Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.948

КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЖОРСТКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ АПРОКСИМАЦІЙНОГО МЕТОДУ В. К. ДЗЯДИКА

В. І. Біленко, А. І. Дерієнко, Н. Г. Кирилаха

Резюме. Актуальність теми роботи обумовлена зростаючими вимогами до точності обчислювальних методів та алгоритмів. Такі вимоги виникають, зокрема при дослідженні широкого кола задач сучасної обчислювальної та прикладної математики. Цим вимогам в значній мірі відповідає апроксимаційний метод В.К. Дзядика, що відображено в багатьох його роботах. З метою обґрунтування запропонованого алгоритму доведена теорема в термінах теорії наближення функцій про відхилення кусково-поліноміальних наближень від точного розв'язку задачі в рівномірній та квадратичній метриках. Обчислювальні експерименти ілюструють високу ефективність запропонованого алгоритму та теоретичні результати.

Вступ

В роботі розглядається питання побудови, обґрунтування та комп'ютерної реалізації алгоритму кусково-поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Коші для жорстких систем диференціальних рівнянь вигляду:

$$A(x,y)y' = f\left(x,y\right), y\left(0\right) = y_0, x \in [0,H] \tag{1}$$

де $y\left(x\right)$ — вектор невідомих функцій. Припускається, що компоненти матриці A та вектора f є алгебраїчними многочленами двох змінних.

Цей алгоритм ґрунтується на апроксимаційному методі В. К. Дзядика, представленому в роботах [1–3]. Важливими властивостями та перевагами над іншими методами та алгоритмами [4–8] є його оптимальність в сенсі найкращих наближень та ненасиченість (алгоритм без насичення точності [4] або алгоритм інтелектуального моделювання в термінах [9]). Це особливо важливо при необхідності уникнення явища "вибуху похибок" для жорстких задач [5–11].

Актуальність таких питань обумовлена зростанням вимог до точності та надійності математичного та комп'ютерного моделювання екстремальних динамічних процесів, систем і технологій, пов'язаних з ризиком для життя людей [9].

Зокрема, жорсткі рівняння являють собою математичні моделі різних явищ і процесів в аєрокосмонавтиці (оптимальне управління та безпека літальних апаратів), в ядерній фізиці, супрамолекулярних структурах, наноелектроних і надпровідних системах, хімічній кінетиці, теорії еволюційних процесів та ін. [8–14]. Значну роль у розширенні можливостей апроксимаційних методів В. К. Дзядика відіграли відомі відкриття Нобелівських лауреатів в галузі нанофізики зі створення скануючого тунельного та скануючого атомно-силового мікроскопів.

Алгоритм

Ідею алгоритму розглянемо, використовуючи результати роботи [16] на прикладі одного рівняння вигляду (1) при

$$A(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k, \qquad f(x,y) = \sum_{l=0}^{S} \sum_{j=0}^{J} b_{lj} x^l y^j(x) \tag{2}$$

де a_k і b_{lj} — постійні коефіцієнти, $r, s, J \in \mathbb{N}$.

Зведемо аналогічно [1-3, 16] задачу (1)–(2) до еквівалентного інтегрального рівняння типу Вольтерра третього роду

$$A(x) \cdot y(x) = y_0 + \int_0^x F(t, y(t))dt, \tag{3}$$

де

$$F(t, y(t)) = f(t, y(t)) + y(t) \cdot \sum_{k=1}^{r} k a_k t^{k-1}, \tag{4}$$

Розіб'ємо, як звичайно [6-8], відрізок $[0,\ H]$ на відрізки $[x_i, x_{i+1}]$, де $i \in 0, .., m$, $x_0 = 0$, $x_m = H$, що обумовлено наявністю "швидких" та "повільних" складових в розв'язку рівняння (3).

Рівнянню (3) поставимо у відповідність на кожному відрізку $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ наближене інтегро-функціональне рівняння

$$A(x) \cdot y_{n,i}(x) = y_{n,i-1}(x_i) + \int_{x_i}^{x} F(t, y_{n,i}(t))dt + \varepsilon_{N,i}(x). \tag{5}$$

де $y_{n,i}(x)$ — розв'язок рівняння, що є алгебраїчним многочленом степені не вище за n на відрізку I_i, одного з наступних виглядів:

$$y_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ki} x^k, \quad y_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{ki} T_k \left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i \tag{6}$$

з невідомими коефіцієнтами α_{ki} (або β_{ki}). $\varepsilon_{N,i}(x)$ — нев'язка-многочлен степені $N = \max(r+n,\ S + J \cdot n + 1)$, що залежить від степенів многочленів $A(x)$, $y_{n,i}$ та F [16,19]:

$$\varepsilon_{N,i}(x) = \sum_{k=n+1}^{N} \tau_{ki} T_k \left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right), \tag{7}$$

$T_k(z) = \cos(k \arccos z)$ - многочлен Чебишева першого роду, τ_{ki} — невідомі допоміжні параметри.

Зокрема, на відрізку $I_0 : [x_0, x_1]$ рівняння (5) набуде вигляду:

$$A(x) \cdot y_{n,0}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, y_{n,0}(t))dt + \varepsilon_{N,0}(x), \tag{8}$$

де приймаємо, що при $i = 0$ $y_{n,-1}(x_0) = y_0$.

Для знаходження коефіцієнтів α_{ki} (або β_{ki}) і τ_{ki} може бути використана ітераційна схема:

$$A(x)y_{n,i,\nu}(x) = y_{n,i-1}(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x} F(t, y_{n,i,\nu-1}(t))dt + \varepsilon_{N,i,\nu}(x), \tag{9}$$

де $\nu = 1, 2, ...$ — номер кроку ітераційного процесу; $y_{n,i,v}(x)$ і $\varepsilon_{N,i,v}(x)$ — многочлени відповідного вигляду (6) і (7) з коефіцієнтами $\alpha_{k,i,v}$ (або $\beta_{k,i,v}$) і $\tau_{k,i,v}$ на ν–му кроці ітерацій.

Прирівнюючи в (9) при кожному $\nu = 1, 2, ...$ згідно (2), (4) і (5) коефіцієнти з однаковими степенями , одержуємо для α_{kv} і τ_{kv} деяку систему з $(N + 1)$–го лінійного алгебраїчного рівняння.

Теоретичне обґрунтування та аналіз похибки алгоритму

Перед тим як перейти до вивчення питання обґрунтування запропонованого алгоритму, зокрема, питання про відхилення наближеного кусково-поліноміального розв'язку виду $\hat{y}_n(x) = \{y_{n,i}(x) \ , \ \ i = 0, ..., m$ від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (1), введемо необхідні нам позначення.

Через $C\,[I_i]$ і $L_p^2\,[I_i]$ будемо позначати відповідно простір неперервних і сумовних з квадратом при чебишевській вазі

$$p_i(x) = 1/\sqrt{1 - \left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right)^2} \tag{10}$$

на відрізку I_i функцій з загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{C[I_i]}\,,\ \ \|\cdot\|_{L_p^2[I_i]}$. При дослідженні похибок розв'язування рівнянь припустимо, що

$$\min_{x \in [0,H]} A(x) \geq a_* > 0 \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай числа $H > 0$, і $n = 1, 2, 3...$ такі, що в кулі $\sigma(\rho) := \left\{\psi \in C_{[0,H]} : \|\psi\|_{C_{[0,H]}} \leq \rho\right\}$ існує єдиний розв'язок $y(x)$ рівняння (1)і єдині розв'язки $y_{n,i}(x)$ рівнянь (6)на проміжках $[x_i; x_{i+1}]$, такі, що $\|y_{n,i}\|_Y \leq \rho$, тоді для кожного $i = 0, ..., m$ виконуються нерівності*

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \leq \frac{M_1 m}{a_*} \max_{0 \leq i \leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{Y[I_i]}\,, \tag{12}$$

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{L_p^2[0,H]} \leq \frac{m}{a_*}(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2) \max_{0 \leq i \leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{L_p^2[I_i]}\,, \tag{13}$$

При виконанні нерівності

$$\theta_n(H,\rho) = \frac{1}{a_*}\left(1 - \frac{\pi h\sqrt{N}}{2(n+1)}M_1\right) > 0, \tag{14}$$

справедлива оцінка

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \le \frac{\lambda_N(Y_{[0,H]})}{a_*\theta_n(H,\rho)}\left(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right)\max_{0\le i\le m}(E_n(y)_{Y[I_i]}), \tag{15}$$

де $h = \max_i h_i$, *величини* $M_1 = M_1(H,\rho,Y)$, $M_2 = M_2(H,\rho,Y)$ *— деякі константи, що не залежать від* n. *Простір* $Y[\cdot]$ *є простором* $C[\cdot]$ *або* $L_p^2[\cdot]$, $E_n(y)_{Y[I_i]}$ *— величина найкращого наближення многочленами функції* $y(x)$ *в* $Y[\cdot]$, $\lambda_N(Y[\cdot]) = 1$ *для простору* $L_p^2[\cdot]$ *і* $\lambda_N(Y[\cdot]) = \sqrt{2N}$ *для простору* $C[\cdot]$.

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на роботах [3,16]. Тому з метою скорочення викладок зупинимося детально на доведенні нерівностей (12) і (13).

Розглянемо спочатку похибку на інтервалі $I_0 : [x_0, x_1]$. В силу (11) розділимо обидві частини рівнянь (3) і (5)на $A(x)$ і отримаємо:

$$y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{1}{A(x)}\int_{x_0}^{x} F(t,y(t)) - F(t,y_{n,0}(t))dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}. \tag{16}$$

З виразу (16), в силу (2),(4) маємо:

$$\begin{aligned} y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{1}{A(x)}\int_{x_0}^{x}(\sum_{l=0}^{S}\sum_{j=0}^{J} b_{lj}t^l\mu_{j,n,0}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{r} ka_k t^{k-1})(y(x) - y_{n,0}(x))dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\mu_{j,n,0}(t) = \sum_{p=0}^{j-1} y_{n,0}^p(t)y^{j-p-1}(t). \tag{18}$$

В силу лінійності рівняння (18)відносно різниці $y(x) - y_{n,0}(x)$ має місце рівність

$$y(x) - y_{n,0}(x) = \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} + \int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t)\frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}dt, \tag{19}$$

де $R_{n,0}(x,t)$ — резольвента ядра

$$G_{n,0}(x,t) = \frac{1}{A(x)}(\sum_{l=0}^{S}\sum_{j=0}^{J} b_{lj}t^l\mu_{j,n,0}(t) + \sum_{k=1}^{r} ka_k t^{k-1}) \qquad (20)$$

рівняння (17).

Звідси, на основі нерівності Гронуолла-Белмана, згідно (11)та (17)і з урахуванням того, що $y, \hat{y}_n \in \sigma(\rho)$, отримуємо оцінку (12)для $Y\,[I_0] =!\,[I_0]$.

Якщо застосувати рівність (19)та нерівність Буняковського для оцінки резольвенти $R_{n,0}(x,t)$ згідно (20), то можна пересвідчитися в справедливості оцінки (12)при $Y[I_0] = L^2_{p_0}[I_0]$. Отримаємо, що

$$\|y(x) - y_{n,0}(x)\|_{L^2_p} \leq \left\|\frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_{p0}} + \left\|\int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t)(\frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)})dt\right\|_{L^2_{p0}} \leq$$

$$\begin{gathered}\leq \left\|\tfrac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_p} \times \left[1 + \left(\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x} R^2_{n,0}(x,t)\sqrt{\frac{1-\left(2\frac{t-x_0}{h_0}-1\right)^2}{1-\left(2\frac{x-x_0}{h_0}-1\right)^2}}dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \\ \leq \left\|\tfrac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}\right\|_{L^2_p} \times \left[1 + \tfrac{H\cdot\pi}{2a_*}M_{1,0}(h_0,\rho)\exp\left(H\cdot M_{1,0}(H,\rho)/a_*\right)\right]\end{gathered} \qquad (21)$$

Таким чином для інтервалу I_0 в просторі $L^2_p[I_0]$ нерівність (12)доведена.

Далі, для простору $L^2_p[I_0]$ в силу теореми про диференційованість за параметром, вимоги якої задовольняються, проводимо заміну $z = \arccos(2\frac{t-x_0}{h_0} - 1)$ і інтегруємо частинами інтеграл, що стоїть в правій частині (17). Із врахуванням (5)отримаємо

$$\begin{gathered}\left|\int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t)\tfrac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}dt\right| = \\ = \left|\int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t)\sum_{k=n+1}^{N}\tau_{k0}T_k\left(2\tfrac{t-x_0}{h_0}-1\right)\tfrac{1}{A(t)}dt\right| = \\ = h_0\left|\sum_{k=n+1}^{N}\tfrac{\tau_{k0}}{n+k}\left[\left.\tfrac{R_{n,0}(x,h_0\cos z)\sin z\sin(n+k)z}{A(h_0\cos z)}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(2\frac{t-x_0}{h_0}-1)} - \right.\right. \\ \left.\left. - \int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sin(n+k)z\tfrac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{R_{n,0}(x,h_0\cos z)\sin z}{A(h_0\cos z)}\right)dz\right]\right| \leq \\ \leq h_0 c_0(h_0,\rho)\sum_{k=n+1}^{N}\tfrac{|\tau_{k0}|}{n+k} \leq \tfrac{h_0\|\tau_0\|\sqrt{N}}{n+1}c_0(h_0,\rho),\end{gathered} \qquad (22)$$

де

$$\|\tau_0\| = \left(\sum_{l=1}^{N}\tau^2_{l0}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (23)$$

$A_0(h_0, \rho)$ — деяка стала, що не залежить від n.

Якщо скористатися тепер тим, що в силу ортогональності поліномів Чебишева $T_k(2\frac{t-x_0}{h_0} - 1)$ на $[x_0, x_1]$ із вагою p_0 мають місце, аналогічно [2] нерівності

$$\|\tau_0\| = \left[\frac{2}{\pi h_0} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon^2_{N,0}(x)dx}{\sqrt{1 - \left(2\frac{t-x_0}{h_0} - 1\right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|A(x)\|_C \left\| \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \right\|_{L^2_p} \tag{24}$$

із (19)в силу (20)отримаємо нерівність (13).

Далі, в силу лінійності та проекційності поліноміальних операторів Фур'є-Чебишева, при виконанні умови (14), отримаємо, аналогічно [3, 16] оцінку

$$\|\tau_0\| \leq E_n(y)_{L^2_{p_i}} / \theta_n(h_0, \rho).$$

Звідси, якщо врахувати попередню оцінку та нерівність (21), маємо (15).

Теорема для відрізку $I_0 : [x_0, x_1]$ доведена.

На відрізку $I_1 : [x_1, x_2]$ вираз (16)прийме вигляд:

$$\begin{gathered} y(x) - y_{n,1}(x) = \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)} + \tfrac{1}{A(x)} \int\limits_{x_1}^{x} F(t, y(t)) - \\ -F(t, y_{n,1}(t))dt + \tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)}, \end{gathered} \tag{25}$$

Використовуючи міркування, аналогічні попереднім, з використанням резольвенти, отримаємо для I_1:

$$\begin{gathered} y(x) - y_{n,1}(x) = \tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)} + \\ + \int\limits_{x_1}^{x} R_{n,1}(x,t)\left(\tfrac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(t)}\right)dt, \end{gathered} \tag{26}$$

де $R_{n,1}(x,t)$ — резольвента відповідного ядра $G_{n,1}$ виду, подібного (20).

Оцінка (12)для даного інтервалу матиме вигляд:

$$\begin{gathered} \|y(x) - y_{n,1}(x)\|_{L^2_p} \leq \left\| \tfrac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(x)} \right\|_{L^2_p} + \\ + \left\| \int\limits_{x_1}^{x} R_{n,1}(x,t)\left(\tfrac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)} + \tfrac{y_0 - y_{n,0}(x_1)}{A(t)}\right)dt \right\|_{L^2_p} \leq \\ \leq \frac{\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p} + \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p}}{a_*} \left[1 + \tfrac{h_1 \cdot \pi}{2a_*} M_{1,1}(h_1, \rho) \exp\left(H \cdot M_{1,1}(h_1, \rho)/a_*\right)\right] \end{gathered}$$

Оцінки (13), (15)для інтервалу I_1 одержимо у вигляді

$$\|y(x) - \hat{y}_n(x)\|_{Y[0,H]} \leq \frac{2}{a_*} \max_{0 \leq i \leq m} (\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{Y[I_0]}, \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{Y[I_1]}),$$

$$\begin{gathered} \|y(x) - y_{n,1}(x)\|_{L^2_p[0,H]} \leq \tfrac{2}{a_*}(1 + \tfrac{h_1\sqrt{N}}{n+1} M_{2,1}) \max(\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p[I_1]}, \\ \|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p[I_1]}), \end{gathered}$$

$$\|y(x) - y_{n,1}(x)\|_{Y[0,H]} \le \tfrac{\lambda_N(Y_{[0,H]})}{a_* \theta_n(h_1,\rho)} \left(1 + \tfrac{h_1\sqrt{N}}{n+1} M_{2,1}\right) \max(E_n(y)_{Y[I_0]}, E_n(y)_{Y[I_1]}).$$

Звідси методом індукції легко переконатись в справедливості нерівностей (12), (13), (15)для $i = 1, ..., m$, якщо покласти, що $M_1 = \max\limits_{0\le i\le m} M_{1,i}$; $M_2 = \max\limits_{0\le i\le m} M_{2,i}$. Таким чином, теорема доведена. $\square$

З цієї теореми і теорем Бернштейна [3,17] для оцінки рівномірного наближення многочленами функцій, аналітичних в еліпсах Жуковського $E_{r_i}(r_i > 1)$, та цілих функцій $y(z)$ з класу H^σ, $\sigma > 0$, $z \in \mathbb{C}$, отримаємо наступні два наслідки.

Наслідок 1. *Нехай функції $A(x)$, $f(x, y)$ і число $H > 0$ такі, що існує єдина аналітична на еліпсі Жуковського для інтервалу $[0, H]$ функція $y(x)$, що є розв'язком рівняння (1).*

Тоді в умовах і термінах теореми виконується нерівність

$$\|y(x) - y_{n_i}(x)\|_C \le \left[1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1} M_2\right] \frac{2\sqrt{2N}}{a_* \theta_n(h, \rho)} \left(\frac{\|y\|_{C(E_{r_i})}}{(r-1)\cdot r^n}\right),$$

де $\|y\|_{C(\mathrm{E}_r)} = \max\limits_{z\in E_r} |y(z)|$, $r = \min\limits_{0\le i\le m} r_i$ для кожного $i = 0, ..., m$, E_{r_i} — еліпси Жуковського для інтервалів для інтервалів $[x_i, x_{i+1}]$, де $r_i > 1$.

Наслідок 2. *Якщо $y(z)$, розв'язок рівняння (1)— ціла функція і $y(z) \in H_\sigma$, така, що $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0$, $y(z) < \exp\{\sigma\cdot(|b| + \varepsilon\,|z|)\}$, для $\forall z = a + bi$ і $|z| > \delta_\varepsilon$, та $\sigma\cdot\varepsilon = A^{\sigma/2}$, то має місце нерівність*

$$|y(x) - \hat{y}(x)| \le \left[1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1} M_2\right] \frac{2\sqrt{2N}}{a_* \theta_n(h, \rho)} \exp\left\{-\frac{n}{2}\cdot c^{3/2}\right\},$$

де $A-$ константа, для кожного $n > N(c)$ на інтервалі $[-n/\sigma\cdot(1-c), n/\sigma\cdot(1-c)]$.

Таким чином, для аналітичних і цілих функцій запропонований алгоритм має експоненціальну збіжність [4].

Обчислювальний експеримент

Для реалізації запропонованого алгоритму було обрано жорстку систему звичайних диференційних рівнянь з робіт [6,8]:

$$\begin{cases} x' = 998x + 1998y, & x(0) = 1, \\ y' = -999x - 1999y & y(0) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

з точним розв'язком $x(t) = 2e^{-t} - e^{-1000t}$ і $y(t) = -e^{-t} + e^{-1000t}$.

Наявність "повільної" та "швидкої" складової в кожному розв'язку цієї задачі не дозволяє ефективно наблизити їх на відрізку $[0; 1000]$ єдиним многочленом.

Ефективність запропонованого алгоритму ілюструється навіть у найпростішому випадку наближення розв'язку (27) кусково-лінійними многочленами. Так, наприклад, для досягнення точності 0,05 відрізок $[0; 1000]$, на основі апріорних та апостеріорних оцінок даної роботи та робіт [10,14] було автоматично розбито на 6 проміжків, на кожному з яких розв'язок було наближено лінійним многочленом, а саме:

$[0; 0,001]$: $x(t) = 638,001t + 1,04$, $y(t) = -639t - 0,04$;

$[0,001; 0,003]$: $x(t) = 161,506t + 1,509$, $y(t) = -162,504t - 0,509$;

$[0,003; 0,7]$: $x(t) = -1,445t + 1,954$, $y(t) = 0,7214t - 0,977$;

$[0,7; 1,7]$: $x(t) = -0,636t + 1,398$, $y(t) = 0,3178t - 0,699$;

$[1,7; 3,7]$: $x(t) = -0,1624t + 0,601$, $y(t) = 0,0812t - 0,3004$;

$[3,7; 1000]$: $x(t) = 0$, $y(t) = 0$.

При наближенні квадратичними многочленами для досягнення тієї ж точності відрізок $[0; 1000]$ автоматично розбивається лише на 3 проміжки. Зі зростанням n на одиницю точність збільшується на порядок, що добре ілюструє наслідок теореми.

На основі міркувань при доведенні в [10] на відрізку $[-1, 1]$ нерівності $|y_n(x) - e^x| \leq (1 + 7/n^2)E_n(e^x)$ можна переконатись в справедливості нерівностей:

$$\left\|\hat{x}_n - (2e^{-t} - e^{-1000t})\right\|_{![0,1000]} \leq (1 + \delta_{1n}(x)) \cdot \max_{0\leq i\leq 5}(E_n(2e^{-t} - e^{-1000t})_{C_{[I_i]}}),$$

$$\left\|\hat{y}_n - (-e^{-t} + e^{-1000t})\right\|_{C_{[0,1000]}} \leq (1 + \delta_{2n}(y)) \cdot \max_{0\leq i\leq 5}(E_n(-e^{-t} + e^{-1000t})_{C_{[I_i]}})$$

де $\delta_{1n}, \delta_{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, $E_n(\cdot)_{C_{[I_i]}}$ — величини найкращих рівномірних наближень функцій $x(t)$ та $y(t)$ на відрізках $[x_i, x_{i+1}]$.

Питання щодо стійкості (A-стійкості, L-стійкості, в сенсі Далквіста та ін.[6,7]) та інформаційної складності автори планують розглянути в наступних публікаціях.

Зауваження 1. Запропонований алгоритм залишається в силі на випадок диференціальних рівнянь вигляду (1)в скінченній однозв'язній області G комплексної площини $\mathbb{C}$ зі спрямлюваною границею и однозв'язним доповненням. Але в цьому випадку замість многочленів Чебишева варто розглядати ортогональні многочлени. Зокрема, в ряді випадків наприклад, коли G є зіркою Міттаг-Леффлера [3] такими ортогональними многочленами можуть служити многочлени Фабера.

Зауваження 1. Питання узагальнення запропонованого алгоритму та теореми для класичних ортогональних многочленів [18] (Лежандра, Чебишева-Єрмита, Чебишева-Лаггера, та загальних многочленів Якобі) не є принципово відмінним. Але таке узагальнення є важливими в обчислювальній та прикладній математиці, математичній фізиці, квантовій механіці та новітніх застосуваннях в технічних задачах математичного та комп'ютерного моделювання.

Зазначимо, що результати даної статті були анонсовані в [19, 20].

Висновки

Таким чином, результати теоретичного обґрунтування запропонованого алгоритму та обчислювального експерименту дають підстави зробити висновок , що алгоритм може добре доповнювати існуючі методи розв'язання жорстких задач в сенсі точності та швидкодії. Це обумовлено тим, що розв'язок має аналітичний вигляд, який дає найкращі наближення в рівномірній метриці на відрізках розбиття, тобто даний алгоритм є алгоритмом без насичення точності.

Література

1. Дзядик В. К. Про ефективну побудову многочленів, які здійснюють близьке до найкращого наближення функцій e^x, $\sin x$ та інші / В. К. Дзядик // Укр. мат. журн., — 1973. — Т. 25, № 4. — С. 435– 453.
2. Дзядык В. К. Апроксимационный метод приближения линейных дифференциальных уравнений / В. К. Дзядык // Изв. АН СССР сер. матем. — 1974. — Т. 38, № 4. — С. 938–967.
3. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. — Киев: Наукова думка, 1988. — 387 с.
4. Гаврилюк И. П. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности / И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2004. — 500 с.
5. Кутнів М. В. Компактні різницеві схеми високого порядку точності / М. В. Кутнів, В. Л. Макаров // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 36–47.
6. Gear C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations / C. W. Gear. — New Jersey: Prentice-Hall, 1971. — 256 p.
7. Ракитский Ю. В., Численные методы решения жестких задач / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. — М.: Наука, 1979. — 210 с.
8. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие / В. В. Иванов. — Киев: Наукова думка, 1986. — 584 с.
9. Чуа Л. О. Машинный анализ электронных схем / Л. О. Чуа, Пен-Мин Лин. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
10. Гладкий С. Л. Интеллектуальное моделирование физических проблем / С. Л. Гладкий, Н. А. Степанов, Л. Н. Ясницкий; Под ред. Л. Н. Ясницкого. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. — 200 с.
11. Захаров А. Ю. Информация о работах по жестким системам дифференциальных уравнений / А. Ю. Захаров, Н. Н. Калиткин // Минск: Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 10. — С. 1831–1832.
12. Кальянова Н. Л. LSODA — пакет программ для численного решения жестких и нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим выбором метода интегрирования / Н. Л. Кальянова, А. Ю. Захаров Ю. Е. Маркачев. — М.: Наука, АН СССР, Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша. — 1988. — 30 с.
13. Еленин Г. Г. Нанотехнологии и вычислительная математика / Г. Г. Еленин // В кн. Мат. мод. в нанотехнологиях и структурах. Тр науч. сем. — М.: МИФИ, 2001. — 116 с.
14. Кирилаха Н. Г. Математична модель еволюційного процесу зі змінними параметрами / Н. Г. Кирилаха // Вісник Черкаського університету. Сер. Прикладна математика. Інформатика. — 2010. — Вип. 172. — С. 39–45.
15. Физико-химия наноматериалов и супрамолекулярных структур в 2 т. / Под ред. А. П. Шпака, П. П. Горбик. — К.: Наук. Думка, 2007. — Т. 2 — 440 с.

16. Биленко В. И. Аппроксимационный метод для решения интегральных уравнений типа Вольтерра-Урысона с полиномиальными нелинейностями / В. И. Биленко // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1989. — Т. 29, № 10. — С. 1577–1581.
17. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. / С. Н. Бернштейн. — Л.-М.: ГРОТЛ, 1937. — 205 с.
18. Суетин П. К. Классические ортогональне многочлены / П. К. Суетин. — Mocitem ква: Наука, 1976. — 328 с.
19. Bilenko V. I. Integro-approximation method for the solution of stiff systems of ODE-s with algebraic nonlinearities / V. I. Bilenko, I. D. Dobra // Abstracts 5th conference of numerical methods. — Miskolc, 1990. — P. 8–9.
20. Біленко В. І. Чисельно-аналітичний метод без насичення точності для наближення розв'язків жорстких задач / В. І. Біленко, А. І. Дерієнко // Міжнародна конференція "Обчислювана та прикладна математика", присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Матеріали конференції. — К., 2012. — С. 32.

Кременчуцький Університет Економіки, Інформаційних Технологій і Управління, 39630 м. Кременчук, вул. Пролетарська, 24/37 Україна.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 39630 м.Кременчук, вул.Першотравнева 20, Україна.

Надійшла 4.06.2013