Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №1(111)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9: 519.7

УСЕРЕДНЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ НА ДРІБНО-ПЕРІОДИЧНІЙ СІТЦІ В КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОМУ ВИПАДКУ

А. С. Крилова, Г. В. Сандраков

Резюме. Проводиться усереднення спектральної задачі на дрібно-періодичній сітці із періодичними крайовими умовами та наведена оцінка, що є обґрунтуванням отриманої асимптотики. Методом теорії Флоке побудовані точні власні функції задачі на сітці. Встановлено відповідність між усередненими розв'язками та точними власними функціями Флоке.

Вступ

У даній роботі проводиться усереднення спектральної задачі для рівнянь другого порядку на дрібно-періодичній сітці, де розглядатимемо комплекснозначні власні функції. Випадок дійснозначних власних функцій такої задачі був розглянутий у [1]. Теорія задач усереднення для диференціальних рівнянь, які описують різноманітні фізичні процеси в мікронеоднорідних середовищах, інтенсивно розвивається останні 30 років. Усереднення рівнянь на дрібно-періодичній сітці розглядалось у [2], а на дрібно-періодичному каркасі з тонких стержнів у [3]. Питання усереднення спектральних задач вивчались у роботах [3]–[6]. Усереднення високочастотного спектру для задач на області вивчалося у [6]. Спектральні задачі на сітках досліджувались у [7] і [8].

Для поставленої задачі можливо використовувати й інший підхід за рахунок спектру Флоке, який був розглянутий у [9]. Дослідження спектральної задачі на дрібно-періодичній сітці прямим методом, який ґрунтується на ідеях теорії Флоке, дає точні розв'язки спектральної задачі на сітці із досить щільним спектром.

Перш ніж визначити задачу на сітці, розглянемо задачу на періодично-повторюваній комірці, яка є фрагментом сітки.

1. Постановка задачі на комірці

Визначимо множину Y як об'єднання двох замкнутих натягнутих струн σ_1 та σ_2, які зв'язані у їх спільній середині та містяться у прямокутнику $Q = [0,1] \times [0,l] \subset \mathbb{R}^2$, де l фіксоване додатне число. Розглянемо покриття $\mathbb{R}^2$ сіткою таких прямокутників, в кожному з яких знаходиться одна й та сама множина Y. Множину Y будемо називати періодично-повторювальною коміркою сітки. Прикладом такого об'єднання струн, які містяться у періодично-повторювальній комірці, є струнний хрест, який розглянутий у [7],

[9]. Струни хреста будемо вважати однорідними відрізками, розташованими під прямим кутом відносно одна одної та такими, що мають одиничний натяг та щільність розподілу мас [7].

Позначимо через $C(Y)$ множину функцій $u : Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y неперервних функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на струнному хресті будемо розглядати як набір неперервних звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$ та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,1]$, y_2 із $[0,l]$. Визначимо інтеграл як суму інтегралів по кожній із струн, помножену на нормуючий множник $l/(l+1)$

$$\int_Y u(y)\,dy = \frac{l}{l+1}\left(\int_0^1 u_1(y_1)\,dy_1 + \int_0^l u_2(y_2)\,dy_2\right). \tag{1}$$

Визначимо $C^1(Y)$ як множину функцій $u : Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y функцій із $C^1(Q)$, завданих на прямокутнику Q. Простір $L^2(Y)$ це поповнення простору $C(Y)$ по нормі, індукованої скалярним добутком $(u,v)_{L^2(Y)} = \int_Y u\overline{v}\,dy$.

Функціональний простір $H^1(Y)$ є поповненням $C^1(Y)$ по нормі $\|\cdot\|_{H^1(Y)}$, що відповідає скалярному добутку $\langle u,v\rangle_{H^1(Y)} = \int_Y u\overline{v}dy + \int_Y(\partial_y u)(\partial_y\overline{v})\,dy$. Множину функцій $u \in C^1(Y)$, що задовольняють умовам періодичності

$$u_1(0) = u_1(1),\ u_2(0) = u_2(l),\quad \partial_{y_1}u_1(0) = \partial_{y_1}u_1(1),\ \partial_{y_2}u_2(0) = \partial_{y_2}u_2(l)$$

позначимо через $C^1_{per}(Y)$. Через $H^1_{per}(Y)$ позначимо поповнення множини періодичних функцій $C^1_{per}(Y)$ по нормі $\|u\|_{H^1(Y)} = \int_Y |u|^2dy + \int_Y |\partial_y u|^2\,dy$.

Будемо розглядати таку Y-періодичну спектральну задачу на комірці: знайти $u \in H^1_{per}(Y)$ таку, що $\|u\|_{L^2(Y)} = 1$ та

$$\begin{gathered}
-\partial^2_{y_1}u_1(y_1) = \lambda\,u_1(y_1) \quad \text{при} \quad y_1\in[0,1],\\
-\partial^2_{y_2}u_2(y_2) = \lambda\,u_2(y_2) \quad \text{при} \quad y_2\in[0,l],\\
u_1(0) = u_1(1),\ u_2(0) = u_2(l),\quad \partial_{y_1}u_1(0) = \partial_{y_1}u_1(1),\ \partial_{y_2}u_2(0) = \partial_{y_2}u_2(l)
\end{gathered} \tag{2}$$

з умовами неперервності функцій та потоків у вузлах перетину струн

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{l}{2}\right),$$

$$\partial_{y_1}u_1\left(\frac{1}{2}+0\right) - \partial_{y_1}u_1\left(\frac{1}{2}-0\right) + \partial_{y_2}u_2\left(\frac{l}{2}+0\right) - \partial_{y_2}u_2\left(\frac{l}{2}-0\right) = 0.$$

Слід зазначити, що умови неперервності та періодичності виконані автоматично для $u \in C^1_{per}(Y)$ (і, у відомому сенсі [2], для $u \in H^1_{per}(Y)$).

2. Задача на сітці

Зменшимо прямокутник Q і струни хреста Y у N разів, де N є заданим натуральним числом. Отримаємо множини Q_ε і Y_ε із координатами $x' = \varepsilon y$ при $\varepsilon = 1/N$. Повторимо по періодичності прямокутники Q_ε та отримаємо замкнену область $\Omega = [0,1]\times[0,l]\subset\mathbb{R}^2$ з границею $\partial\Omega$. На цю область натягнута дрібно-періодична сітка G_ε в $\mathbb{R}^2$, що є об'єднанням N^2 струнних хрестів Y_ε. Таке Y_ε назвемо періодично-повторюваною коміркою з ребрами довжиною ε та $l\varepsilon$. Параметр x' визначає положення точки на сітці G_ε.

Подібна сітка розглядається у [2] з довільними дугами замість однорідних натягнутих струн. Згідно [2], на множині G_ε визначається простір $H^1(G_\varepsilon)$ функцій, які є неперервними у вузлах та абсолютно неперервними на кожній струні, із нормою

$$\|u\|^2_{H^1(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \Big(|u|^2 + |\partial_{x'} u|^2\Big)\, dx'. \tag{3}$$

Простір функцій $H^1_{per}(G_\varepsilon) \subset H^1(G_\varepsilon)$ періодичних на $G_\varepsilon \cap \partial\Omega$ визначається аналогічно до визначення такого простору на Y. Надалі функцію $u_\varepsilon \in H^1(G_\varepsilon)$ зручніше розглядати як набір $2N$ функцій $u^\varepsilon_{1j}(x'_{1j})$ та $u^\varepsilon_{2j}(x'_{2j})$, визначених на прямих, отриманих періодичними продовженнями струн $\varepsilon\sigma_1$ та $\varepsilon\sigma_2$, які параметризовані координатами $x'_{1j} \in [0,1]$ та $x'_{2j} \in [0,l]$, де $j = 1,\ldots,N$.

Таким чином, розглядається наступна крайова спектральна задача на сітці G_ε: знайти $u_\varepsilon \in H^1_{per}(G_\varepsilon)$ таку, що $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2\partial^2_{x'_{1j}}(u^\varepsilon_{1j}) &= \lambda_\varepsilon u^\varepsilon_{1j} \quad \text{при} \quad x'_{1j} \in [0,1],\\ -\varepsilon^2\partial^2_{x'_{2j}}(u^\varepsilon_{2j}) &= \lambda_\varepsilon u^\varepsilon_{2j} \quad \text{при} \quad x'_{2j} \in [0,l], \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} u^\varepsilon_{1j}(0) = u^\varepsilon_{1j}(1), \quad u^\varepsilon_{2j}(0) = u^\varepsilon_{2j}(l),\\ \partial_{x'_{1j}} u^\varepsilon_{1j}(0) = \partial_{x'_{1j}} u^\varepsilon_{1j}(1), \quad \partial_{x'_{2j}} u^\varepsilon_{2j}(0) = \partial_{x'_{2j}} u^\varepsilon_{2j}(l), \end{gathered} \tag{5}$$

де $j = 1,\ldots,N$. Умови періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε, які визначені для функцій $u^\varepsilon_{1j}(x'_{1j})$ та $u^\varepsilon_{2j}(x'_{2j})$, виконані автоматично, оскільки $u_\varepsilon \in H^1_{per}(G_\varepsilon)$. Крім того, u^ε_{1j} та u^ε_{2j} є досить гладкими завдяки еліптичності цих рівнянь.

Задача на сітці (4)–(5) має тривіальний розв'язок $u_\varepsilon = C$, де $|C| = l^{-1/2}$, для власного значення $\lambda_\varepsilon = 0$. Щоб виключити такий розв'язок із розгляду, визначимо простір $H^1_{per*}(G_\varepsilon) = \big\{u \in H^1_{per}(G_\varepsilon) : (u,1)_{L^2(G_\varepsilon)} = 0\big\}$ із нормою $\|u\|^2_{H^1_*(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} |\partial_{x'} u|^2\, dx'$, яка еквівалентна нормі (3) на $H^1_{per}(G_\varepsilon)$ в силу нерівності Пуанкаре. За визначенням, існують зчисленні множини власних значень $\lambda^1_\varepsilon,\ \lambda^2_\varepsilon,\ldots$ та ортонормованих власних функцій $u^1_\varepsilon,\ u^2_\varepsilon,\ldots$ цієї задачі таких, що $\alpha\varepsilon^2 \le \lambda^1_\varepsilon \le \ldots \le \lambda^s_\varepsilon \le \ldots$, з урахуванням кратності, де α є деякою додатною сталою та $\lim_{s\to\infty} \lambda^s_\varepsilon = \infty$.

3. Спектр Флоке

Відмінністю комплекснозначного випадку від дійснозначного є можливість знаходження великої кількості точних розв'язків, які описані в [9] на основі ідеї теорії Флоке для найпростішого фрагменту сітки. Ідеї теорії Флоке використовувалися раніше у [6] при усереднені спектральних задач із швидко осцилюючими коефіцієнтами, де спектр Флоке із відповідними власними функціями називається також спектром Блоха із відповідними власними функціями. Наведемо, наприклад, для непарного N та $l = 1$, доведену у [9], таку теорему.

Теорема 1. *Для непарного N ($N = 2K+1$ з $K \geq 1$) спектральна задача (4)–(5) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2 (n + \varepsilon m)^2$ при $m = 1, \ldots, N-1$ та $n \in \mathbb{Z}^+$, якому відповідає такий чотирьох-вимірний власний підпростір:*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon_{1j} = e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + \\ + e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}},\ x'_{1j} \in [0,1], \\ u^\varepsilon_{2j} = e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_2 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + \\ + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_1 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{2j}} + e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{2j}},\ x'_{2j} \in [0,1], \end{aligned} \tag{6}$$

де A, C_1, C_2, C є довільними комплексними сталими та $j = 1, 2, \ldots, N$.

Випадок парного N дещо відрізняється. Власний підпростір, коли значення $N = 2K$ та $m = K$, має досить "велику" розмірність при великих N та відповідні точки спектру є "суттєво" особливими при $N \to \infty$ (детальніше див. [9]). Для всіх інших точок спектру, тобто коли $m \neq K$, матимемо скінченну розмірність, яка не залежить від N. Такий випадок розглянутий у наступній теоремі.

Теорема 2. *Для $N = 2K$ із $K > 1$ спектральна задача (4)–(5) має власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2 (n + \varepsilon m)^2$ при $m = 1, \ldots, K-1, K+1, \ldots, N-1$ та $n \in \mathbb{Z}^+$, якому відповідає чотирьох-вимірний власний підпростір (6).*

Такий підхід дає досить "багато" власних функцій та щільний спектр при великих N для задачі на дрібно-періодичній сітці. Однак, й до такої спектральної задачі можливо застосувати теорію усереднення для подальшого дослідження спектру.

4. Побудова та обґрунтування асимптотики

Побудуємо асимптотику "низькочастотного" спектру, тобто будемо використовувати власне значення $\lambda^0 = 0$ задачі на комірці (2) із власною функцією $N^0(y) = C$, де $|C| = l^{-1/2}$. При побудові початкових доданків асимптотичного розкладення для розв'язків задачі (4)–(5), будемо слідувати принципам усереднення, які сформульовані у роботі [10]. Розклад власної функції u_ε та власного значення λ_ε задачі (4)–(5) будемо шукати у вигляді асимптотичних сум

$$\begin{gathered} u_a(x', \frac{x'}{\varepsilon}) = u_0(x', \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x', \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x', \frac{x'}{\varepsilon}), \\ \lambda_a = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2, \end{gathered} \tag{7}$$

де функції $u_0(x,y), u_1(x,y), \ldots$, які визначенні при $(x,y) \in Q \times Y$, розглядаються при $x = x'$, $y = x'/\varepsilon$, мають розділені зміни та є Y-періодичними по другому аргументу. Такі функції шукатимемо у вигляді $u_i = N_i\,(y)\,v_i(x)$, де $N_i \in H^1_{per}(Y)$. Підставляючи асимптотичну суму $u_a(x,y)$ в (4), матимемо

$$-\left\{\partial_y^2 + 2\varepsilon^1 \nabla\partial_y + \varepsilon^2\nabla^2\right\} u_a(x,y) = \lambda_a u_a(x,y),$$

де $y = x'/\varepsilon,\ x = x'$ та, для зручності запису, використовувалися позначення

$$\partial_y^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right), \quad \nabla\partial_y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right), \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових ступенях ε та отримаємо рівняння для знаходження функцій u_0, u_1 та u_2. Таким чином, при ε^0, матимемо задачу на комірці. Тому оберемо $u_0 = A\,v(x)$, де сталу A та функцію $v(x)$ визначимо пізніше. З умови розв'язності рівняння при ε^1 матимемо $\lambda_1 = 0$ та $u_1 = A\,v_1(x)$, де функцію $v_1(x)$ оберемо нульовою для простоти розрахунків.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^2, маємо таку рівність на комірці, яку за визначенням можливо розглядати як систему рівнянь

$$-\partial^2_{y_1} u^1_2(y_1, x) = A\partial^2_{x_1} v + \lambda_2 A v, \quad -\partial^2_{y_2} u^2_2(y_2, x) = A\partial^2_{x_2} v + \lambda_2 A v.$$

Знайдемо скалярний добуток правої частини отриманого рівняння та складової $N^0(y)$ ядра задачі на комірці та прирівняємо цей добуток до нуля. В результаті отримаємо для функції $v(x)$, нормованою умовою $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, наступну спектральну усереднену задачу

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_1} v(x) + l\partial^2_{x_2} v(x) + (l+1)\,\lambda_2 v(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega \\ v(x) = v(x + l_i), \quad \partial_x v(x) = \partial_x v(x + l_i) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8}$$

яка доповнена умовами періодичності у відповідності із (4)–(5), де позначено $l_1 = 1$ та $l_2 = l$. Розв'язки цієї спектральної задачі визначаються зчисленними множинами власних значень

$$\lambda^s = 4\pi^2 (l+1)^{-1}(n^2 + m^2 l^{-1})$$

при $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, які упорядкуємо так, що $0 < \lambda^1 \le \lambda^2 \le \dots$ (із урахуванням кратності, яка може дорівнювати 2, 4 або 8 у залежності від l), та власних функцій $v^s(x)$, які матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} &l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 + ml^{-1}x_2)}, \qquad l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \\ &l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 + ml^{-1}x_2)}, \quad l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \end{aligned}$$

при $m, n \in \mathbb{N}$. Відомо [11], що $\lambda^s = 4\pi s\, l^{-1} + O(s^{1/2})$ при великих s. У результаті, можливо отримати, при $A = 1$, для асимптотики власних значень та функцій такі представлення

$$\lambda^s_a = \varepsilon^2 \lambda^s, \qquad u^s_a(x, y) = v^s(x) + \varepsilon^2 N_2(y)\left(\partial^2_{x_1} v^s_0(x) + \lambda^s v^s_0(x)\right),$$

де $N_2(y) \in H^1_{per}(Y)$ задовольняє такій системі рівнянь

$$-\partial^2_{y_1} N^1_2(y_1) = 1, \qquad -\partial^2_{y_2} N^2_2(y_2) = -l^{-1},$$

яка має розв'язок (визначений з точністю до постійної функції $AN^0(y)$), що нормується таким чином, щоб $\int_Y N_2(y) N^0(y) dy = 0$. Функцію $N_2(y)$ будемо продовжувати по періодичності на всю сітку. Таким чином, функція $u^s_a(x', \frac{x'}{\varepsilon})$ є визначеною на G_ε. Більш того, функція $u^s_a(x', \frac{x'}{\varepsilon})$ автоматично задовольняє умовам періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε, оскільки функція $v^s(x)$, визначена на прямокутнику Ω, є гладкою та задовольняє умовам періодичності на Ω, а функція $N_2(y)$ належить $H^1_{per}(Y)$ та є досить регулярною на Y як розв'язок еліптичного рівняння на хресті [2].

Обґрунтуванням побудованої асимптотики є наступна теорема.

Теорема 3. *Для власних значень λ_ε^s та власних функцій u_ε^s задачі (4)–(5) існує стала C, яка не залежать від ε та s, така, що*

$$|\lambda_\varepsilon^s - \varepsilon^2\lambda^s| \le C\varepsilon^3(\lambda^s)^{3/2}, \qquad \|u_\varepsilon^s - v^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le C\varepsilon(\lambda^s)^{1/2},$$

при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ і $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, де λ^s та v^s є власним значенням та власною функцією відповідної усередненої задачі, яка буде визначена надалі.

Оцінка цієї теореми виконана для всіх таких λ^s і u_ε^s, що $\lambda^s \le c\,\varepsilon^{-2+\sigma}$ із деякою сталою c при $0 < \sigma \le 2$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ (це і означає, що $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$), але доведення цієї теореми може бути некоректним для $\lambda^s = c\,\varepsilon^{-2}$. Така ситуація є природною і пов'язана із наявністю у задачі (4)–(5) високочастотного спектру, який буде представленим та обґрунтованим у наступних дослідженнях.

5. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1 будемо проводити прямим методом. Для того, щоб перевірити чи є функція u^ε власною, двічі продиференціюємо наведені в теоремі 1 власні функції. Спершу розглянемо функцію u_{1j}^ε для $j = 1, \dots, N$

$$\partial^2_{x'_{1j}} u_{1j}^\varepsilon = -4\pi^2\,(Nn+m)^2\Big(e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} +$$
$$+ e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} + e^{i(2j-1)\pi\varepsilon m} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}} +$$
$$+ e^{-i(2j-1)\pi\varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)x'_{1j}}\Big) = -4\pi^2\,(Nn+m)^2\,u_{1j}^\varepsilon.$$

Підставляючи отриманий результат в рівняння (4) матимемо

$$-\varepsilon^2\partial^2_{x'_{1j}}(u_{1j}^\varepsilon) = \varepsilon^2 4\pi^2\,(Nn+m)^2\,u_{1j}^\varepsilon = 4\pi^2\,(n+\varepsilon m)^2\,u_{1j}^\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_{1j}^\varepsilon.$$

Таким чином маємо власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2\,(n+\varepsilon m)^2$, тобто u_{1j}^ε є власною функцією. Аналогічним чином перевіряється, що u_{2j}^ε є також власною функцією.

Функція $e^{\pm i2\pi(Nn+m)x'}$ та її похідна є один-періодичною по x', тому власні функції задачі (4) задовольняють умовам періодичності (5).

Перевіримо рівність власних функцій у вузлах сітки. Струни сітки, які горизонтально направлені, мають координати $x_2 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1-\frac{1}{2}\varepsilon$, а струни сітки, які розташовані вертикально, відповідно $x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \dots, 1-\frac{1}{2}\varepsilon$. Оберемо будь-який вузол сітки та покажемо рівність відповідних функцій в цьому вузлі. Наприклад, вузол, який знаходиться на перетині третьої горизонтальної та другої вертикальної струн, має координати $(3/2\varepsilon, 5/2\varepsilon)$ та такі значення власних функцій

$$u_{13}^\varepsilon = e^{i5\pi\varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} + e^{-i5\pi\varepsilon m} C_2 e^{i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} + e^{i5\pi\varepsilon m} C_1 e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} +$$
$$+ e^{-i5\pi\varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{3}{2}\varepsilon} = (-1)^n\big(e^{i8\pi\varepsilon m}A + e^{-i2\pi\varepsilon m}C_2 + e^{i2\pi\varepsilon m}C_1 + e^{-i8\pi\varepsilon m}C\big),$$
$$u_{22}^\varepsilon = e^{i3\pi\varepsilon m} A e^{i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} + e^{i3\pi\varepsilon m} C_2 e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} + e^{-i3\pi\varepsilon m} C_1 e^{i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} +$$
$$+ e^{-i3\pi\varepsilon m} C e^{-i2\pi(Nn+m)\frac{5}{2}\varepsilon} = (-1)^n\big(e^{i8\pi\varepsilon m}A + e^{-i2\pi\varepsilon m}C_2 + e^{i2\pi\varepsilon m}C_1 + e^{-i8\pi\varepsilon m}C\big).$$

Отже в даному вузлі власні функції рівні. Аналогічним чином доводиться рівність функцій й у всіх інших вузлах. Умова балансу натягу виконується автоматично, адже власні функції є неперервними разом із їх похідними.

Таким чином власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2 (n + \varepsilon m)^2$ та відповідні власні функції (6) є точним розв'язком задачі на дрібно-періодичній сітці (4)–(5), що доводить теорему 1. $\square$

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до доведення теореми 1, де виключається з розгляду значення m для якого $m\varepsilon = 1/2$, адже для такого m ми маємо $(2N+1)$-вимірний власний підпростір, який більш детально описаний в [9]. $\square$

Для доведення теореми 3 необхідно розглянути допоміжне твердження про заміну інтегралу по $\Omega = [0,1] \times [0,l]$ на інтеграл по дрібно-періодичній сітці G_ε та аналог леми Рімана-Лебега.

Твердження 1. *Для функції $v \in H^2(\Omega)$ існує стала C, яка не залежить від ε, така що виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_\Omega v(x)\,dx - \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} v(x')\,dx' \right| \le C\varepsilon^2.$$

Доведення. Розглянемо лінійний функціонал

$$l(v) = \int\limits_\Omega v(x)dx - \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} v(x')dx'.$$

За визначенням

$$l(v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\int\limits_{Q_\varepsilon^{ij}} v(x)\,dx - \varepsilon \int\limits_{Y_\varepsilon^{ij}} v(y)\,dy \right).$$

Оцінимо функціонал в дужках $l^{ij}(v)$, скориставшись лемою Брембла-Гільберта з [12].

Перш ніж скористуватись оцінкою вкладення $H^2(Q_\varepsilon^{ij}) \subset C(\overline{Q}_\varepsilon^{ij})$ із сталими, що не залежать від ε, зробимо заміну $y = x/\varepsilon$ та введемо наступне позначення $\widetilde{v}(y) = v(\varepsilon y)$. Звідки випливає

$$l^{ij}(v) = l^{ij}(\widetilde{v}) = \varepsilon^2 \left(\int\limits_{Q^{ij}} \widetilde{v}(y)\,dy - \int\limits_{Y^{ij}} \widetilde{v}(y)\,dy \right).$$

Враховуючи для Q^{ij} оцінку вкладання $\max\limits_{y \in Q^{ij}} |\widetilde{v}(y)| \le C\|\widetilde{v}(y)\|_{H^2(Q^{ij})}$, маємо

$$|l^{ij}(\widetilde{v})| \le C\varepsilon^2 \|\widetilde{v}(y)\|_{H^2(Q^{ij})}.$$

Безпосередньо перевіряється, що на многочленах першого ступеня, функціонал $l(\widetilde{v})$ обертається в нуль. Тоді, згідно лемі Брембла-Гільберта, маємо відповідну оцінку. В цій оцінці перейдемо знову до змінної x та отримуємо

$$|l^{ij}(v)| \le M\varepsilon^2 |\widetilde{v}(y)|_{H^2(Q^{ij})} = M\varepsilon^3 |v(x)|_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})}.$$

Таким чином, виконані співвідношення

$$|l(v)| \leq M\varepsilon^3 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |v(x)|_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})} = M\varepsilon^3 N \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |v(x)|^2_{H^2(Q_\varepsilon^{ij})}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= M\varepsilon^2 |v(x)|_{H^2(\Omega)}.$$

Отже, заміна інтегралу дає похибку $O(\varepsilon^2)$, що необхідно було довести. □

Твердження 2. *Для функції $U \in L_2(Y)$, подовженої по періодичності на всю сітку, та функції $v \in H^2_{per}(\Omega)$ такої, що $\|\partial^2_{x'} v\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq c$ із сталою c, яка не залежить від ε, виконується нерівність*

$$\left| \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x')\, dx' - l^{-1} \int\limits_{Y} U(y)\, dy \int\limits_{\Omega} v(x)\, dx \right| \leq C\varepsilon^2,$$

де стала C не залежить від ε.

Доведення. Визначимо $M(y) \in H^2_{per*}(Y)$ як розв'язок рівняння

$$\partial^2_y M(y) = U(y) - l^{-1} \int_Y U(y) dy$$

та подовжемо $M(y)$ по періодичності на всю сітку. Враховуючи, що

$$\varepsilon^2 \partial^2_{x'} M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) = \partial^2_y M(y)\big|_{y=\frac{x'}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) - l^{-1}\int_Y U(y)dy,$$

помножимо це рівняння на функцію $v(x)$ та проінтегруємо по мілко-періодичній сітці G_ε. Таким чином, отримаємо

$$\varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} \partial^2_{x'} M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x')\, dx' = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} U\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x')\, dx' - \varepsilon l^{-1} \int_Y U(y) dy \int_{G_\varepsilon} v(x') dx'.$$

Розглянемо окремо ліву частину рівняння. Двічі проінтегруємо її по частинах та застосуємо нерівність Коши-Буняковського. З огляду періодичності функцій на сітці матимемо

$$\varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} \partial^2_{x'} M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) v(x')\, dx' = \varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x'} v(x')\, dx' \leq$$
$$\leq \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left| M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx'}\ \sqrt{\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|\partial^2_{x'} v(x')\right|^2 dx'} \leq c\, \varepsilon^2 \|M\|_{L^2(Y)},$$

оскільки

$$\|M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varepsilon \int\limits_{Y_\varepsilon^{ij}} \left| M\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx' = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varepsilon^2\, \|M\|^2_{L^2(Y)} = \|M\|^2_{L^2(Y)}.$$

Користуючись твердженням 1, ми отримали похибку $O(\varepsilon^2)$, яка визначається півнормами $\|M\|_{L^2(Y)}$, $\|\partial^2_{x'} v\|_{L^2(G_\varepsilon)}$ та $\|\partial^2_x v\|_{L^2(\Omega)}$, що необхідно було довести. □

Тут використовувалися простори $H^2_{per*}(Y)$, $H^2_{per}(\Omega), \ldots$ які визначаються звичайним чином згідно розділу 2, [8] та [12]. Надалі, через C позначаються сталі, які не залежать від ε та s, можливо різні в різних формулах.

Доведення теореми 3 для власних значень та власних функцій задачі (4)–(5) з не дуже великими номерами ($s \ll \varepsilon^{-2}$) проведемо, використовуючи метод Рєлея-Рітца, який доведений у [11], та відому теорему Вішика-Люстерніка [13], [14].

Нехай H^1 та L^2 є гільбертовими просторами. Простір H^1 компактно вкладається у L^2 та H^{-1} є спряженим простором до H^1 відносно скалярного добутку в L^2. Оператор $L : H^1 \to H^{-1}$ є неперервним і таким, що $\langle Lv, v\rangle_{L^2} \geq \alpha\|v\|^2_{L^2} \quad \forall v \in H^1$, де α деяка додатна стала, та $L^* = L$. Тоді власні значення λ_k оператору L є дійсними, створюють неспадаючу послідовність $\alpha \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ (із урахуванням кратності), а власні функції $u_1, u_2, \ldots$ ортонормовані в L^2. Для такого оператору L виконується така теорема.

Теорема 4 (Вішика-Люстерніка). *Нехай λ_k і u_k власні значення і функції оператору L та існують $\mu \in \mathbb{R}$ і $u \in H^1$ такі, що $\|u\|_{L^2} = 1$ та*

$$\|Lu - \mu u\|_{L^2} \leq \beta.$$

Тоді існує λ_s таке, що $|\mu - \lambda_s| \leq \beta$ і для кожного $\sigma > \beta$ існує $\widetilde{u} \in H^1$ таке, що $\|\widetilde{u}\|_{L^2} = 1$ та

$$\|u - \widetilde{u}\|_{L^2} \leq 2\beta\sigma^{-1},$$

де $\widetilde{u}$ є лінійною комбінацією власних векторів оператора L, які відповідають власним значенням з інтервалу $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Подіємо оператором $L = -\varepsilon^2\partial^2_{x'}$ на наближену функцію $u^s_a = u^s_0 + \varepsilon^2 u^s_2$ з чого отримаємо

$$\begin{aligned} Lu^s_a\left(x', x'/\varepsilon\right) &= -\varepsilon^2\nabla^2 u^s_0 - \varepsilon^2\partial^2_y u^s_2 - 2\varepsilon^3\nabla\partial_y u^s_2 - \varepsilon^4\nabla^2 u^s_2 = \\ &= \varepsilon^2\lambda^s u^s_0 + \varepsilon^4\lambda^s u^s_2 + \varepsilon^3 K^s = \varepsilon^2\lambda^s u^s_a\left(x', x'/\varepsilon\right) + \varepsilon^3 K^s(x', x'/\varepsilon), \end{aligned} \tag{9}$$

де, для $w^s_{3/2} = \partial^3_x v^s + \lambda^s\partial_x v^s$ та $w^s_2 = \partial^4_x v^s + 2\lambda^s\partial^2_x v^s + \lambda^s\lambda^s v^s$, позначено

$$K^s(x, y) = -2\nabla\partial_y u^s_2 - \varepsilon\nabla^2 u^s_2 - \varepsilon\lambda^s u^s_2 = -2(\partial_y N_2)w^s_{3/2} - \varepsilon(N_2)w^s_2.$$

При великих λ^s, безпосередньо із (8), матимемо $\left\|\partial_x v^s\right\|^2_{L^2(\Omega)} = O(\lambda^s)$ та

$$\left\|\partial^2_x v^s\right\|^2_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^2), \quad \left\|\partial^2_x v^s + \lambda^s v^s\right\|^2_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^2),$$

$$\left\|w^s_{3/2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^3), \quad \left\|w^s_2\right\|^2_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^4),$$

$$\left\|\partial^2_x((w^s_{3/2})^2)\right\|_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^4), \qquad \left\|\partial^2_x((w^s_2)^2)\right\|_{L^2(\Omega)} = O((\lambda^s)^5).$$

Аналогічні оцінки $\left\|\partial_{x'} v^s\right\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} = O(\lambda^s), \ldots$ виконані для відповідних норм на G_ε, оскільки диференціювання $\partial_{x'_1}$ і $\partial_{x'_2}$ від v^s надає множник еквівалентний $(\lambda^s)^{1/2}$, $|v^s| \leq 2l^{-1/2}$ за визначенням та, наприклад, $\varepsilon\int_{G_\varepsilon} 1\, dx' = l$.

Використовуючи твердження 2 (із урахуванням залежності сталої від v), регулярність функції $N_2(y)$ та гладкість функції $v^s(x)$ маємо

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|K^s(x', x'/\varepsilon)\right|^2 dx' \leq 4\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|\partial_y N_2 w^s_{3/2}\right|^2 dx' + 2\varepsilon^3 \int_{G_\varepsilon} \left|N_2 w^s_2\right|^2 dx' \leq \\ \leq C \int_\Omega \left|w^s_{3/2}\right|^2 dx + \varepsilon^2 C \int_\Omega \left|w^s_2\right|^2 dx + \varepsilon^2 C(\lambda^s)^4 + \varepsilon^4 C(\lambda^s)^5, \tag{10}$$

де стала C не залежить від ε та s, що є актуальним при великих λ^s.

Крім того, згідно твердженню 2, виконані наступні співвідношення

$$\left| \, \|u^s_a(x', x'/\varepsilon)\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} - 1 \, \right| \leq C\varepsilon^2\lambda^s + \int_\Omega |v^s(x)|^2 dx - 1 + C\varepsilon^4(\lambda^s)^2 + \\ + \ldots + C\varepsilon^6(\lambda^s)^3 + \varepsilon^4 \int_Y |N_2(y)|^2 dy \int_\Omega \left|\partial^2_x v^s(x) + \lambda^s v^s(x)\right|^2 dx \leq \\ \leq C\varepsilon^2\lambda^s + C\varepsilon^4(\lambda^s)^2 + C\varepsilon^6(\lambda^s)^3 \leq C\varepsilon^2\lambda^s \tag{11}$$

при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ (тобто для $\lambda^s \leq C\,\varepsilon^{-2+\sigma}$ при $0 < \sigma \leq 2$), де стала C не залежить від ε та s, оскільки $\int_\Omega |v^s(x)|^2 dx = 1$ та $\int_Y N^0(y)\overline{N_2(y)} dy = 0$ за визначенням. Аналогічно перевіряється, що

$$\left| \varepsilon \int_{G_\varepsilon} u^s_a(x', x'/\varepsilon)\, \overline{u^j_a(x', x'/\varepsilon)} dx' \right| \leq C\varepsilon^2\lambda^s + C\varepsilon^2\lambda^j$$

при $s \neq j$ та $\lambda^s, \lambda^j \ll \varepsilon^{-2}$, тобто функції $u^1_a, u^2_a, \ldots, u^s_a$ є майже ортонормованими в $L^2(G_\varepsilon)$ (у сенсі виконання двох останніх нерівностей) і тому є лінійно незалежними при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$. Тут важливо, що система власних функцій $\{v^s\}_{s=1}^\infty$ є ортонормованою в $L^2(\Omega)$. Згідно (11), також маємо $\|u^s_a\|_{L^2(G_\varepsilon)} \neq 0$ при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ і, позначивши $\hat{u}^s_a = \|u^s_a\|^{-1}_{L^2(G_\varepsilon)} u^s_a$, отримаємо $\|\hat{u}^s_a\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$.

Перенесемо в ліву частину рівняння (9) доданок із власним значенням λ^s, піднесемо до другого степеня отриманий вираз, помножимо на ε та зінтегруємо по сітці G_ε. Тоді при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$, враховуючі (10) та (11), отримуємо

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|Lu^s_a - \varepsilon^2\lambda^s u^s_a\right|^2 dx' = \left\|Lu^s_a - \varepsilon^2\lambda^s u^s_a\right\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} = \varepsilon^7 \int_{G_\varepsilon} \left|K^s(x', x'/\varepsilon)\right|^2 dx' \leq \\ \leq \varepsilon^6 C(\lambda^s)^3 + \varepsilon^8 C(\lambda^s)^4 + \varepsilon^{10} C(\lambda^s)^5 \leq \varepsilon^6 C(\lambda^s)^3.$$

Таким чином, матимемо наступну нерівність

$$\left\|L\hat{u}^s_a - \varepsilon^2\lambda^s \hat{u}^s_a\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq \varepsilon^3 C(\lambda^s)^{3/2},$$

де стала C не залежить від ε та s при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$. Тому, згідно теореми 4, знайдеться власне значення $\lambda^{k(s)}_\varepsilon$ задачі (4)–(5) таке, що виконується нерівність

$$\left|\lambda^{k(s)}_\varepsilon - \varepsilon^2\lambda^s_2\right| \leq \varepsilon^3 C(\lambda^s)^{3/2}. \tag{12}$$

Із нерівності (12) буде випливати оцінка теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5), якщо буде перевірено, що $k(s) = s$ для кожного $s = 1, 2 \ldots.$

Розглянемо перше власне значення задачі (4)–(5). Перш ніж використати метод Рєлея-Рітца для $d = 1$, розглянемо відповідні власні функції. За визначенням, u_ε^1 задовольняє рівності $\left(u_\varepsilon^1, 1\right)_{L^2(G_\varepsilon)} = 0$. Побудоване асимптотичне розкладення u_a^1 для u_ε^1 може не задовольняти умові ортогональності константі, тому віднімемо від u_a^1 постійну $A_\varepsilon^1 = \varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^1 dx'$, так, щоб $u_a^1 - A_\varepsilon^1 \in H^1_{per*}(G_\varepsilon)$. Тоді, за твердженням 2, маємо

$$\varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^1 dx' = \int_\Omega v^1 dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \left(\partial_x^2 v^1 + \lambda^1 v^1\right) dx \int_Y N^0 N_2 dy + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\int_\Omega v^1(x) dx = 0$ та $\int_Y N^0 N_2(y) dy = 0$ за визначенням. Таким чином, можемо написати $A_\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^1| \le C$, та C не залежить від ε. Позначимо $\tilde{u}_a^1 = u_a^1 - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$, тоді $\tilde{u}_a^1 \in H^1_{per*}(G_\varepsilon)$ за визначенням постійної $\tilde{A}_\varepsilon^1$.

Подіємо оператором L на отриману функцію $\tilde{u}_a^1(x', x'/\varepsilon)$. Тоді, отримаємо результат (аналогічний до (9) при $s = 1$), який запишемо у вигляді

$$L\tilde{u}_a^1 \left(x', x'/\varepsilon\right) = \varepsilon^2 \lambda^1 \left(u_0^1 + \varepsilon^2 u_2^1 - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1\right) + \varepsilon^3 \tilde{K}^1(x', x'/\varepsilon),$$

де використані перетворення з розділу 4 та $\tilde{K}^1(x,y) = K^1(x,y) + \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1 \lambda^1$. Помножимо отриманий вираз на $\varepsilon\overline{\tilde{u}_a^1(x', x'/\varepsilon)}$ та проінтегруємо по сітці

$$\left(L\tilde{u}_a^1, \overline{\tilde{u}_a^1}\right)_{L^2(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} L\tilde{u}_a^1 \overline{\tilde{u}_a^1} dx' = \varepsilon^2 \lambda^1 \|\tilde{u}_a^1\|^2_{L^2(G_\varepsilon)} + \varepsilon^4 \int_{G_\varepsilon} \tilde{K}^1 \overline{\tilde{u}_a^1} dx'. \quad (13)$$

Розглянемо останній доданок виразу (13). Використавши оцінку (10) та нерівність Коши-Буняковского, отримаємо наступне

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \tilde{K}^1 \overline{\tilde{u}_a^1} dx' \le \left[\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|\tilde{K}^1\right|^2 dx'\right]^{1/2} \left[\varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left|\tilde{u}_a^1\right|^2 dx'\right]^{1/2} \le C \|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)}.$$

Віднімання постійної $\varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^1$ від функції u_a^1 істотно не впливає на оцінку (11), тому можливо вважати, що $\|\tilde{u}_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon^2)$.

Позначимо через $U_a^1 = \tilde{u}_a^1 \|\tilde{u}_a^1\|^{-1}_{L^2(G_\varepsilon)}$, тоді матимемо $\|U_a^1\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^1 \in H^1_{per*}(G_\varepsilon)$.

Визначимо 1-вимірний підпростір $H_1 \subset H^1_{per*}(G_\varepsilon)$, де $U_a^1(x', x'/\varepsilon) \in H_1$, та ортогональний проектор P_1 на H_1. За визначенням, $P_1 U_a^1 = U_a^1$. Тоді існує власне значення μ_ε^1 і ортонормована власна функція w_ε^1 оператору $L_1 = P_1 L P_1$. Крім того, згідно методу Рєлея-Рітца, матимемо $\lambda_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^1$.

Використовуючи отримані вище результати для $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$ маємо

$$L_1 U_a^1(x', x'/\varepsilon) = P_1 L U_a^1 = \varepsilon^2 \lambda^1 U_a^1 + O(\varepsilon^3)$$

Отже маємо оцінку зверху для першого власного значення задачі (4)–(5) в наступному вигляді

$$\lambda_\varepsilon^1 \le \varepsilon^2 \lambda^1 + C\varepsilon^3.$$

Зафіксуємо натуральне $d > 1$. Далі ортонормуємо функції $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$, $u_a^2(x', x'/\varepsilon)$, ..., $u_a^d(x', x'/\varepsilon)$ у просторі $L^2_*(G_\varepsilon)$.

Визначимо постійну $A_\varepsilon^i = \varepsilon l^{-1} \int_{G_\varepsilon} u_a^i dx'$ для $i = 2, \dots d$. Тоді, як у випадку $i = 1$, можемо написати $A_\varepsilon^i = \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^i$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^i| \le C$, та C не залежить від ε. Таким чином, матимемо $\tilde{u}_a^i = u_a^i - \varepsilon^2 \tilde{A}_\varepsilon^i \in H^1_{per*}(G_\varepsilon)$ для $i = 2, \dots d$.

Визначимо також постійну $A_\varepsilon^{21} = \varepsilon\int_{G_\varepsilon}\tilde{u}_a^2\overline{U_a^1}dx'$. Тоді, за твердженням 2, маємо

$$A_\varepsilon^{21} = \int_\Omega v^2\overline{v^1}\,dx + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\int_\Omega v^2(x)\overline{v^1(x)}\,dx = 0$ за визначенням. Таким чином, можемо написати $A_\varepsilon^{21} = \varepsilon^2\tilde{A}_\varepsilon^{21}$, де $|\tilde{A}_\varepsilon^{21}| \le C$, та C не залежить від ε.

Позначимо $\breve{u}_a^2 = \tilde{u}_a^2 - \varepsilon^2\tilde{A}_\varepsilon^{21}U_a^1$. Тоді $\breve{u}_a^2$ є ортогональною до U_a^1 і задовольняє співвідношенням аналогічним (9)–(11) та (13), тобто $U_a^2 = \breve{u}_a^2\,\|\breve{u}_a^2\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1}$ є визначеною і ортогональною до U_a^1, $\|U_a^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^2 \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$. Далі, за індукцією знайдемо ортонормовані U_a^1, U_a^2,…, U_a^{d-1} та визначемо функцію

$$\breve{u}_a^d = \tilde{u}_a^d - \varepsilon^2\tilde{A}_\varepsilon^{d,d-1}U_a^{d-1} - \dots - \varepsilon^2\tilde{A}_\varepsilon^{d1}U_a^1,$$

яка є ортогональною до U_a^i при $\varepsilon^2\tilde{A}_\varepsilon^{di} = \varepsilon\int_{G_\varepsilon}\tilde{u}_a^d\overline{U_a^i}dx'$ із $|\tilde{A}_\varepsilon^{di}| \le C$ для $i = 1,\dots,d-1$ (тут важливо, що система власних функцій v^1, …, v^d є ортонормованою) і задовольняє співвідношенням аналогічним (9)–(11) та (13). Таким чином, $U_a^d = \breve{u}_a^d\,\|\breve{u}_a^d\|_{L^2(G_\varepsilon)}^{-1}$ є визначеною і ортогональною до функцій U_a^1, U_a^2, …, U_a^{d-1}. Крім того, $\|U_a^d\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та $U_a^d \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$.

Визначимо d-вимірний підпростір $H_d \subset H_{per*}^1(G_\varepsilon)$, як лінійну оболонку функцій $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$, $U_a^2(x', x'/\varepsilon)$, …, $U_a^d(x', x'/\varepsilon)$, та ортогональний проектор P_d на H_d. За визначенням для $U \in H_{per*}^1(G_\varepsilon)$ маємо

$$P_dU = \sum_{i=1}^d U_a^i\,(U_a^i, U)_{L_*^2(G_\varepsilon)}$$

і тому $P_dU_a^i = U_a^i$ для $i = 1,\dots d$. Тоді існують d-множини власних значень $\mu_\varepsilon^1, \mu_\varepsilon^2, \dots, \mu_\varepsilon^d$ і ортонормованих власних функцій $w_\varepsilon^1, w_\varepsilon^2, \dots, w_\varepsilon^d$ оператору $L_d = P_dLP_d$ таких, що виконані нерівності $\mu_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^2 \le \dots \le \mu_\varepsilon^d$ з урахуванням кратності. Крім того, згідно методу Рєлея-Рітца, матимемо

$$\lambda_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^d \le \mu_\varepsilon^d.$$

Використовуючи співвідношення аналогічні (9)–(11) та (13) для функцій $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$, $U_a^1(x', x'/\varepsilon)$, …, $U_a^d(x', x'/\varepsilon)$, маємо

$$L_dU_a^i(x', x'/\varepsilon) = P_dLU_a^i = \varepsilon^2\lambda^iU_a^i + O(\varepsilon^3)$$

і

$$\left\|L_dU_a^i - \varepsilon^2\lambda^iU_a^i\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le \varepsilon^3C,$$

де $i = 1,\dots,d$ та стала C не залежить від ε. Тому, згідно теореми 4, знайдеться власне значення $\mu_\varepsilon^{j(i)}$ оператору L_d таке, що виконується нерівність

$$\left|\mu_\varepsilon^{j(i)} - \varepsilon^2\lambda^i\right| \le \varepsilon^3C, \tag{14}$$

де $i = 1,\dots,d$ та C не залежить від ε. Тут не важлива залежність C від i (яка фактично відома з співвідношень аналогічних (9)–(11)), адже для завершення доведення оцінки теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5) залишилось перевірити тільки, що $k(s) = s$ в (12) для кожного $s = 1, 2, \dots, d$.

Слідуючи [14], [13], перевіримо, що фактично $j(i) = i$ в (14) для кожного $i = 1, \dots, d$. Дійсно, якщо власні значення $\lambda^1, \dots, \lambda^d$ є простими, тоді одразу маємо $j(i) = i$ для кожного $i = 1, \dots, d$, оскільки d упорядкованих чисел $\mu_\varepsilon^1, \dots, \mu_\varepsilon^d$ знаходяться у ε^3-околах d строго упорядкованих чисел $\varepsilon^2\lambda^1, \dots, \varepsilon^2\lambda^d$, що є можливим тільки при $j(i) = i$. Проте, в залежності від l, кратність власного значення λ^1 є рівною або двом або чотирьом.

Розглянемо, наприклад, перший випадок, тоді λ^3 відокремлена від λ^1 на деяку константу δ (наприклад, для $l = 1/2$ константа $\delta = 1$). Обираючи $d = 2$ в (14) маємо $j(1) = 1$ та $j(2) = 2$ (що і необхідно довести, оскільки $\lambda^1 = \lambda^2$) або $j(1) = 2$ та $j(2) = 2$. В останньому випадку, існує стала $\sigma > 0$ така, що $\mu_\varepsilon^1 < \mu_\varepsilon^2 - \varepsilon^2\sigma < \mu_\varepsilon^2 + \varepsilon^2\sigma < \mu_\varepsilon^3$ і на інтервалі $(\varepsilon^2\lambda^1 - \varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2\lambda^1 + \varepsilon^2\sigma)$ знайдеться тільки одне власне значення μ_ε^2 оператору L_2. Таким чином, маємо

$$\|U_a^1 - w_\varepsilon^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le \varepsilon C, \qquad \|U_a^2 - w_\varepsilon^2\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le \varepsilon C$$

згідно теореми 4. Однак, це є неможливим [14], оскільки нормована функція w_ε^2 наближає одразу дві ортонормовані функції U_a^1 та U_a^2.

Таким чином, доведені рівності $j(i) = i$ для $i = 1, 2$. Аналогічно доводиться, що $k(s) = s$ в (15) для $s = 1, 2$ (якщо кратність λ^1 є рівною 2). Дійсно, на відрізку $[\alpha\varepsilon^2, \mu_\varepsilon^2]$ знаходяться тільки два власних значення $\lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2$ задачі (4)–(5), оскільки $\alpha\varepsilon^2 \le \lambda_\varepsilon^1 \le \lambda_\varepsilon^2 \le \mu_\varepsilon^2$, завдяки методу Рєлея-Рітца. Крім того, виконана нерівність (12) і тому $k(1) = 1$ та $k(2) = 2$ або $k(1) = 2$ та $k(2) = 2$. В останньому випадку, існує стала $\sigma > 0$ така, що на інтервалі $(\varepsilon^2\lambda^1 - \varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2\lambda^1 + \varepsilon^2\sigma)$ знайдеться тільки одне власне значення λ_ε^2 оператору L. Тому, згідно теореми 4, майже ортонормовані функції $\hat{u}_a^1$ та $\hat{u}_a^2$ (у відповідності із (11)) наближаються однією нормованою функцією u_ε^2, що є неможливим.

Розглянемо тепер, наприклад, випадок коли кратності λ^1 та λ^3 є рівними 2 та r відповідно. Обираючи $d = 3 + r - 1$ в (14) матимемо, що у ε^3-околу $\varepsilon^2\lambda^1$ знаходяться власні значення $\mu_\varepsilon^1, \mu_\varepsilon^2$ та принаймні μ_ε^{3+r-1} належить ε^3-околу числа $\varepsilon^2\lambda^3$. Якщо μ_ε^3 не належить ε^3-околу числа $\varepsilon^2\lambda^3$, тоді r ортонормованих функцій $U_a^3, \dots, U_a^{3+r-1}$ можуть бути наближені $(r-1)$ ортонормованими функціями $w_\varepsilon^4, \dots, w_\varepsilon^{3+r-1}$, що є неможливим.

Таким чином, доведені рівності $j(i) = i$ для $i = 1, \dots, 3 + r - 1$. Аналогічно доводиться, що $k(s) = s$ в (12) для $s = 1, \dots, 3 + r - 1$. Завдяки нерівності (12) та методу Рєлея-Рітца, це доведення можливо продовжити для інших d при $\lambda^d \ll \varepsilon^{-2}$, що доводить оцінку теореми 3 для власних значень задачі (4)–(5). Тут є важливим, що для кожного d та ε виконується співвідношення

$$\alpha\varepsilon^2 \le \lambda_\varepsilon^1 \le \lambda_\varepsilon^2 \le \dots \le \lambda_\varepsilon^d \le \mu_\varepsilon^d,$$

яке надає контроль над кількістю власних значень задачі (4)–(5) на конкретному відрізку $[\alpha\varepsilon^2, \mu_\varepsilon^d] \subset [\alpha\varepsilon^2, \varepsilon^2\lambda^d + \varepsilon^2 C(\lambda^d)^{3/2}]$. Це є важливим тому, що функція $k(s)$ в (12) може фактично залежати від ε. Точніше, теорема 4 гарантує тільки, що для фіксованих s та ε число $k(s)$ із (12) є визначеним.

Розглянемо тепер деяке власне значення λ^s задачі (8) кратності r (яка може дорівнювати 2, 4 або 8). Тоді, за визначенням, маємо співвідношення

$$\lambda^{s-1} < \lambda^s = \lambda^{s+1} = \cdots = \lambda^{s+r-1} < \lambda^{s+r}.$$

Позначимо через σ_s найменше число із $(\lambda^{s-1} + \lambda^s)/2$ та $(\lambda^s + \lambda^{s+r})/2$. Із нерівності (12) витікає, що інтервалу $(\varepsilon^2\lambda^s - \varepsilon^2\sigma_s, \varepsilon^2\lambda^s + \varepsilon^2\sigma_s)$ належать тільки власні значення $\lambda^s_\varepsilon, \ldots, \lambda^{s+r-1}_\varepsilon$ задачі (4)–(5). Тому, згідно теореми 4, знайдуться (можливо залежні від ε) постійні α^j_i при $i, j = s, s+r-1$ такі, що

$$\begin{aligned} \left\|\hat{u}^s_a - \alpha^s_s u^s_\varepsilon - \cdots - \alpha^s_{s+r-1} u^{s+r-1}_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} &\le C\,\varepsilon\,(\lambda^s)^{3/2}\sigma_s^{-1}, \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad & \qquad\qquad \ldots, \\ \left\|\hat{u}^{s+r-1}_a - \alpha^{s+r-1}_s u^s_\varepsilon - \cdots - \alpha^{s+r-1}_{s+r-1} u^{s+r-1}_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} &\le C\,\varepsilon\,(\lambda^s)^{3/2}\sigma_s^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Крім того, в силу умов теореми 4, матимемо

$$\begin{aligned} \left\|\alpha^s_s u^s_\varepsilon + \cdots + \alpha^s_{s+r-1} u^{s+r-1}_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} &= 1, \ldots, \\ \left\|\alpha^{s+r-1}_s u^s_\varepsilon + \cdots + \alpha^{s+r-1}_{s+r-1} u^{s+r-1}_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} &= 1, \end{aligned} \tag{16}$$

Функції $u^s_\varepsilon, \ldots, u^{s+r-1}_\varepsilon$ є ортонормованими і тому

$$\left(\alpha^s_s\right)^2 + \cdots + \left(\alpha^s_{s+r-1}\right)^2 = 1, \ldots, \left(\alpha^{s+r-1}_s\right)^2 + \cdots + \left(\alpha^{s+r-1}_{s+r-1}\right)^2 = 1$$

у відповідності із (16), тобто матриця $\left\{\alpha^i_j\right\}_{i,j=s,s+r-1}$ є ортогональною.

Визначимо функції $\check{u}^s_a, \ldots, \check{u}^{s+r-1}_a$ як ортогональні перетворення функцій $\hat{u}^s_a, \ldots, \hat{u}^{s+r-1}_a$ матрицею $\left\{\alpha^i_j\right\}_{i,j=s,s+r-1}$. Тоді, із (15) матимемо

$$\left\|\check{u}^s_a - u^s_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le C\varepsilon\,(\lambda^s)^{3/2}\sigma_s^{-1}, \ldots, \left\|\check{u}^{s+r-1}_a - u^{s+r-1}_\varepsilon\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le C\varepsilon\,(\lambda^s)^{3/2}\sigma_s^{-1},$$

що завершує доведення теореми 3 (оскільки, можна вважати, що $\lambda^s = \sigma_s$ при великих s), де за власну функцію v^s задачі (8), яка фігурує у оцінці теореми 3, слід обрати відповідну лінійну комбінацію власних функцій

$$\begin{aligned} &l^{-1/2}e^{i2\pi(nx_1+ml^{-1}x_2)}, \qquad l^{-1/2}e^{i2\pi(nx_1-ml^{-1}x_2)}, \\ &l^{-1/2}e^{i2\pi(-nx_1+ml^{-1}x_2)}, \quad l^{-1/2}e^{i2\pi(-nx_1-ml^{-1}x_2)}, \end{aligned} \tag{17}$$

із коефіцієнтами, які розташовані у одній із строк матриці $\left\{\alpha^i_j\right\}_{i,j=s,s+r-1}$, та відповідними n і m. Підкреслимо, що для власного значення λ^s задачі (8) кратності r існує довільність у виборі власних функцій $v^s, \ldots, v^{s+r-1}$, яка визначається деякою ортогональною матрицею. Тому і виникає необхідність у використанні строк відповідної матриці $\left\{\alpha^i_j\right\}_{i,j=s,s+r-1}$. $\square$

6. Висновки та зауваження

У випадку $l = 1$ можна помітити наступний цікавий факт. Для отриманих власних значень λ^s та відповідних власних функцій $v^s(x)$ усередненої задачі (8) оберемо $n = m$. Тоді матимемо власне значення $\lambda^s = 4\pi^2m^2$, а відповідні власні функції обмежимо на сітку, тобто зафіксуємо, наприклад, для функції $e^{i2\pi(mx_1+mx_2)}$, координати $x_2 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \ldots, 1-\frac{1}{2}\varepsilon$, які відповідають координатам горизонтальних струн, та $x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon, \ldots, 1-\frac{1}{2}\varepsilon$, які відповідають координатам вертикальних струн. В результаті ми отримаємо такі власні функції на кожній струні дрібно-періодичної сітки

$$e^{i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{11}}, e^{i3\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{12}}, \ldots, e^{-i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{1N}};$$

$$e^{i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{21}}, e^{i3\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{22}}, \ldots, e^{-i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{2N}}.$$

Оберемо для точного власного значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2\left(n+\varepsilon m\right)^2$, яке описане в теоремі 1 для непарного значення N, значення $n=0$, $m=1,2,\ldots,N-1$. Тоді $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 4\pi^2 m^2$ а відповідні власні функції матимуть такий вигляд (із значеннями довільних констант $A=1$, $C_1=0$, $C_2=0$ та $C=0$)

$$u^\varepsilon_{1j} = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{1j}},\ x_{1j}\in[0,1],\quad u^\varepsilon_{2j} = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon}e^{i2\pi mx_{2j}},\ x_{2j}\in[0,1],$$

де $j=1,2,\ldots,N$. Таким чином точний розв'язок, який побудований на основі теорії Флоке, співпадає із усередненою поверхнею $v^s(x)$, яка розглянута на сітці G_ε.

Аналогічним чином показується відповідність між усередненою поверхнею $e^{i2\pi(-mx_1+mx_2)}$ та точними власними функціями $\left(u^\varepsilon_{1j}, u^\varepsilon_{2j}\right)$ із значеннями довільних констант $A=0$, $C_1=1$, $C_2=0$, $C=0$; між $e^{i2\pi(mx_1-mx_2)}$ та $\left(u^\varepsilon_{1j}, u^\varepsilon_{2j}\right)$ із значеннями довільних констант $A=0$, $C_1=0$, $C_2=1$, $C=0$; а також між $e^{i2\pi(-mx_1-mx_2)}$ та $\left(u^\varepsilon_{1j}, u^\varepsilon_{2j}\right)$ із значеннями довільних констант $A=0$, $C_1=0$, $C_2=0$, $C=1$.

Для парного значення N (розв'язки спектральної задачі (4)–(5) в цьому випадку описані в теоремі 2) робимо такі самі висновки, окрім значення m, коли $m\varepsilon = 1/2$. Тоді перетином усереднених розв'язків та точних власних функцій є чотирьох-вимірний власний підпростір, проте є ще й $(2N-3)$-вимірний власний підпростір, який більш детально описаний в [9]. Тому значення m для якого $m\varepsilon = 1/2$ ми виключаємо з розгляду.

Отже, нами була побудована асимптотика для власних значень та комплекснозначних власних функцій спектральної задачі на сітці (4)–(5), а також доведена теорема 3 для s-го власного значення λ^s_ε та s-ої власної функції u^s_ε цієї задачі, що є обґрунтуванням побудованих асимптотик, де λ^s власне значення осередненої задачі (8) із власною функцією v^s, що ортонормована придатним чином, тобто v^s є відповідною лінійною комбінацією власних функцій наведених у (17). Крім того встановлена відповідність між точними розв'язками задачі на дрібно-періодичній сітці, які описані в теоремах 1 та 2, та наближеними розв'язками, які були отримані в результаті побудови асимптотики.

Література

1. Krylova A. S. Homogenization of spectral problem om small-periodic networks / A. S. Krylova, G. V. Sandrakov // Jornal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – vol. 8, No. 4. – P. 336–356.

2. Мазья В. Г. Осреднение дифференциального оператора на мелкой периодической криволинейной сетке / В. Г. Мазья, А. С. Слуцкий // Mathematische Nachrichten. – 1987. – 133. – С. 107-–133.
3. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Олейник О. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
5. Марченко В. А. Усредненные модели микронеоднородных сред / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. – Киев: Наукова думка, 2005. - 550 с.
6. Allaire G. Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis / G. Allaire, C. Conca // J.Math. Pures et Appi. – 1998. – 77. – P. 153–208.
7. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.
8. Gavrilov A. Poincare's inequality on the stratified sets and applications / A. Gavrilov, S. Nicaise, O. Penkin // Progress in nonlinear differential equations and their applications. – 2003. – 55. – С. 195-213.
9. Крилова А. С. Комплексні власні підпростори спектральної задачі на сітці / А. С. Крилова, Г. В. Сандраков // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2(109). – С. 81–96.
10. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами / Г. В. Сандраков // Матем. сб. – 1989. – Т. 180, № 12. – С. 1634–1679.
11. Рид М. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон; пер. с англ.: В. Н. Сушко, А. К. Погребков. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
12. Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. – М.: Высш.шк., 1987. – 296 с.
13. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12. в.5. – С. 3–122.
14. Люстерник Л.А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа / Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1954. – Т. 9. в.2. – С. 3–66.

Надійшла 01.06.2012