Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРОГРАММНАЯ НАДЕЖНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Ю. Гончаренко

Резюме. Исследование надежности вычислительных систем, представимых конечными графами, включает в себя как классические задачи теории вероятностей (наработка на отказ, среднее время восстановления и т.д.), так и применение алгоритмов и программ, обеспечивающих работоспособность системы в случае отказов. В работе представлена математическая модель отказов. Исследованы условия, при которых реальная задача на частично отказавшем оборудовании приводит к решению, ”близкому” к истинному.

Введение

Доступность вычислительных кластеров ставит вопрос о надежности аппаратных и программных средств и достоверности получаемых результатов. Рассмотрим модельный пример.

Решить систему линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сведем задачу к поиску неподвижной точки отображения

$$A\bar{x} = \bar{b} \;\; \Leftrightarrow \;\; \overline{x} = (I - A)\overline{x} + \bar{b}.$$

Для отыскания неподвижной точки организуем итерационный процесс

$$\overline{x}(n) = (I - A)\overline{x}(n-1) + \bar{b}, n \in N \tag{1}$$

с начальным приближением $\overline{x}(0) = \bar{b} = (1; 1)$.

Собственными числами матрицы $(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ будут $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Отображение $F(\overline{x}) = (I - A)\overline{x} + \bar{b}$ является сжимающим, а итерационный процесс сходится [1].

Для реализации процесса (1) рассмотрим вычислительную систему, состоящую из двух процессоров P_1 и P_2, связанных дуплексным каналом связи.

$$\mathbf{P_1} \quad x_1(n) = -\frac{1}{4}x_2(n-1) + 1, \quad \mathbf{P_2} \quad x_2(n) = x_1(n-1) + x_2(n-1) + 1,$$

где $x_1(n)$, $x_2(n)$ — первая и вторая координаты n-й итерации, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ — начальные приближения.

При этом каждая из вычислительных машин системы прекращает свою работу, если расстояние между соседними итерациями составляет 0,01. Что соответствует критерию остановки итерационного процесса в норме $\|\overline{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. В векторной форме $||\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}|| = ||(I-A)^n\bar{b}||$, процесс останавливается при $\|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| < 0.01$. Одиннадцатая итерация дает $\bar{x}_{11} - \bar{x}_{10} = (\frac{31}{4096}; \frac{68}{4096})^T$, т.е. $|x_1(11) - x_1(10)| = 0,00756... < 0,01$, а $|x_2(11) - x_2(10)| = 0,0166... > 0,01$.

Распределенный критерий завершения работы на 11-й итерации остановит работу первой машины и продолжает работу второй. Обозначим $\bar{x}(11) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, тогда вторая координата, вычисляемая второй машиной при фиксированной первой координате, будет $x_2(n) = (n-11)(a-1)+b$. Что приводит к расходящейся последовательности.

Аналогичная ситуация складывается, если первая машина выйдет из строя. Тогда вторая будет продолжать итерировать вторую координату, приводя к расходящейся последовательности. Попытка использовать для критерия завершения нормы типа $\|\bar{x}\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ требует опроса всех процессоров для их вычисления, а значит, линейного роста времени обмена по отношению к размерности решаемой задачи, что в силу закона Амдала [2] быстро нивелирует приращение производительности.

Вероятностным задачам повышения надежности вычислительных систем, представимых конечными графами за счет резервирования, будет посвящена отдельная работа. Ниже рассматривается задача о "правдоподобии" полуаемых результатов в случае выхода из строя одного из процессоров, либо "досрочной" остановки вычислительного процесса в случае достижения необходимой точности по некоторым координатам.

Постановка задачи

Пусть $p \subset \{1, 2, 3, ..., n\}$ — некоторое подмножество номеров координат (интерпретируемое, как множество работоспособных машин). Рассмотрим оператор ортогонального проектирования P на подпространство с координатами, номера которых принадлежат множеству p, действующий по правилу

$$P\overline{x} = \begin{cases} x_i & \text{при } x \in p, \\ 0 & \text{при } x \notin p. \end{cases} \tag{2}$$

Матрицей линейного оператора P будет диагональная квадратная матрица с единицами на тех местах главной диагонали, номера которых попадают в множество I, и нулевыми остальными элементами ($a_{ii} = 1$, если $i \in p$ и $a_{ij} = 0$, если $i \notin p$ или $i \neq j$). Обозначим через $Q = I - P$ оператор ортогонального проектирования на дополнительное подпространство (указывает на множество отказавших машин).

Пусть $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Спрашивается: каким условием должно удовлетворять исходное отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, чтобы для любого вектора $\bar{b}$ и каждого проектора P вида (2) отображение

$$P(F(P\overline{x} + Q\bar{b})) + Q\bar{b} \tag{3}$$

было сжимающим? В частности, если $p = \{1, 2, 3, ..., n\}$, то $P = I$ и отображение F должно быть сжимающим. Рассмотрим менее тривиальный случай, когда p является собственным подмножеством множества $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^n_+$ — конус в $\mathbb{R}^n$ векторов с неотрицательными координатами. Зададим в нем отношение частичного упорядочивания следующим образом: $\bar{x}$, $\bar{y} \in R^+_n$ сравнимы, если для всех $i = \overline{1,n}$ $\quad x_i \geq y_i$, обозначается $\bar{x} \geq \bar{y}$, либо $x_i \leq y_i$, обозначается $\bar{x} \leq \bar{y}$. Пусть отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n_+$ каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие вектор $|\bar{x}|$, составленный из абсолютных величин координат вектора $\bar{x}$,

$$|\bar{x}| = \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Такое отображение называется векторной нормой, а значение отображения на векторе $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ — векторной нормой вектора $\bar{x}$.

По отношению к частичному упорядочиванию в $\mathbb{R}^n$ векторная норма обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} 1)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\ |\bar{x}| \geq \bar{0} \text{ и } |\bar{x}| = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{0}, \\ 2)\ |\alpha \bar{x}| = |\alpha\,\|\,\bar{x}| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in R^1, \\ 3)\ |\bar{x} + y| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{4}$$

Аналогично, на множестве квадратных матриц M_n можно выделить конус M^+_n неотрицательных матриц, т.е. матриц с неотрицательными элементами и ввести на нем отношение частичного упорядочивания, говоря, что матрицы A, $B \in M^+_n$ находятся в отношении $A \leq B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$ или в отношении $A \geq B$, если $a_{ij} \geq b_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$.

Отображение, ставящее каждой матрице A в соответствие матрицу $|A| = \|\,|a_{ij}|\,\|^m_{ij=1}$, составленную из абсолютных величин ее элементов, также удовлетворяет свойствам, аналогичным (4)[3,4].

Непосредственно проверяется, что если:

$$\begin{aligned} &1)\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad |\bar{x}| > |\bar{y}|, \quad \text{то} \quad |A|\,|\bar{x}| \geq |A|\,|\bar{y}|, \\ &2)\ A, B \in M_n \quad \text{и} \quad |A| > |B|, \quad \text{то} \quad |A|\,|\bar{x}| \geq |B|\,|\bar{x}|. \end{aligned} \tag{5}$$

Центральным результатом в этой области является теорема Перрона, обобщенная Г. Фробениусом.

Теорема 1. *(Теорема Перрона). Положительная квадратная матрица A имеет вещественное и положительное собственное значение λ, алгебраической кратности 1, которое превосходит модули всех других собственных значений матрицы A. Собственный вектор, соответствующий λ, может быть выбран положительным* [5].

Далее также будет использована следующая теорема.

Теорема 2. *О непрерывной зависимости спектрального радиуса. Спектральный радиус линейного оператора A, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$, непрерывно зависит от коэффициентов его матрицы $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$.*

Доказательство. Это утверждение можно доказать в следствии того, что $\rho(A) = \inf\limits_{||\cdot||} ||A||$ и непрерывной зависимости нормы оператора от коэффициентов его матрицы [6]. Более естественное, но значительно более громоздкое доказательство опирается на непрерывную зависимость корней многочлена от его коэффициентов [7] и того факта, что коэффициенты характеристического многочлена являются целыми функциями от коэффициентов матрицы оператора [6]. □

Лемма 1. *Пусть $A \in M_n^+$ — неотрицательная квадратная матрица. $\rho(A) < 1$ тогда и только тогда, когда существуют такие положительный вектор $\bar{\nu} \in \mathbb{R}_+^n$, $\bar{\nu} > 0$ и скаляр $\omega \in [0, 1)$, что*

$$A\bar{\nu} \leq \omega\bar{\nu}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть ω и $\bar{\nu}$ существуют. Зададим по вектору $\bar{\nu}$ норму в $\mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}\|_\nu \equiv \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{|x_i|}{\nu_i} \mid \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,\ \bar{\nu} = \{\nu_i\}_{i=1}^n \right\}. \tag{7}$$

Вычислим $\|A\|_\nu$. Так как

$$\|A\|_\nu \equiv \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \|A\bar{x}\|_\nu = \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|}{\nu_i} \right\} \right\} \leq$$

$$\leq \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\,|x_j|}{\nu_i} \right\} \right\} = \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\nu_j \frac{|x_i|}{\nu_j}}{\nu_i} \right\} \right\} \leq$$

$$\leq \max_{\|x\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\nu_j}{\nu_i} \right\} \right\} \leq \max_{\|\bar{x}\|_\nu=1} \left\{ \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \frac{\omega\nu_i}{\nu_i} \right\} \right\} = \omega,$$

то $\rho(A) \leq \|A\|_\nu \leq \omega$ [8].

Необходимость. Пусть $\rho(A) < 1$, $t > 0$, A_t — матрица, полученная из A в результате замены всех нулевых элементов матрицы A числом t. Тогда $A \leq A_t$. Как следует из свойств (5), $A|\bar{x}| \leq A_t|x|$. С другой стороны, по теореме о непрерывной зависимости спектрального радиуса, $\rho(A_t)$ является непрерывной функцией t. Поскольку $A_t \to A$ при $t \to 0$, а $\rho(A) < 1$, то существует такое $t > 0$, что $\rho(A_t) < 1$. Выберем $\omega = \rho(A_t)$. Поскольку $A_t > 0$, то в соответствии с теоремой Перрона существует такой положительный вектор $\bar{\nu} > \bar{0}$, соответствующий собственному значению ω, что $A_t\bar{\nu} = \omega\bar{\nu}$ и, следовательно, с учетом свойств (5), $A\bar{\nu} \leq A_t\bar{\nu} = \omega\bar{\nu}$. □

Основной результат

Отображение $F : D \to \mathbb{R}^n$ назовем липшицевым с линейной мажорантой A, если существует такая неотрицательная матрица $A \in M_n^+$, что $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in D$ выполняется неравенство

$$|Fx + Fy| \leq A\,|\bar{x} - \bar{y}|. \tag{8}$$

Если к тому же $\rho(A) < 1$, то F называется сжимающим отображением с линейной мажорантой A или A-сжатием [4].

Теорема 3. *Для того, чтобы для любого оператора ортогонального проектирования P и каждого вектора $\overline{b}$ отображение*

$$PF(P\overline{x} + Q\overline{b}) + Q\overline{b}$$

было сжимающим, достаточно, чтобы отображение F было A-сжатием.

Доказательство. Рассмотрим цепочку неравенств:

$$|PF(P\overline{x}+Q\overline{b})+Q\overline{b}-PF(P\overline{x}+Q\overline{b})-Q\overline{b}| = |P(F(P\overline{x}+Q\overline{b})-F(P\overline{y}+Q\overline{b}))| \leq$$
$$\leq A|P\overline{x} + Q\overline{b} - P\overline{y} - Qb| \leq A|P\overline{x} - P\overline{b}| \leq A|\overline{x} - \overline{y}|.$$

Тогда, согласно лемме 1, по оператору A найдется такая норма вида (7), что $\|A\|_\nu < 1$. Норма вида $\|.\|_\nu$ зависит от абсолютных величин координат векторов, а значит, является монотонной в том смысле, что для всех $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ из неравенства $|x| < |y|$ следует неравенство $\|\overline{x}\|_\nu < \|\overline{y}\|_\nu$ [6].

Таким образом,

$$\|PF(P\overline{x} + Q\overline{b}) + Q\overline{b} - PF(P\overline{x} + Q\overline{b}) - Q\overline{b}\|_\nu \leq \omega\|\overline{x} - \overline{y}\|_\nu,$$

где $\omega < 1$. Следовательно отображение сжимающее. □

Выводы

С формальной точки зрения отказ оборудования и досрочное завершение процесса эквивалентны для вычислительного процесса. Для сохранения надежности функционирования систем по отношению к отказам ее элементов или неравномерному прекращению обновления координат вектора итераций следует использовать отображения, являющиеся A-сжатиями.

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1. / Н.С. Бахвалов. — М: Наука, 1975. — 632 с.
2. Amdahl, G. The validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities./ G. Amdahl // AFIPS Spring Joint Computer Conference, April 1967 / Atlantic City, USA. — 1967. — P. 483–485.
3. Приближенное решение операторных уравнений. / [М.А. Красносельский и др.]; под ред. Г.А. Безсметных. — М: Наука, 1969. — 456 с.

4. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. — М: Мир, 1975. — 558 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. — М: Наука, 1967. — 576 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. / П. Ланкастер. — М: Наука, 1978. — 280 с.
7. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. / А.М. Островский. — М: Издательство иностранной литературы, 1963. — 219 с.
8. Baudet G.M. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors. / G.M. Baudet // J. ACM. — 1978. — 25. — P. 226–244.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 05.03.2013