

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА
П. Я. ПОЛУБАРИНОВОЙ-КОЧИНОЙ В ТЕОРИИ
ФИЛЬТРАЦИИ**

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

РЕЗЮМЕ. Работа посвящена точному аналитическому методу решения плоской задачи теории установившейся фильтрации П. Я. Полубариновой-Кочиной.

К числу точных аналитических методов решения плоской задачи теории установившейся фильтрации [1–7] относится метод, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [8]. Последний был разработан и применен к решению весьма сложных задач фильтрации П. Я. Полубариновой-Кочиной [9–27], которая тем самым блестяще реализовала оригинальную идею, предложенную в свое время Н. Е. Кочиным. Серьезное теоретическое обоснование, простота и наглядность метода предупредили широкое его признание, обычно под названием метода П. Я. Полубариновой-Кочиной [1, 3, 4].

Упомянутый метод состоит в следующем.

Обозначим через $\omega(\zeta)$ и $z(\zeta)$ функции, дающие конформное отображение областей комплексного потенциала ω и фильтрации z на верхнюю полуплоскость ζ , и введем функции

$$\Omega = \frac{d\omega}{d\zeta}, \quad Z = \frac{dz}{d\zeta}. \quad (1)$$

При отыскании зависимости комплексного потенциала течения ω от комплексной координаты z точек области движения дело, как известно, сводится к конформному отображению на верхнюю полуплоскость кругового многоугольника. Пусть односвязный круговой многоугольник плоскости w имеет границу, состоящую из конечного числа n — круговых дуг и прямолинейных отрезков. Предположим, что вершины многоугольника с внутренними углами $\pi\nu_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) переходят в точки a_k вещественной оси плоскости ζ . Пусть угол при вершине, приходящей в бесконечно удаленную точку ∞ , будет $\pi(\nu'_n - \nu''_n)$.

Тогда комплексная скорость $w = d\omega/dz = \Omega/Z$ может быть представлена в виде отношения линейных комбинаций двух решений следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с n регулярными особыми точками [8, 28]:

$$y'' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \nu_k}{\zeta - a_k} y' + \frac{\nu'_n \nu''_n \zeta^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} \lambda_i \zeta^i}{4 \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)} y = 0, \quad (2)$$

где λ_i — некоторые вещественные постоянные. Эти $n-3$ величины в уравнении (2) представляют так называемые дополнительные (акцессорные) параметры, которые, наряду с точками a_k , заранее неизвестны.

Если найти два линейных независимых интеграла уравнения (2) $y_1(\zeta)$ и $y_2(\zeta)$, то искомые величины могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\Omega &= G(\zeta)(C_1 y_1 + C_2 y_2), \\ Z &= G(\zeta)(C_1 y_1 + C_2 y_2),\end{aligned}$$

где постоянные C_i определяются по координатам вершин рассматриваемого многоугольника. Что касается функции $G(\zeta)$, то она имеет лишь регулярные особенности в точках a_k и может быть представлена в виде

$$G(\zeta) = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\rho_k},$$

причем характеристические показатели ρ_k , согласно методу П. Я. Полубариновой-Кочиной, определяются из рассмотрения граничных условий на прилегающих к соответствующим вершинам участках контура и принятой схемы течения вблизи этих вершин [2, 9–11, 20, 21]. Геометрический способ нахождения показателей ρ_k разработан Б. К. Ризенкампом [29] и С. Н. Нумеровым [30]. Наряду с этим предложен также способ получения показателей в тригонометрической форме [31, 32].

Таким образом, задача определения неизвестных функций Ω и Z тесно связана с конформным отображением соответствующего кругового многоугольника области комплексной скорости и сводится, по сути дела, к исследованию уравнения (2) и построению его интегралов y_1 и y_2 . Если последние определены, то, интегрируя выражения (1), найдем решение рассматриваемой фильтрационной задачи в параметрическом виде.

Наиболее простым и в то же время весьма важным является случай, когда число особых точек, содержащихся в уравнении (2), меньше четырех: тогда акцессорные параметры λ_i не входят в уравнение. Например, в случае трех особых точек получается хорошо изученное гипергеометрическое уравнение Гаусса [33], коэффициенты которого и интегралы вполне определяются величинами a_k и характеристическими показателями ρ_k [8].

Использование разработанного математического аппарата для такого уравнения позволило П. Я. Полубариновой-Кочиной получить эффективные решения для целого ряда задач, интересных в теоретическом отношении и важных для гидротехники и мелиорации. Они нашли широкое применение при исследовании следующих практических важных задач: в земляной перемычке с низовым клином и земляной плотине, расположенных на горизонтальном водоупоре и снабженных горизонтальным фильтром; в земляной плотине треугольного профиля при сухом нижнем бьефе, расположенной на горизонтальном водоупоре; в бесконечно высокой земляной плотине трапецеидального профиля, расположенной на наклонном или горизонтальном водоупоре.

Наиболее значительные результаты получены П. Я. Полубариновой-Кочиной при решении задачи фильтрации через прямоугольную перемычку [2, 7, 18, 20]. С помощью оригинальных и изящных приемов решение доводится до простых результатов, позволяющих проводить обширные численные расчеты. Несмотря на то, что ранее этот случай был рассмотрен методом комплексной скорости Б. Б. Девисоном [34] и Г. Гамелем [35], численные расчеты по этому решению оказались громоздкими, в связи с чем было просчитано лишь ограниченное число примеров [36, 37].

Дальнейший важный шаг сделан П. Я. Полубариновой-Кочиной при рассмотрении некоторых случаев фильтрации в неоднородной среде [12, 16, 17, 19]: в основании плоского флутбета и вокруг водонепроницаемого шпунта в предположении, что водопроницаемое основание сложено из двух горизонтальных слоев (одинаковой мощности с любым коэффициентом фильтрации), подстилаемых водоупором с горизонтальной кровлей; в основании плоского симметричного разрезного флутбета, а также вокруг двух точечных шпунтов при условии, что водопроницаемое основание имеет конечную мощность и состоит из двух слоев с вертикальной линией раздела, расположенной посередине между частями флутбета или шпунтами. Полученные решения затем преобразуются к весьма упрощенным зависимостям, содержащим элементарные функции. Таким образом, и здесь свои фундаментальные результаты П. Я. Полубаринова-Кочина сумела связать с потребностями инженерной практики. Дальнейшие исследования некоторых задач в двуслойной среде, связанные с применением обратного приема, который в свое время был предложен Н.К. Калинин [38], содержатся в работе [39].

Под влиянием работ П. Я. Полубариновой-Кочиной в дальнейшем появился ряд исследований, посвященных разнообразным случаям фильтрации, в которых число особых точек сводится к трем ¹: Б. К. Ризенкамф [29], С. В. Фалькович [21, 40], Г. К. Михайлов [41–43], В. А. Васильев [44], В. А. Васильев и Д. Ф. Шульгин [45], В. А. Васильев и И. С. Теплицкий [46], В. А. Барон [47], В. Н. Эмих [48–50], Ю. И. Капранов [51], А. Р. Цицкишвили [52], Э. Н. Береславский и Л. А. Панасенко [53], Э. Н. Береславский [54–57].

До сих пор рассматривались задачи, для решения которых можно использовать уравнения гипергеометрического типа. Однако в практике все большее прикладное значение приобретают исследования, связанные с постановкой и решением значительно более сложных задач — как по причине осложненных условий фильтрации, так и вследствие геометрических очертаний областей фильтрации. Именно такими являются задачи с четырьмя, пятью и т. д. особыми точками.

¹Здесь и ниже рассматриваются только те работы, в которых используется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной, и вопрос о целесообразности его применения не затрагивается.

Как оказалось, при большем числе особых точек $n > 3$ применение метода П. Я. Полубариновой-Кочиной сопряжено с трудностями принципиального характера. Дело в том, что помимо традиционной трудности, которая возникает в случае прямолинейных многоугольников при применении формулы Кристоффеля–Шварца и связана с нахождением неизвестных постоянных a_k , для круговых многоугольников задача еще более усложняется. В коэффициентах уравнения (2) начинают появляться акцессорные параметры λ_i , причем с прибавлением каждой новой стороны многоугольника число неизвестных параметров увеличивается сразу на два. Дифференциальное уравнение (2) в таких случаях не только не удается решить в общем виде, но и интегрирование его для каждого конкретного многоугольника оказывается весьма трудной задачей.

Положение осложняется еще и тем обстоятельством, что связь параметров с геометрическими характеристиками заданного многоугольника также заранее неизвестна. В этом направлении наиболее значительные результаты получены также П. Я. Полубариновой-Кочиной [11, 20]. Ею впервые установлен вид уравнений, связывающих неизвестные постоянные с коэффициентами вспомогательных подстановок для интегралов уравнения (2) в случае произвольных кругового четырехугольника и пятиугольника, один из углов которого равен 2π . Для вершин таких разрезов построены алгебраические уравнения, связывающие между собой неизвестные параметры. Однако, несмотря на полученные общие результаты удобного метода нахождения неизвестных констант конформного отображения не существует до сих пор.

В силу указанных причин эффективных решений для задач фильтрации с числом неустранимых особых точек, большим трех, получено немного. Условно эти задачи можно разделить на две группы.

К первой группе задач относится случай фильтрации через трапециевидальную перемычку с наклонными откосами, расположенную на водопоре [52, 58]. Он рассмотрен с помощью метода, предложенного А. Р. Цицкишвили, и опирается на теорию сопряжения для нескольких неизвестных функций и теорию И. А. Лаппо–Данилевского [59–71]. Следует признать, что метод, которым пользуется А. Р. Цицкишвили, дает общие результаты и в теоретическом плане удалось в определенной степени преодолеть трудности, возникающие при интегрировании уравнения (2).

К подобным результатам приводят также и исследования Л. И. Чибриковой [72–75]. Ею предложен оригинальный подход, основанный на применении интегралов по кривым на римановых поверхностях и решении задачи Римана, что позволило получить ряд интересных результатов в разработке опять же теоретических методов решения фуксовых уравнений.

Работы А. Р. Цицкишвили и Л. И. Чибриковой, ориентированные главным образом на исследования общего характера, являются важным вкладом, как в теорию конформных отображений круговых многоугольников, так и в методы интегрирования уравнений класса Фукса. Во всяком случае, они наглядно демонстрируют новые возможности теории линейного

сопряжения. Представляя несомненный интерес для теоретических исследований, эти возможности, к сожалению, оказываются до сих пор нереализованными для количественного анализа изучаемых явлений. Упомянутое выше решение задачи о фильтрации через земляную трапецеидальную перемычку — это пока единственное решение подобного рода. Других алгоритмов числовых расчетов для тех случаев, когда $n \geq 4$, еще нет вообще.

К другой группе задач относятся случаи, для которых оказывается возможным применить некоторые искусственные приемы, связанные либо с подходящей заменой переменных в уравнении (2), либо с удачным выбором вспомогательной области изменения параметрической переменной. Таким способом П. Я. Полубариновой-Кочиной [22], С. В. Фальковичу [21, 40], Н. К. Калинину [76], В. А. Васильеву [77], А. Я. Чилапу [78], В. Н. Эмиху [24, 48], Ю. И. Капранову [51, 79] удалось получить решения задач в замкнутом виде. Разумеется, что выгоды в выборе соответствующих замен переменных и вспомогательных областей, которыми пользуются авторы, целиком связаны с частными особенностями задач.

При всей значимости перечисленных выше работ, ориентированных либо на исследования общего характера, либо на использование различных искусственных приемов, изыскания в указанном направлении пока разобщены и не в полной мере отражают специфику фильтрационных течений со свободными границами. Учет одновременно влияния различных физических факторов, существенно влияющих на фильтрационные процессы, а также характерных особенностей последних пока еще не стал широким достоянием точных аналитических решений. По-прежнему актуальной остается разработка методов, приспособленных к тем или иным классам задач, которые бы учитывали их специфику и были бы, кроме того, простыми и удобными для приложений.

Дело в том, что фильтрационные течения со свободными границами относятся к движениям со сложной кинематической структурой, характеризующимися наличием граничных критических точек, в которых напор или расход принимают экстремальные значения, а скорость обращается в нуль, т. е. состоят из нескольких составляющих их потоков. Кроме того, в любой гидродинамической задаче, в которой приходится иметь дело со свободными границами (депрессионной кривой или линией раздела между пресными и солеными водами) наличествуют точки перегиба на этих границах. Наконец, при постановке задачи должна быть отражена и в определенной степени учтена при исследовании и особенность потока, сопутствующая возможным инфильтрации или испарению со свободной поверхности.

Эти и ряд других обстоятельств и приводят к тому, что весьма распространенным и типичным для областей комплексной скорости подобных фильтрационных задач является обилие прямых углов и разрезов. Как казалось, несмотря на различную конфигурацию и структуру эти области принадлежат одному и тому же классу — круговым многоугольникам в полярных сетках [28]. Последние, как известно, состояются дугами концентрических окружностей с центром в начале координат и проходящими через него отрезками прямых. Подобные многоугольники, несмотря на их

частный вид, имеют весьма широкое распространение и достаточно общий характер в задачах фильтрации [27, 80, 81]. В частности, анализ показал, что все те области, которые имеют место в задачах второй группы, о которых говорилось выше, принадлежат именно классу круговых многоугольников в полярных сетках. Поэтому разработка специальных методов конформного отображения применительно к подобного рода областям имеет большое практическое значение.

В отличие от традиционного подхода [28], основанного на сведении задачи с помощью логарифмической функции к прямолинейным прямоугольникам, при котором увеличивается число неизвестных параметров в формуле Кристоффеля–Шварца, оказывается более выгодным воспользоваться общей теорией построения отображающих функций на основе решения соответствующих уравнений класса Фукса. Разработанная методика [82–87] опирается на идею нахождения частных решений уравнений фуксового типа в виде линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных частных решений некоторых более простых гипергеометрических уравнений с тремя особыми точками. При этом неизвестные параметры конформного отображения определяются в ходе построения частных решений, поэтому в дальнейшем проблемы аксессуарных параметров не возникает. Учет характерных особенностей рассматриваемых областей позволил представить решения непосредственно в замкнутой форме через специальные, а в ряде случаев — элементарные функции, что делает их использование наиболее простым и удобным при последующих практических целях.

На этом пути с помощью разработанной методики метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной был использован при исследовании фильтрационных течений пресных вод над покоящимися солеными в образованиях типа линз [88, 89] и кайм [90, 91], в зоне действия кротовых оросителей [92] и водоемов [93], при обтекании шпунта Жуковского [94–97], а также в различных случаях фильтрации из каналов в почвогрунтах, подстилаемых сильнопроницаемым напорным водоносным горизонтом высокой проницаемости или водоупором [98–102].

В развитие этого подхода отметим возможность получения решений задач фильтрации, при исследовании которых возникают неоднолистные или двусвязные области комплексной скорости [93, 91, 98].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. — М.: Гостехиздат, 1953. — 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М.: Гостехиздат, 1952. — 676 с.; 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1967. — 545 с.

4. Михайлов Г. К. Движение жидкостей и газов в пористых средах / Г. К. Михайлов, В. Н. Николаевский // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1970. — Т. 2. — С. 585–648.
5. Ляшко И. И. Расчет фильтрации в зоне гидросооружений / И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий, А. Я. Олейник. — Киев: Будивельник, 1977. — 118 с.
6. Ляшко И. И. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. — Киев: Наукова думка, 1977. — 287 с.
7. Кочина П. Я. Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации / П. Я. Кочина. — М.: Наука, 1991. — 351 с.
8. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. — М., Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1938. — № 3. — С. 371–398.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1939. — № 3. — С. 329–350.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1939. — № 5–6. — С. 579–602.
12. Полубаринова-Кочина П. Я. Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 6. — С. 75–88.
13. Полубаринова-Кочина П. Я. Пример движения грунтовых вод через земляную плотину при наличии испарения / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 7. — С. 45–52.
14. Полубаринова-Кочина П. Я. О непрерывности изменения годографа скорости в плоском установившемся движении грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24. — № 4. — С. 327–330.
15. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности / П. Я. Полубаринова-Кочина // Изв. АН СССР. ОТН. — 1940. — № 6. — С. 73–80.
16. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о фильтрации в двуслойной среде / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 26. № 4. — С. 339–341.
17. Полубаринова-Кочина П. Я. О простейших случаях фильтрации в двуслойной среде / П. Я. Полубаринова-Кочина // Докл. АН СССР. — 1940. Т. 26. — № 8. — С. 746–749.
18. Полубаринова-Кочина П. Я. Расчет фильтрации через земляную перемычку / П. Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. — 1940. — Т. 4. — Вып. 1. — С. 53–64.
19. Полубаринова-Кочина П. Я. О фильтрации в неоднородном (двуслойном) грунте / П. Я. Полубаринова-Кочина // Инс. сб. — 1941. — Т. 1. — Вып. 2. — С. 313–320.

20. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. — 143 с.
21. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах / П. Я. Полубаринова-Кочина, С. В. Фалькович // ПММ. — 1947. — Т. 11. — Вып. 6. — С. 629–674.
22. Полубаринова-Кочина П. Я. О линзе пресной воды над соленой водой / П. Я. Полубаринова-Кочина // ПММ. — 1956. — Т. 20. — Вып. 3. — С. 418–420.
23. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые методы теории функций комплексного переменного в применении к теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: Изд-во СОАА СССР. — 1961. — С. 212–218.
24. Полубаринова-Кочина П. Я. Математические методы в вопросах орошения / П. Я. Полубаринова-Кочина, В. Г. Пряжинская, В. Н. Эмих. — М.: Наука, 1969. — 414 с.
25. Полубаринова-Кочина П. Я. О круговых многоугольниках в теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука. — 1983. С. 166–177.
26. Полубаринова-Кочина П. Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений в теории фильтрации / П. Я. Полубаринова-Кочина // Математика и проблемы водного хозяйства. — Киев: Наукова думка. — 1986. — С. 19–36.
27. Полубаринова-Кочина П. Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики / П. Я. Полубаринова-Кочина, Э. Н. Береславский, Н. Н. Кочина. — Ч. 1. — Препринт №567. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. — 122 с.
28. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. — М.: Изд-во Иностран. лит., 1963. — 406 с.
29. Ризенкамф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ч. 3 / Б.К. Ризенкамф // Уч. записки Саратовск. ун-та. — Сер. гидравлики. — 1940. — Т. 15. — Вып. 5. — С. 3–93.
30. Нумеров С. Н. Методы исследования плоской установившейся фильтрации (тяжелой несжимаемой жидкости) в однородной среде: Дисс. ... д-ра техн. наук / С. Н. Нумеров. — Л., 1954. — 210 с.
31. Kravchenko V. Sur les singularites des ecoulements plans et permanents des nappes souterraines pesants / V. Kravchenko, G. Saurage de Saint-Mare, M. Boreli // Houille blanche. — 1955. — V. 10. — № 1. — P. 47–62.
32. Kravchenko V., Saurage de Saint-Mare G., Boreli M. Sur les singularites des ecoulements plans et permanents des nappes souterraines pesants / V. Kravchenko, G. Saurage de Saint-Mare, M. Boreli // Houille blanche. — 1955. — V. 10. — № 4. — P. 533–542.
33. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
34. Девисон Б. Б. Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины (гидромеханический метод решения задачи) / Б. Б. Девисон // Уч. записки ГГИ. — Л. — 1932. — № 6. — С. 11–19.
35. Hamel G. Über Grundwasserströmung / G. Hamel // ZAMM. — 1934. — Bd. 14. — H 3. — S. 129–157.

36. Hamel G. Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung / G. Hamel, E. Genter // ZAMM. — 1935. — Ed. 15. — H 5. — S. 255–265.
37. Muskat M. The seepage of water through dams with vertical faces / M. Muskat // Physics. — 1935. — V. 6. — № 12. — P. 402–415.
38. Калинин Н. К. Сведение некоторых задач о фильтрации в двуслойной среде к задачам о фильтрации в однородном грунте / Н. К. Калинин // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 40. — № 5. — С. 204–207.
39. Береславский Э. Н. О некоторых случаях фильтрации в плотинах с вертикальным верховым откосом, дренированных в основании / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 6. — С. 59–63.
40. Фалькович С. В. Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / С. В. Фалькович. — Саратов, 1943. — 106 с.
41. Михайлов Г. К. К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецеидального профиля на горизонтальном водопоре / Г. К. Михайлов // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 4. — С. 553–556.
42. Михайлов Г. К. О фильтрации в трапецеидальных плотинах с вертикальным верховым откосом / Г. К. Михайлов // ППМ. — 1953. — Т. 17. — Вып. 2. — С. 189–199.
43. Михайлов Г. К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью / Г. К. Михайлов // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 110. — № 6. — С. 945–948.
44. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод при частичной инфильтрации на его поверхность / В. А. Васильев // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 11. — С. 177–181.
45. Васильев В. А. Приток инфильтрационной воды в симметрично расположенные водоприемники / В. А. Васильев, Д. Ф. Шульгин // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 10. — С. 46–50.
46. Васильев В. А. Фильтрация пресной воды из канала с малой глубиной воды на соленые воды / В. А. Васильев, И. С. Теплицкий // Тр. Ташкентск. ун-та. — 1961. — Вып. 189. — С. 131–138.
47. Барон В. А. Фильтрация из канала с малой глубиной воды при наличии хорошо проницаемого слоя жидкости на конечной глубине и с учетом инфильтрации / В. А. Барон // ПМТФ. — 1961. — № 1. — С. 101–105.
48. Эмих В. Н. Фильтрация с полосы при наличии соленых подпорных вод / В. Н. Эмих // ПМТФ. — 1962. — № 2. — С. 145–149.
49. Эмих В. Н. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из канала / В. Н. Эмих // Тр. Ташкентск. ун-та. — 1964. — Вып. 265. — С. 32–38.
50. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала / В. Н. Эмих // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 2. — С. 115–119.
51. Капранов Ю. И. О форме линзы пресных вод при линейном законе испарения / Ю. И. Капранов // ПММ. — 1973. — Т. 37. — Вып. 3. — С. 497–504.
52. Цицкишвили А. Р. Эффективные методы решения задач конформного отображения и теории фильтрации: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук / А. Р. Цицкишвили. — М, 1981. — 29 с.
53. Береславский Э. Н. Об определении зоны насыщения при фильтрации из канала с малой глубиной воды / Э. Н. Береславский, Л. А. Панасенко // ПМТФ. — 1981. — № 5. — С. 92–64.

54. Береславский Э. Н. К задаче о фильтрации из оросителя ирригационной системы / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 2. — С. 105–109.
55. Береславский Э. Н. О расчете фильтрации грунтовых вод в прибрежных напорных пластах / Э. Н. Береславский // Изв. РАН. МЖГ. — 2004. — № 3. — С. 101–110.
56. Береславский Э. Н. О влиянии наклона морского дна на интрузию в прибрежные пресноводные пласты / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2006. Т. 408. — № 1. — С. 44–48.
57. Береславский Э. Н. Расчет интрузии соленых вод в прибрежных зонах морского дна / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2007. — Т. 413. — № 2. — С. 184–187.
58. Цицкишвили А. Р. О фильтрации в плотинах с наклонными откосами / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССР. — 1976. — Т. 52. — С. 94–104.
59. Цицкишвили А. Р. Эффективное решение задач сопряжения для нескольких неизвестных функций в случае кусочно-постоянной матрицы / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССР. — 1969. — Т. 35. — С. 67–103.
60. Цицкишвили А. Р. Об эффективном решении задачи сопряжения / А. Р. Цицкишвили // Сообщ. АН ГрССР. — 1970. — Т. 58. — С. 17–20.
61. Цицкишвили А. Р. Об эффективном решении задачи линейного сопряжения в случае кусочно-постоянной матрицы // Тр. Тб. матем. ин-та АН ГрССРю 1971. Т. 39. С. 61–65.
62. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211. — № 2. — С. 300–303.
63. Цицкишвили А. Р. О решении некоторых задач теории фильтрации / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 215. — № 6. — С. 1325–1328.
64. Цицкишвили А. Р. Применение метода И.А. Лаппо–Данилевского к отысканию функций, конформно отображающих полуплоскость на круговые многоугольники / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 3. — С. 458–469.
65. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники / А. Р. Цицкишвили // Сообщ. АН ГрССР. — 1976. — Т. 84. — № 3. — С. 553–556.
66. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые пятиугольники с разрезом / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 11. — С. 2044–2051.
67. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники / А. Р. Цицкишвили // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — № 4. — С. 563–566.
68. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники // Тр. Тб. ун-та, 1977. Т. 185. С. 65–89.
69. Цицкишвили А. Р. О решении уравнения Шварца в точках, где разность корней определяющего уравнения равна целому числу // Сообщ. АН ГрССР. 1980. Т. 97. № 1. С. 37–40.
70. Цицкишвили А. Р. О построении аналитических функций, конформно отображающих полуплоскость на круговые многоугольник / А. Р. Цицкишвили // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 4. — С. 646–656.

71. Цицкишвили А. Р. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к решению некоторых плоских задач теории фильтрации / А. Р. Цицкишвили // Тр. Тб. ун-та. — 1985. — Т. 259. — С. 295–329.
72. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций / Л. И. Чибрикова. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. — 302 с.
73. Чибрикова Л. И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях / Л. И. Чибрикова // Математический анализ. — М.: ВИНТИ. — 1980. — Т. 18. — С. 3–66.
74. Чибрикова Л. И. О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса / Л. И. Чибрикова // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. — Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та. — 1983. — С. 160–172.
75. Чибрикова Л. И. О кусочно-голоморфных решениях уравнений класса Фукса / Л. И. Чибрикова // Краевые задачи и их приложения. — Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та. — 1986. — С. 136–148.
76. Калинин Н. К. К вопросу о фильтрации в многослойном грунте: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Н. К. Калинин. — Саратов, 1943. — 78 с.
77. Васильев В. А. О форме бугра грунтовых вод между двумя дренами на водоупоре при наличии инфильтрации / В. А. Васильев // ПММ. — 1955. — Т. 19. — Вып. 1. — С. 106–108.
78. Чилап А. Я. К задаче о прорыве законтурной воды к галерее скважин / А. Я. Чилап // Изв. Вузов. Математика. — 1960. — № 3. — С. 241–255.
79. Капранов Ю. И. О кайме пресных вод в случае периодической системы горизонтальных трубчатых дренах / Ю. И. Капранов // Краевые задачи подземной гидродинамики. — Киев: Изд-во ин-та матем. АН УССР. — 1975. С. 67–84.
80. Береславский Э. Н. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике / Э. Н. Береславский, П. Я. Кочина // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 3–7.
81. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский, П. Я. Кочина // Изв. РАН. МЖГ. — 1997. — № 5. — С. 9–17.
82. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник / Э. Н. Береславский // Изв. Вузов. Математика. — 1980. — № 5. — С. 3–7.
83. Береславский Э. Н. К вопросу о конформном отображении двусвязных областей / Э. Н. Береславский // Вычисл. и прикл. матем. — Киев: Изд-во Киевск. ун-та. — 1986. — Вып. 58. — С. 71–75.
84. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложения / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 6. — С. 1048–1050.
85. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33. — № 3. — С. 296–301.
86. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 4. — С. 459–466.

87. Береславский Э. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48. — № 4. — С. 590–594.
88. Береславский Э. Н., Панасенко Л. А. О линзах пресных вод при фильтрации из оросителей / Э. Н. Береславский, Л. А. Панасенко // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 4. — С. 102–106.
89. Береславский Э. Н. Об одном случае отжима соленых вод пресными инфильтрационными водами в однородно-анизотропной пористой среде / Э. Н. Береславский, С. Н. Нумеров // Водн. ресурсы. — 1990. — № 5. — С. 64–68.
90. Береславский Э. Н. Задача о фильтрации из системы каналов в кайме пресных вод над солеными с испарением / Э. Н. Береславский, В. Н. Эмих // ПММ. — 1983. — Т. 47. — Вып. 3. — С. 446–454.
91. Береславский Э. Н., Матвеев В. В. Анализ систематического дренажа орошаемых земель при наличии соленых подпорных вод / Э. Н. Береславский, В. В. Матвеев // Изв. РАН. МЖГ. — 1993. — № 2. — С. 68–73.
92. Береславский Э. Н. Отжим пресной водой соленой воды при фильтрации из кротового оросителя / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1989. — Т. 53. — Вып. 3. — С. 455–461.
93. Береславский Э. Н. Забор пресной очищенной воды при фильтрации из водоема / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1990. — Т. 54. — Вып. 5. — С. 867–871.
94. Береславский Э. Н. Гидродинамическая модель отжима пресными фильтрационными водами покоящихся соленых при обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ДАН. — 1998. — Т. 363. — № 4. — С. 479–482.
95. Береславский Э. Н. К задаче об обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ПММ. — 1999. — Т. 63. — Вып. 4. — С. 603–610.
96. Береславский Э. Н. О режиме грунтовых вод при обтекании шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ПММ. — 2011. — Т. 75. — Вып. 2. — С. 303–313.
97. Береславский Э. Н. Моделирование обтекания шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2011. — Т. 440. — № 1. — С. 47–51.
98. Береславский Э. Н. О влиянии непроницаемого включения в орошаемом почвенном слое на фильтрацию из канала / Э. Н. Береславский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 71–76.
99. Береславский Э. Н., Матвеев В. В. Фильтрация в почвогрунтах, подстилаемых сильнопроницаемым напорным горизонтом / Э. Н. Береславский, В. В. Матвеев // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 2. — С. 98–104.
100. Береславский Э. Н. Об учете инфильтрации или испарения со свободной поверхности методом круговых многоугольников // ПММ. 2010. Т. 74. № 2. С. 239–251.
101. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов / Э. Н. Береславский // ПММ. — 2011. — Т. 754. — Вып. 4. — С. 563–571.
102. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов / Э. Н. Береславский // ДАН. — 2010. — Т. 343. — № 4. — С. 472–475.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ, г. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, пр. ЛИТЕЙНЫЙ, д. 48/50, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.

Поступила 14.04.2012