінійних задач найменших квадратів, які використовують похідні. Шостий пункт присвячений методам з апроксимацією оберненого оператора. У сьомому пункті зроблено короткі висновки.

1. Постановка задачі. Поділені різниці та різницеві ітераційні процеси

Розглянемо нелінійну задачу про найменші квадрати:

Знайти

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \tag{1}$$

де $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (m \geq n)$ — нелінійна по x функція.

У цій статті ми з єдиної точки зору дослідимо ітераційні методи вигляду

$$x_{n+1} = x_n - [A_n^T A_n]^{-1} A_n^T F(x_n), \;\; n = 0, 1, \dots , \tag{2}$$

де A_n — лінійний оператор, який є поділеною різницею або лінійною комбінацією поділених різниць першого порядку від функції $F(x)$.

Зазначимо, що при $A_n = F'(x_n)$ отримуємо добре відомий метод Гаусса-Ньютона [1]. Локальна збіжність цього методу досліджена в [1, 24], а напівлокальна збіжність вивчена у статтях [2, 5].

Для опису ітераційно-різницевих методів попередньо введемо деякі означення.

Нехай X, Y — два банахові простори, D — підмножина простору X, а x, y та z — три точки з D. Лінійний оператор з X в Y, позначуваний $F(x, y)$, називається *поділеною різницею першого порядку* від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову [25, 26]

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{3}$$

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \tag{4}$$

Позначимо $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ — кулю радіуса r з центром в точці x_0.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v\| \leq L(\|x - y\| + \|u - v\|), \quad \forall x, y, u, v \in D \tag{5}$$

називаємо умовою Ліпшиця зі сталою L.

Якщо виконується умова

$$\left\|F(x, y) - F'(x_0)\right\| \leq L(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|), \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \tag{6}$$

то її називаємо центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L.

Вважатимемо, що для $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ виконуються умови типу Ліпшиця в такій формі:

$$\|F(x, y) - F(x, z)\| \leq p \, \|y - z\| \,, \quad x, y, z \in D, \tag{7}$$

$$\|F(y, x) - F(z, x)\| \leq \bar{p} \, \|y - z\| \,, \quad x, y, z \in D, \tag{8}$$

$$\|F(x, y, z) - F(u, y, z)\| \leq q \, \|x - u\| \,, \quad u, x, y, z \in D. \tag{9}$$

Якщо поділена різниця $F(x, y)$ від F задовольняє (7) або (8), тоді F диференційовний за Фреше на D і $F'(x) = F(x, x)$. Більше того, якщо (7) і (8) виконуються, тоді похідна Фреше неперервна за Ліпшицем на D зі сталою Ліпшиця $k = p + \bar{p}$ [27].

У праці [28] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію.

У статті [29] ми вводимо аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цих умов обгрунтовуємо збіжність методу хорд. У цьому випадку (5) і (6) будуть замінені відповідно на

$$\|F(x,y)-F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du, \quad \forall x,y,u,v \in D \tag{10}$$

та

$$\|F(x,y)-F'(x_0)\| \le \int_0^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u)du, \quad \forall x,y \in B(x_0,r). \tag{11}$$

Умови (10) і (11) називатимемо узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

2. Локальна збіжність різницевих методів для нелінійних задач найменших квадратів

Розглянемо ітераційні процеси вигляду (2). Вивчимо випадки: (a) $A_n = F(x_n, x_{n-1})$, (b) $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$, ($c$) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, де $F(u,v)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$, причому $F(u,u) = F^{'}(u)$. Представимо результати теоретичних досліджень умов і порядку збіжності ітераційного процесу (2) для різних варіантів A_n. Зокрема, для $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ встановлено локальну збіжність процесу (2) зі швидкістю $(1+\sqrt{5})/2 = 1.618...$, для $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$ — з порядком $1.839\ldots$ і для $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ — з квадратичним порядком у випадку нелінійної задачі найменших квадратів з нульовим відхилом.

Випадок (а) $A_n = F(x_n, x_{n-1})$.

Теорема 1. *1) Нехай функція* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *неперервно диференційовна в області* $D \subseteq \mathbb{R}^n$. *Припустимо, що задача (1) має розв'язок* x^* *в області* D *і існує обернена операція* $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ *та* $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \le B$;

2) в області $\Omega = \Omega(x^*, r_*) = \{x : \ \|x - x^*\| \le r_*\} \subset D$, *де*

$$r_* = \frac{-5BM\alpha + \sqrt{(5BM\alpha)^2 + 24BM^2 - 48B^2M^3\eta}}{12BM^2},$$

функція F *має поділені різниці першого порядку, і*

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le M(\|x-u\| + \|y-v\|);$$

3) $\|F(x^*)\| \le \eta$, $\|F'(x^*)\| \le \alpha$;

4) $BMr_*(\alpha + 2Mr_*) + 2MB\eta < 1$.

Тоді для $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ *ітераційний процес (2) коректно визначений і генерує послідовність* $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, *яка належить відкритій області*

Ω; вона збігається до розв'язку x^* зі швидкістю, яка характеризується нерівністю

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1\|x_{n-1} - x^*\| + C_2\|x_n - x^*\| \, \|x_{n-1} - x^*\|, \qquad (12)$$

де $C_1, \; C_2$ — невід'ємні обмежені сталі.

Зауважимо, що нерівність (12) дає можливість зробити висновок про збіжність ітераційного процесу з вибором $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ зі швидкістю $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$ (у випадку *нульового відхилу, коли* $F(x^*) = 0$, тоді $\eta = 0$ і стала $C_1 = 0$). У випадку малого відхилу (η є мале) збіжність буде лише лінійна, і у випадку великого відхилу ітераційний процес (2) з $A_n = F(x_n, x_{n-1})$ може взагалі розбігатися.

Випадок (b) $A_n = F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})$.

Теорема 2. *Нехай функція $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — двічі неперервно диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що: 1) задача (1) має розв'язок x^* в області D; 2) обернена операція $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ існує та $\|(A_*^T A_*)^{-1}\| \leq B$; 3) в області $\Omega = \Omega(x^*, r_*) = \{x : \; \|x - x^*\| < r_*\} \subset D$ функція F має поділені різниці першого і другого порядків, і*

$$\begin{aligned}
&\|F(x,y) - F(u,v)\| \leq M(\|x-u\| + \|y-v\|);\\
&\|F(u,x,y) - F(v,x,y)\| \leq N\|u-v\|;\\
&\|F(x^*)\| \leq \eta, \quad \|F'(x^*)\| \leq \alpha.
\end{aligned}$$

Тоді для $x_{-2}, \, x_{-1}, \, x_0 \in \Omega$, достатньо близьких до розв'язку x^* задачі (1), ітераційний процес (2) збігається до розв'язку зі швидкістю, яка характеризується нерівністю

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1\|x_n - x^*\| + C_2\|x_n - x^*\|\|x_{n-1} - x^*\| \, \|x_{n-2} - x^*\|, \qquad (13)$$

де $C_1, \; C_2$ — деякі обмежені невід'ємні сталі.

Наслідок 1. *Порядок збіжності ітераційної процедури (2)-(b) у випадку нульового відхилу дорівнює* 1.839....

Випадок (c) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1)–3) теореми 2 в області $\Omega(x^*, 3r_*) = \{x : \; \|x - x^*\| < 3r_*\} \subset D$, де r_* єдиний додатний нуль функції*

$$\begin{aligned}
q(r) = &B(\alpha + 4Nr^2 + 2Mr) + B(4Nr + 2M)\eta +\\
&+B(2\alpha + 2Mr + 4Nr^2)(2Mr + 4Nr^2) - 1.
\end{aligned}$$

Тоді для $x_{-1}, \, x_0 \in \Omega(x^*, r_*)$ ітераційна послідовність $\{x_n\}$, визначена за (2), належить $\Omega(x^*, r_*)$ для всіх $n \geq 0$ і збігається до розв'язку x^* та справджується оцінка похибки для всіх $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_1\|x_n - x^*\| + C_2\|x_n - x_{n-1}\|^2 +\\
&+C_3\|x_n - x^*\|^2 + C_4\|x_n - x^*\|\|x_n - x_{n-1}\|^2,
\end{aligned} \qquad (14)$$

де $C_1, \; C_2, \; C_3, \; C_4$ — деякі обмежені невід'ємні сталі.

Наслідок 2. *Збіжність досліджуваного ітераційного процесу квадратична у випадку нульового відхилу ($\eta = 0$).*

Зауважимо, що результати цього пункту отримали розвиток в статтях інших авторів [30, 31].

3. Про один метод типу хорд для нелінійних задач найменших квадратів

Розглянемо нелінійну задачу найменших квадратів (1). Для знаходження розв'язку цієї задачі пропонуємо ітераційний метод типу хорд

$$x_{n+1} = x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n), \quad n = 0, 1, ..., \tag{15}$$

де $A_n = F(x_n, x_n + \alpha_n(x_{n-1} - x_n))$, $F(x, y)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ за точками x та y, $\alpha_n \in [0, 1]$, x_{-1}, x_0 — задані.

Зауважимо, що при $\alpha_n = 1$ з (15) ми отримаємо метод хорд [18], а при $\alpha_n = 0$ — класичний метод Гаусса-Ньютона [1].

У цьому пункті досліджено збіжність методу типу хорд (15) при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку для нелінійних задач найменших квадратів. Відзначимо, що умова Ліпшиця зі сталою Ліпшиця є частковим випадком узагальненої умови Ліпшиця. Отримано радіус збіжності методу. Проведено аналогічні дослідження при узагальненій умові Гьольдера.

Теорема 4. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

1) задача (1) має розв'язок x^* в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ та існує похідна за Фреше $F^{'}(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;

2) в області $\Omega(x^*, r)$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє умову Ліпшиця з усередненим L:

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du, \tag{16}$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна;

3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^r L(u)du}{1 - \beta \int_0^{2r} L(u)du} + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r} L(u)du}{r(1 - \beta \int_0^{2r} L(u)du)} \le 1. \tag{17}$$

Тоді метод (15) збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ таких, що $\rho(x_{-1}) \le \rho(x_0)$ і

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \frac{q_1}{\rho(x_0)} \|x_{n-1} - x^*\| \|x_n - x^*\| + q_0 \|x_{n-1} - x^*\|, \tag{18}$$

де

$$\rho(x) = \|x - x^*\|; \quad \alpha = \|F(x^*)\|; \quad \beta = \|[F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1} F'(x^*)^T\| \tag{19}$$

і величини

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du}{\rho(x_{-1})(1-\beta\int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du)};$$
$$q_1 = \frac{\beta\int_0^{(1-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du}{1-\beta\int_0^{(2-\alpha_0)\rho(x_0)+\alpha_0\rho(x_{-1})} L(u)du} \tag{20}$$

менші за одиницю.

Наслідок 3. *Порядок збіжності ітераційного процесу* (15) *у випадку нульового відхилу дорівнює* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Область єдиності розв'язку задачі (1) встановлює

Теорема 5. *Нехай x^* задовольняє (1), $F(x)$ неперервна в $\Omega(x^*, r)$. Крім того, $F'(x^*) = F(x^*, x^*) = A_*$ має повний стовпцевий ранг, $F(x)$ має поділену різницю першого порядку, яка задовольняє узагальнену умову Ліпшиця*

$$\|F(x,y) - F(x^*, x^*)\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(u)du, \tag{21}$$

де $x, y \in \Omega(x^*, r)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$ і L — неспадна. Нехай r задовольняє нерівність

$$\beta\int_0^r L(u)du + \frac{\alpha\beta_0}{r}\int_0^{2r} L(u)du \le 1, \tag{22}$$

де α і β визначені в (19),

$$\beta_0 = \|[A_*^T A_*]^{-1}\|. \tag{23}$$

Тоді задача (1) має єдиний розв'язок x^* в $\Omega(x^*, r)$.

Ми досліджували локальну збіжність методу (15) за узагальнених умов Ліпшиця. Також доведено, що послідовність $\{x_n\}$, генерована методом (15), збігається до розв'язку x^* задачі (1) надлінійно. Далі проведемо дослідження збіжності методу (15) з використанням узагальненої умови Гьольдера у випадку, коли $\alpha_n = O(\|x_n - x^*\|)$.

Теорема 6. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

1) задача (1) *має розв'язок x^* в області D та існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;*

2) в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє умову Гьольдера з $0 < p \le 1$

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-u\|^p + \|y-v\|^p} L(u)du, \tag{24}$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна;

3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^{r^p} L(u)du}{1 - \beta \int_0^{2r^p} L(u)du} + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r^p} L(u)du}{1 - \beta \int_0^{2r^p} L(u)du} \le 1. \tag{25}$$

Тоді метод (15) *збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ таких, що $\rho(x_{-1}) \le \rho(x_0)$ і*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| \le q_1 \frac{(1 - \alpha_n + O(1)\rho(x_{n-1}))^p}{\gamma_0^p} \|x_n - x^*\|^{p+1} + \\ + q_0 \frac{1 + (1 - \alpha_n + O(1)\rho(x_{n-1}))^p}{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} \|x_n - x^*\|^p, \end{aligned} \tag{26}$$

де α і β визначені в (19) і величини

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u)du}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u)du}; \quad q_1 = \frac{\beta \int_0^{\gamma_0^p} L(u)du}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)^p + \gamma_0^p} L(u)du} \tag{27}$$

менші за 1.

4. Різницевий метод з надквадратичною збіжністю

Для знаходження розв'язку задачі (1) розглянемо різницеву модифікацію двокрокового методу Гаусса-Ньютона

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{28}$$

де $A_n = F(x_n, y_n)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ в точках x_n, y_n; x_0, y_0 — задані початкові наближення. Цей метод досліджувався в [32]. Однак обгрунтування збіжності, наведене нижче, базується на іншому підході і за слабших умов, зокрема не вимагається існування і обмеженість поділених різниць другого порядку.

Достатні умови і швидкість збіжності ітераційного процесу (28) визначені в такій теоремі.

Теорема 7. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — неперервно диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що задача (1) має розв'язок x^* в деякій області $\Omega = \Omega(x^*, r_0) = \{x : ||x - x^*|| < r_0\} \subset D$, існує обернений оператор $(A_*^T A_*)^{-1} = [F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1}$ і $||(A_*^T A_*)^{-1}|| \le B$. В області Ω функція F має поділену різницю першого порядку і*

$$||F(x, y) - F(u, v)|| \le M(||x - u|| + ||y - v||),$$

$$||F(x^*)|| \le \eta, \quad ||F'(x^*)|| \le \alpha, \quad 3BMr_0(\alpha + 2Mr_0) + 2MB\eta < 1,$$

$$q = \max\{C_1 r_0 + 2C_2; C_1(C_1 r_0^2 + 2C_2 r_0 + 2r_0)(C_1 r_0 + 2C_2) + 2C_2\} < 1,$$

де

$$\begin{aligned} r_0 &= \max\{||x_0 - x^*||, ||y_0 - x^*||\}, \\ C_1 &= BM(\alpha + 2Mr_0)/[1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)], \\ C_2 &= 2BM\eta/[1 - 4BMr_0(\alpha + Mr_0)]. \end{aligned}$$

Тоді для $x_0, y_0 \in \Omega$ ітераційний процес (28) є коректно визначеним і генеровані ним послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}, n = 0, 1, ...,$ містяться у відкритій області Ω і збігаються до розв'язку x^*, причому справедливі оцінки:

$$||x_{n+1} - x^*|| \leq C_1||x_n - x^*||||y_n - x^*|| + C_2(||x_n - x^*|| + ||y_n - x^*||); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} ||y_{n+1} - x^*|| \leq C_1(||x_{n+1} - x_n|| + ||y_n - x^*||)||x_{n+1} - x^*|| + \\ + C_2(||x_n - x^*|| + ||y_n - x^*||); \end{aligned} \quad (30)$$

$$r_{n+1} = \max\{||x_{n+1} - x^*||, ||y_{n+1} - x^*||\} \leq qr_n \leq ... \leq q^{n+1}r_0. \quad (31)$$

Як бачимо з оцінок (29) і (30), збіжність ітераційного процесу суттєво залежить від доданку, який містить величини η і M. Якщо $\eta = 0$, то ми маємо нелінійну задачу найменших квадратів з нульовим відхилом у розв'язку. У разі $M = 0$ функції відхилу лінійні. Для задач з малим відхилом у розв'язку (η — "мале") або слабо нелінійних задач (M — "мале") збіжність ітераційного процесу лінійна. При великих відхилах (η — велике) або для сильно нелінійних задач (M — велике) ітераційний процес (28) може взагалі не збігатися.

Для задач з *нульовим відхилом у розв'язку*, тобто таких, що $F(x^*) = 0$, можна отримати кращі оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу (28).

Розглянемо збіжність двокрокової ітераційно-різницевої модифікації методу Гаусса-Ньютона [8, 15] на базі методу з порядком $1 + \sqrt{2}$ за узагальнених умов Ліпшиця для нелінійних задач найменших квадратів. Отже, дослідимо збіжність методу (28) до розв'язку задачі (1).

Теорема 8. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

1) задача (1) має розв'язок x^* в області D та існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;

2) в області $\Omega(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє узагальнену умову Ліпшиця

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz, \quad (32)$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x^*, r)$ і L — неспадна функція;

3) $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^{3r} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{2r} L(z)dz} + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r} L(z)dz}{r(1 - \beta \int_0^{2r} L(z)dz)} \leq 1. \quad (33)$$

Тоді метод (28) збігається для всіх $x_0, y_0 \in \Omega(x^*, r)$ таких, що $\rho(y_0) \geq \rho(x_0)$ і

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{q_1}{\rho(y_0)}\|x_n - x^*\|\|y_n - x^*\| + q_0\|x_n - x^*\|, \quad (34)$$

$$\|y_{n+1} - x^*\| \leq \frac{q_2}{\rho(x_1)}\|x_{n+1} - x^*\|\|x_n - x^*\| + q_0\|x_n - x^*\|, \quad (35)$$

де

$$\rho(x) = \|x - x^*\|, \quad \alpha = \|F(x^*)\|, \quad \beta = \|[F'(x^*)^T F'(x^*)]^{-1} F'(x^*)^T\| \tag{36}$$

і величини

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(x_0)(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}, \quad q_1 = \frac{\beta \int_0^{\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz},$$

$$q_2 = \frac{\beta \int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz} \tag{37}$$

менші за 1.

Наслідок 4. *Порядок збіжності ітераційного процесу (28) у випадку задачі з нульовим відхилом дорівнює* $1 + \sqrt{2}$.

5. Параметричні методи розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів

У цьому пункті для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів (1) пропонуємо метод

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k), \\ \bar{x}_k &= (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k),\ 0 \le \mu \le 1,\ k = 0, 1, \dots\ , \end{aligned} \tag{38}$$

де $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — деякий допоміжний оператор, для якого

$$x^* = \varphi(x^*). \tag{39}$$

Легко бачити, що при $\mu = 0$ ми отримуємо з (38) відомий метод Гаусса-Ньютона [1]. За допомогою параметра μ можна вибрати метод з найбільшою швидкістю збіжності серед методів класу (38).

Розглянемо деякі варіанти вибору оператора $\varphi(x)$.

1. *Випадок з нульовим відхилом:* $F(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0$.

Умови і швидкість збіжності ітерацій (38) встановлюються у такій теоремі.

Теорема 9. *Нехай* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (m \ge n)$ *і функція* $f(x) = \dfrac{1}{2} F(x)^T F(x)$ *двічі неперервно диференційовна на відкритій опуклій множині* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Припустимо, що*

$$\|F''(x) - F''(y)\| \le N\|x - y\|,$$

$\|\varphi'(x)\| \le \alpha$, $\|\varphi''(x)\| \le L$, $\forall x, y \in D$, *а також що існують* $x^* \in D$ *і* $\alpha \ge 0$, *такі, що* $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$, α — *найменше власне число для* $F'(x^*)^T F'(x^*)$.

Тоді існує r_0 *таке, що для* $x_0 \in \Omega_* = \{x : \|x - x^*\| \le r_0\}$ *послідовність, породжена (38), коректно визначена, збігається до* x^* *і задовольняє нерівності*

$$r_k = \|x_k - x^*\| \le (h_0 r_0)^{(2^k - 1)} r_0, \tag{40}$$

де

$$h_0 = \frac{1+\alpha}{2\lambda}\Big(\frac{N}{3}r_0\,\mu^2(1+\alpha^2)+L(|2\mu-1|+2\mu)\Big) < \frac{1}{r_0},$$
$$r_0 = \|x_0 - x^*\|, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Дослідимо вплив параметра μ на швидкість збіжності ітераційного процесу (38). Швидкість збіжності можна підвищувати двома шляхами: збільшенням порядку збіжності і зменшенням знаменника збіжності $h_0 r_0$. У знаменник $h_0 r_0$ входить величина $\chi(\mu) = |2\mu - 1| + 2\mu\alpha$, найменше значення якої досягається при $\mu = 0,5$ у випадку $\alpha < 1$ і при $\mu = 0$ у протилежному випадку. Тоді ітераційний процес матиме найбільшу швидкість збіжності і найменш жорсткі умови на вибір початкового наближення x_0 (ширша область збіжності). Як бачимо із (40), при достатньо малих значеннях r_0 процес (38) із значенням $\mu = 0,5$ і $\alpha < 1$ має вищу швидкість збіжності, ніж метод Гаусса-Ньютона.

2. *Випадок* $F(x^*) \neq 0$. Умові (39) задовольняє оператор

$$\varphi(x) = x - \beta F'(x)^T F(x), \ \ \beta > 0,$$

який відповідає градієнтному методу мінімізації функціоналу $f(x) = \dfrac{1}{2}F(x)^T F(x)$.

Теорема 10. *Нехай виконуються умови теореми 9 і* $\|F'(x)\| \leq \alpha$,

$$\|(F'(x) - F'(x^*))^T F(x^*)\| \leq \sigma\,\|x - x^*\| \tag{41}$$

для всіх $x_0 \in D$, *причому* $\lambda > \sigma(1+\delta) \geq 0$, $\delta = \mu\beta(\alpha^2 + \sigma)$.

Тоді для довільного $C \in (1, \lambda(1+\delta)\sigma)$ *існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що для всіх* $x_0 \in \Omega(x^*, \varepsilon)$ *послідовність (38) коректно визначена, збігається до* x^* *і задовольняє нерівності*

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{C\sigma(1+\delta)}{\lambda}\|x_k - x^*\| + \\ + \frac{C\alpha}{2\lambda}\left[\frac{N}{3}\|x_k - x^*\|\delta^2 + L\,(1+2\delta)\right]\|x_k - x^*\|^2;\end{aligned} \tag{42}$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{C\sigma(1+\delta)+\lambda}{2\lambda}\|x_k - x^*\| < \|x_k - x^*\|. \tag{43}$$

Наслідок 5. *Нехай виконані умови теореми 10. Якщо* $F(x^*) = 0$, *то існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що для всіх* $x_0 \in \Omega(x^*, \varepsilon)$ *послідовність* $\{x_k\}$, *породжена методом (38), коректно визначена і збігається квадратично до* x^*.

Із (41) бачимо, що параметр σ є абсолютною мірою нелінійності і величини відхилу в розв'язку задачі, а з (42) — що $\dfrac{\sigma(1+\delta)}{\lambda}$ можна розглядати як відносну міру нелінійності і величини відхилу в розв'язку задачі. З теореми 10 випливає, що швидкість збіжності методу (38) зменшується зі зростанням відносної нелінійності чи відносного відхилу в розв'язку задачі. Якщо одна із цих двох величин надто велика, то метод може взагалі розбігатися.

Недолік методу (38) полягає в тому, що він не є коректно визначеним, якщо матриця $[F'(x_k)^T F'(x_k)]^{-1}$ невизначена. Цей недолік усунутий в методі

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'(\overline{x}_k)^T F'(\overline{x}_k) + \gamma_k E\right]^{-1} F'(\overline{x}_k)^T F'(x_k), \qquad (44)$$

$$\overline{x}_k = (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad \gamma_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

частковим випадком якого при $\mu = 0$ є метод Левенберга-Марквардта [1]. Властивості локальної збіжності методу (44) аналогічні властивостям методу (38) і наведені в [7].

Відзначимо, що неточний метод Гаусса-Ньютона за узагальнених умов Ліпшиця вивчався у [4].

6. Застосування методів з послідовною та паралельною апроксимаціями оберненого оператора до нелінійних задач найменших квадратів

На кожній ітерації методу Гаусса-Ньютона, Левенберга-Маркварта [1] та його модифікацій [7, 33] для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів (1) потрібно розв'язувати систему лінійних рівнянь, що не завжди легко здійснити. Тому ми використаємо ідею послідовної та паралельної апроксимацій оберненого оператора [9, 34] для побудови нових методів для розв'язування задачі (1), які не потребують розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо метод з послідовною апроксимацією, побудований на базі методу Гаусса-Ньютона [1]

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \qquad (45)$$

$$A_{k+1} = A_k[2E - J(x_{k+1})^T J(x_{k+1}) A_k], \ k = 0, 1, \ldots \ . \qquad (46)$$

Тут E — тотожний оператор (одинична матриця), $J(x) = F'(x), x_0, \ A_0$ — відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* задачі (1) і до оберненого оператора $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Процес (45)–(46) складається з двох гілок, які виконуються почергово.

Умови збіжності ітераційного процесу (45)–(46) до розв'язку задачі (1) для випадку нульового відхилу $F(x^*) = 0$ дає

Теорема 11. *Нехай виконуються умови:*

1) задача (1) має розв'язок x^*, $F(x^*) = 0$ і існує $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$, причому $\| A^* \| \leq B$;

2) в околі $\Omega_* = \{x : \| x - x^* \| \leq r_0\}$ справедливі оцінки $\| F''(x) \| \leq L$, $\| J(x)^T - J(x^*)^T \| \leq L \| x - x^* \|$;

3) $\max\{\|J(x^*)\|, \|J(x^*)^T\|\} \leq C$;

4) $h_0 = \max\{K_0, C^2 + (B + r_0)^2 L K_0 (2C + L r_0)\} < \dfrac{1}{r_0}$,

де

$$r_0 = \max\{\|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\|\},$$

$$K_0 = C^2 + (B + r_0)[C(2 + \frac{1}{2}L) + L(1 + \frac{1}{2}L) r_0].$$

Тоді послідовності $\{x_k\}$ і $\{A_k\}$ збігаються відповідно до x^* і A^*, причому справедливі оцінки

$$r_k = \max\{\|x_k - x^s\|, \|A_k - A^*\|\} \le (h_0 r_0)^{2^k-1} r_0, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{47}$$

Для розв'язування задачі (1) на паралельних обчислювальних процесорах, які працюють зі спільною пам'яттю, розглянемо такий ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - A_k J(x_k)^T F(x_k), \tag{48}$$

$$A_{k+1} = A_k\big[2E - J(x_k)^T J(x_k) A_k\big], \ k = 0, 1, \dots\ , \tag{49}$$

де також x_0, A_0 — відповідно початкові наближення до точного розв'язку x^* задачі (1) і до оберненого оператора $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Метод (48)–(49), як і метод (45)–(46), складається з двох гілок, однак тут обидві гілки виконуються паралельно. Крім того, обчислення в кожній гілці можна розпаралелити, використовуючи методи лінійної алгебри.

Достатні умови збіжності методу(48)–(49) встановлює

Теорема 12. *Нехай виконуються умови:*

1) задача (1) має розв'язок $x^* \in D$, $F(x^*) = 0$ і існує $A^* = [J(x^*)^T J(x^*)]$, причому $\|A^*\| \le B$;

2) в околі $\Omega_* = \{x : \| x - x^* \| \le r_0\} \subset D$ справедливі оцінки

$$\|F''(x)\| \le L, \quad \|J(x)^T - J(x^*)^T\| \le L\|x - x^*\|;$$

3) $\max\{\|J(x^*)\|, \|J(x^*)^T\|\} \le C$;

4) $h_0 = \max\{K_0 r_0, G\} < 1$,

де

$$r_0 = \max\{\|x_0 - x^*\|, \|A_0 - A^*\|\},$$

$$K_0 = C^2 + (B + r_0)\big[C(2 + \frac{1}{2}L) + L(1 + \frac{1}{2}L)r_0\big],$$

$$G = C^2 r_0 + L(2C + L r_0)(B + r_0)^2.$$

Тоді послідовності $\{x_k\}$ і $\{A_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, збігаються відповідно до x^* і A^*, причому знайдуться такі сталі γ_1 і γ_2, при яких справедливі оцінки

$$\|x_k - x^*\| \le h^{c_k} r_0, \ \ \|A_k - A^*\| \le h^{g_k} r_0, \tag{50}$$

де

$$c_k = \gamma_1 t_1^k + \gamma_2 t_2^k - 2, \ \ g_k = c_{k-1} + 1, \ \ c_{-1} = -1,$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618, \ t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

При наявних перевагах методу (48)–(49) у нього є і недоліки: швидкість його збіжності знизилась до $1,618\ldots < 2$. Крім того, через різну кількість обчислень у формулах (48) та (49) один із процесорів буде завантажений неповністю і може простоювати. Хоча за рахунок використання паралельних обчислювальних пристроїв досягається скорочення загального часу розв'язання задач, однак обчислювальні ресурси використовуються неефективно. Щоб усунути згадані недоліки, можна здійснити реалізацію обчислювального процесу, яка не передбачає синхронізації обчислень у різних процесорах [35]. Такий підхід приводить до асинхронного варіанту методу (48)–(49):

$$x_{k+1}^{m+1} = x_{k+1}^{m} - A_k J(x_k^{m_k-1})^T F(x_{k+1}^{m}), \quad m = 0, 1, \ldots, m_{k+1} - 1, \tag{51}$$

$$A_{k+1} = A_k \lfloor 2E - J(x_k^{m_k-1})^T J(x_k^{m_k-1}) A_k \rfloor, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{52}$$

де $x_k^{m_k}$ — останнє наближення до точного розв'язку x^* задачі (1), при визначенні якого застосовували апроксимацію оберненого оператора A_{k-1}; $x_k^{m_k} = x_k = x_{k+1}^0$; x_0, A_0 — початкові наближення до x^* , $[J(x^*)^T J(x^*)]^{-1}$. Метод (51)–(52) використовує асинхронну апроксимацію оберненого оператора. Перевага методу (51)–(52) перед методом з синхронною апроксимацією оберненого оператора (48)–(49) полягає в тому, що при реалізації методу (51)–(52) на двох паралельних процесорах останні не будуть простоювати. Крім того, порядок збіжності процесу (51)–(52) більший (2 проти 1,618. . .). Достатні умови квадратичної збіжності ітерацій (51)–(52) до точного розв'язку x^*, A^* встановлюються за схемою праці [35].

Аналогічно можна побудувати модифікації з послідовною та паралельною апроксимаціями на базі інших методів ньютонівського типу для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів.

7. Висновки

У цій статті запропоновано нові ітераційно-різницеві методи та параметричні модифікації методу Гаусса-Ньютона і Левенберга-Марквартa. Розглянуто нові однокрокові та двокрокові різницеві ітераційні процеси. Методи вивчались при класичних умовах Ліпшиця, при умовах Гьольдера, при узагальнених умовах Ліпшиця, які накладались на поділені різниці першого або другого порядку. Також запропоновано та обгрунтовано варіанти методу Гаусса-Ньютона з послідовною та паралельною апроксимаціями оберненого оператора.

Література

1. Дэннис Дж. Численные методи безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
2. Argyros I.K. On the Gauss–Newton method / I K. Argyros, S. Hilout // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2012. — V. 35(1). — P. 537–550.
3. Chen J. Convergence of Gauss-Newton method and uniqueness of the solution / J. Chen, W. Li // Appl. Math. Comp. — 2005. — V. 170. — P. 686–705.
4. Chen J. The convergence analysis of inexact Gauss–Newton methods for nonlinear problems / J. Chen // Computational Optimization and Applications. — 2008. — V. 40. — № 1. — P. 97–118.
5. Häussler W.M. A Kantorovich-type convergence analysis for the Gauss-Newton-method / W.M. Häussler // Numer. Math. — 1986. — V. 48(1). — P. 119—125.
6. Schwetlick H. Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen / H. Schwetlick. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. — 346 s.

7. Бартіш М.Я. Деякі методи розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів / М.Я. Бартіш, С.М. Шахно // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1993. — Вип. 39. — С. 3–7.
8. Бартіш М.Я. Про одну модифікацію методу Гауса-Ньютона / М.Я.Бартіш, А.І. Чипурко, С.М. Шахно // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1995. — Вип. 42. — С. 35–38.
9. Бартиш М.Я. Исследование параметрических итерационных процессов для решения нелинейных уравнений / М.Я. Бартиш, С.М. Шахно //Проблемы управления и информатики. — 1997. — №2. — С. 22–30.
10. Бартіш М.Я. Чисельне дослідження деяких алгоритмів розв'язування нелінійних рівнянь / М.Я.Бартіш, С.М. Шахно, В.О. Ломіковський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1995. — Вип. 41. — С. 3–8.
11. Шахно С.М. Дослідження різницевих аналогів методу Гауса-Ньютона / С.М. Шахно // Математичні студії. — 1998. — Т. 10. — № 2. — С. 119–122.
12. Шахно С.М. Застосування методів з послідовною і паралельною апроксимаціями оберненого оператора до нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно // Інф. технол. і системи. — 1999. — Т. 2. — № 1. — С. 151–154.
13. Шахно С.М. Методи з апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійних задач найменших квадратів / С.М. Шахно //"Сучасні проблеми математики". Матеріали Міжнародної наук. конф. Ч. 3. Чернівці-Київ (22-27 червня 1998 р., Чернівці). — С. 212–215.
14. Шахно С.М. Про двокрокову модифікацію методу Гауса-Ньютона при узагальнених умовах Ліпшиця для нелінійних задачі найменших квадратів / С.М. Шахно, Р.П. Якимчук // Матем. вісник НТШ. — Т. 6. — 2009. — С. 277–286.
15. Шахно С. Про різницевий метод з надквадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С.М. Шахно, О.П. Гнатишин, Р.П. Якимчук // Вісник Львів. ун-ту . Сер. Прикл. мат. та інф. — Вип. 13. — 2007. — С. 51–58.
16. Shachno S. Iterative-Difference Methods for Solving Nonlinear Least-Squares Problem / S. Shachno, O. Gnatyshyn // Progress in Industrial Mathematics at ECMI 98. — Stuttgart: Teubner, 1999. — P.287–294.
17. Shakhno S.M. On a Secant Type Method for Nonlinear Least Squares Problems / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn, R.P. Iakymchuk // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2009. — № 1 (97). — P. 112–121.
18. Shakhno S.M. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear least squares problems / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — V. 161, №1. — P. 253–264.
19. Shakhno S.M. On an one-step modification of Gauss-Newton method under generalized Lipschitz conditions for solving the nonlinear least squares problem / S.M.Shakhno, R.P. Iakymchuk // Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — V. 9. — P. 565–566.
20. Shakhno S.M. Some numerical methods for nonlinear least squares problems / S.M. Shakhno // Symbolic Algebraic Methods and Verification Methods / G. Alefeld, J. Rohn, S. Rump, T. Yamamoto (eds.). — Wien New York: Springer, 2001.– P. 235–243.
21. Шахно С.М. Програмна реалізація методів розв'язування нелінійних задач про найменші квадрати / С.М. Шахно, П.М. Недашковський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1998. — Вип. 50. — С. 211–213.

22. Shakhno S.M. Algorithmus für die Lösung eines nichtlinearen Quadratmittelproblems unter Nebenbedingungen / S.M. Shakhno, O.P. Gnatyshyn // Zeitschrift für Angewandte Math. und Mech. — 2001. — V. 81, S. 4. — P. 1023-1024.
23. Шахно С.М. Застосування методів типу Гауса-Ньютона до нелінійної задачі найменших квадратів з обмеженнями / С.М. Шахно, О.П. Гнатишин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф. — 2000. — Вип. 1. — С. 255–258.
24. Argyros I.K. On the local convergence of the Gauss–Newton method / I K. Argyros, S. Hilout // Punjab University Journal of Mathematics. — 2009. — P. 23–33.
25. Argyros I.K. On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations / I.K. Argyros // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1991. — V. 10. — № 1. — P. 83–92.
26. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. – 1967. – Т. 16. – С. 13–26, С. 146–156.
27. Potra F.A. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equation / F.A. Potra // Numer. Funct. Anal. And Optimiz. — 1984–85. — 7(1). — P. 75–106.
28. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / X. Wang // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — V. 20. — P. 123–134.
29. Шахно С.М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / С.М. Шахно // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т. 4. — С. 296–305.
30. Ren A. A derivative free iterative method for solving least squares problems / H. Ren, I.K. Argyros, Saïd Hilout // Numerical Algorithms. — 2011. — V. 58. — № 4. — P. 555–571.
31. Ren H. Local convergence of a secant type method for solving least squares problems / H. Ren, I.K. Argyros // Appl. Math. Comp. — 2010. — V. 217. — P. 3816-3824.
32. Бартіш М.Я. Про одну модифікацію методу Гаусса-Ньютона / М.Я. Бартіш, А.І. Чипурко // Математичні студії. — 1998. — V. 10. — №1. — С. 85–92.
33. Shachno S.M. Numerical methods for solving nonlinear least squars problems / S.M. Shachno // Book of abstracts of 9th Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry . — Copenhagen (Denmark), 1996. — P. 543–545.
34. Роозе А.Ф. Об итерационном методе решения нелинейных уравнений с применением параллельной аппроксимации обратного оператора / А.Ф. Роозе // Известия АН ЭССР. Физика. Матем. — 1982. — Т. 16. — №1. — С. 32–37.
35. Роозе А.Ф. Асинхронный итерационный метод решения нелинейных уравнений с применением паралельной аппроксимации обратного оператора / А.Ф. Роозе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986. — Т. 26. — № 8. — С. 1250–1254.

Факультет прикладної математики та інформатики, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна.

Надійшла 29.08.2012