Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6:531:537

ГРУППА ЛИ КАК КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ ПРОСТОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. С. Зуб

Резюме. В статье дано введение в теоретико-групповые методы для гамильтоновой динамики магнитно взаимодействующих тел. Конфигурационные и фазовые пространства для гамильтоновой динамики магнитно взаимодейтвующих твердых тел тесно связаны с группами Ли $SO(3)$ и $SE(3)$. В некоторых случаях группа Ли непосредственно является конфигурационным пространством простой механической системы, описывающей движение магнитного тела. При этом не все преобразования группы являются симметриями динамической системы. Поэтому соответствующая пуассонова структура не является структурой Ли-Пуассона, которой посвящены большинство работ по применению групп Ли в механике. В данной работе рассматривается применение аппарата дифференциальной геометрии для описания структур гамильтоновой динамики на фазовом пространстве группы Ли.

Введение

Как показано в работах [1, 2, 3, 4], гамильтонов формализм является удобным инструментом для исследования динамики магнитно взаимодейтвующих твердых тел.

Необходимо отметить, что исследование устойчивости в гамильтоновых системах сталкивается с рядом специфических трудностей [5, 6]. Для гамильтоновых систем с симметриями применение теоретико-групповых методов позволяет преодолеть указанные трудности в ряде интересных случаев. В частности, это позволило обнаружить возможность устойчивых орбитальных движений в магнитных системах [2, 3, 4].

Так как имеются аргументы математического характера (теорема Ирншоу [7], проблема «$1/r^3$» [8], которые ставят под сомнения саму возможность существования устойчивых статических и динамических равновесий в магнитных системах, то возникает необходимость строгого аналитического доказательства устойчивости.

Конфигурационные и фазовые пространства для гамильтоновой динамики магнитно взаимодейтвующих твердых тел тесно связаны с группами Ли $SO(3)$ и $SE(3)$. В некоторых случаях группа Ли непосредственно является конфигурационным пространством простой механической системы [9], [10, с. 341], [6, с. 45], описывающей движение магнитного тела.

Потенциальная энергия магнитного взаимодействия, как правило, не является инвариантной относительно всех преобразований группы, которая является конфигурационным пространством системы. Поэтому фазовое пространство системы не допускает редукции к структуре Ли-Пуассона, которой посвящена большая часть исследований по применению групп Ли в механике.

Прежде чем исследовать конкретные группы Ли, связанные с динамикой твердых тел, имеет смысл рассмотреть общую дифференциально-геометрическую технику для описания структур гамильтоновой динамики на фазовом пространстве группы Ли.

1. Математические обозначения

Обозначения дифференциально-геометрической техники в основном соответствуют обозначениям книги [11, с. 119–142].

Если Q — дифференцируемое многообразие, то $T(Q)$ — его касательное расслоение; если $\varphi : P \to Q$ — дифференцируемое отображение многообразия P в многообразие Q, то $T_\varphi : T(P) \to T(Q)$ — его производное (касательное) отображение, а $T^*\varphi$ — сопряженное к нему отображение, т.е. для $\xi \in T_a(P)$ и $\beta \in T^*_a(Q)$ выполняется $\langle T^*_a\varphi \cdot \beta, \xi_a\rangle = \langle \beta, T_a\varphi \cdot \xi\rangle$; $T_*\varphi$ — *Cotangent Lift* диффеоморфизма φ: $T_{*a}\varphi = (T^*_a\varphi)^{-1}$.

Пусть

$p(t) \in P$ — кривая на многообразии P, а $q(t) = \varphi \circ p(t) \in Q$ — ее образ на многообразии Q, тогда $\frac{dq}{dt} = T_\varphi \cdot \frac{dp}{dt}$;

в общем случае символ «$\cdot$» (contraction) будет употребляться для обозначения действия линейного оператора A на вектор ξ, т.е. $A\xi = A[\xi] = A \cdot \xi$ и как свертка ковектора с вектором: $\langle \alpha, \xi\rangle = \alpha \cdot \xi = \alpha[\xi]$ — спаривание векторов и ковекторов ($\xi \in T_a(Q), \alpha \in T^*_a(Q)$);

G — связная группа Ли, (a, b, g, h — ее элементы);

$T(G) \xrightarrow{\tau_G} G$ — касательное расслоение группы G;

$T^*(G) \xrightarrow{\pi_G} G$ — кокасательное расслоение группы G;

$\boldsymbol{g} = T_e(G)$ — алгебра Ли группы G (ξ, η, ζ — ее элементы);

$\boldsymbol{g}^* = T^*_e(G)$ — пространство, дуальное к $\boldsymbol{g}$ (μ, α — его элементы);

ξ^L — левоинвариантное векторное поле на G такое, что $\xi^L(e) = \xi \in \boldsymbol{g}$;

ξ^R — правоинвариантное векторное поле на G такое, что $\xi^R(e) = \xi \in \boldsymbol{g}$;

$\tilde{\xi}^L$ — *Cotangent Lift* левоинвариантного векторного поля ξ^L;

$\tilde{\xi}^R$ — *Cotangent Lift* правоинвариантного векторного поля ξ^R;

α_L — левоинвариантная 1-форма на G такая, что $\alpha_L(e) = \alpha \in \boldsymbol{g}^*$;

$\{e_i\}$ — выбранный базис в $\boldsymbol{g}$ ($e_i \in \boldsymbol{g}$);

$\{e^i\}$ — соответствующий кобазис в $\boldsymbol{g}^*$ ($e^i \in \boldsymbol{g}^*$, $\langle e^i, e_k\rangle = \delta^i_k$);

$\boldsymbol{\epsilon} = e_i e^i_L$ — векторозначная 1-форма Маурера-Картана на группе G ($T(G) \xrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{g}$);

$\boldsymbol{J}_R$ — отображение момента, соответствуещее действию группы G на себе правыми сдвигами ($T^*(G) \xrightarrow{\boldsymbol{J}_R} \boldsymbol{g}^*$);

$\boldsymbol{J}_L$ — отображение момента, соответствуещее действию группы G на себе левыми сдвигами ($T^*(G) \xrightarrow{\boldsymbol{J}_L} \boldsymbol{g}^*$).

2. Левая тривиализация для расслоений над группой Ли

По определению (см. [12, (1), с. 91]) *локально* каждое расслоение тривиализуется, т.е. некоторая «цилиндрическая» окрестность любой точки представляется в виде *прямого произведения* проекции этой окрестности на базу расслоения и стандартного слоя расслоения.

Но касательное и кокасательное расслоение произвольной группы Ли допускают не только локальные, но и *глобальные* тривиализации, карты (см. [12, (1), с. 91]) которых назовем λ_t и λ_{ct} соответственно.

Пусть $e_i \in \boldsymbol{g}$ — базис в алгебре Ли группы G, а $e^i \in \boldsymbol{g}^*$ — соответствующий кобазис.

Обозначим $\boldsymbol{\epsilon} = e_i e^i_L$ — (векторозначную) 1-форму Маурера-Картана, тогда левая тривиализация касательного (λ_t) и кокасательного (λ_{ct}) расслоений определяется следующими отображениями:

$$\begin{cases} \lambda_t = \tau_G \times \boldsymbol{\epsilon} : T(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}, \\ \lambda_{ct} = \pi_G \times \boldsymbol{J}_R : T^*(G) \mapsto G \times \boldsymbol{g}^*, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J}_R$ соответствует действию группы G на себе правыми сдвигами;

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R : T^*(G) \mapsto \boldsymbol{g}^*, \quad \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) = T^*_e L_a \cdot \alpha_a, \\ \boldsymbol{J}_L : T^*(G) \mapsto \boldsymbol{g}^*, \quad \boldsymbol{J}_L(\alpha_a) = T^*_e R_a \cdot \alpha_a \end{cases} \tag{2}$$

при этом

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) = \mu \longleftrightarrow \alpha_a = \mu_L(a), \\ \boldsymbol{J}_L(\alpha_a) = \mu \longleftrightarrow \alpha_a = \mu_R(a). \end{cases} \tag{2a}$$

В определениях 1-формы Маурера-Картана $\boldsymbol{\epsilon}$ и отображения момента $\boldsymbol{J}_R$ наблюдается высокая степень симметрии:

$$\begin{cases} \langle \mu, \boldsymbol{\epsilon}(\xi_a) \rangle = \langle \mu_L(a), \xi_a \rangle, \\ \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle. \end{cases} \tag{3}$$

2-е из выражений (3) можно интерпретировать так: компоненты момента $\boldsymbol{J}_R(\alpha_a)_i = \boldsymbol{J}_R(\alpha_a) \cdot e_i$ есть компоненты ковектора α_a в кобазисе e^i_L 1-форм Маурера-Картана.

Пусть вектор $\xi \in T(T^*(G))$, тогда в представлении левой тривиализации с учетом (1) можно условиться записывать $\xi \in T(G) \times \boldsymbol{g}^* \times \boldsymbol{g}^*$ и даже $\xi \in G \times \boldsymbol{g}^* \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g}^*$ без явного указания изоморфизмов соответствующих пространств. В последнем представлении первые 2 сомножителя представляют фазовое пространство (кокасательное расслоение), т.е. точку закрепления вектора, а последние 2 сомножителя представляют компоненты вектора.

Итак, точка закрепления вектора — это пара $(a, \alpha) \in G \times \boldsymbol{g}^*$, а компоненты вектора — это пара $(\xi_{(h)}, \xi^{(v)}) \in \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g}^*$.

Иначе говоря, если $\xi \in T_{\alpha_a}(T^*(G))$, то

$$\begin{cases} \xi_{(h)} = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi) \in \boldsymbol{g}, \\ \xi^{(v)} = T\boldsymbol{J}_R \cdot \xi \in \boldsymbol{g}^*. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим некоторую кривую $\alpha(t)$ на $T^*(G)$. Ее проекцией на G будет $a(t) = \pi_G(\alpha(t))$. Если кривая $\alpha(t)$ полностью расположена в одном слое $T^*(G)$, т.е. $a(t) = a = const$, то 1-я строка (4) дает $\xi_{(h)} = 0$. Если же $\boldsymbol{J}_R(\alpha(t)) = \mu = const$, то $\alpha(t) = \mu_L(a(t))$, т.е. кривая $\alpha(t)$ полностью определяется своей проекцией $a(t)$ на G. В этом случае $\xi^{(v)} = 0$.

Из (4) также имеем (где, как и ранее, $\pi_G(\alpha) = a$)

$$\xi_{(h)}(\alpha) = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi_\alpha) = e_i \pi_G^* e_L^i(\xi_\alpha) = e_i e_L^i(T\pi_G[\xi_\alpha]) =$$
$$= e_i e_L^i((TL_a \circ TL_{a^{-1}}) \cdot T\pi_G[\xi_\alpha]) = e_i e_L^i(TL_a \cdot (TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha]) =$$
$$= e_i e^i((TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha]) = (TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G)[\xi_\alpha],$$

т.е.

$$\xi_{(h)}(\alpha) = \pi_G^* \boldsymbol{\epsilon}(\xi_\alpha) = TL_{a^{-1}} \cdot T\pi_G[\xi_\alpha]. \tag{5}$$

Введем координатные функции

$$\mu_i(\alpha_a) = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), e_i \rangle. \tag{6}$$

Тогда

$$d\mu_i(\xi) = \xi_i^{(v)}. \tag{7}$$

Дифференциал функции на $T^*(G)$ следует разложить в соответствии с разложением вектора, касательного к $T^*(G)$ расслоения.

В соответствии с разложением (4) запишем

$$\partial_\xi F = dF \cdot \xi = \delta_g F \cdot \xi_{(h)} + \delta_\mu F \cdot \xi^{(v)}, \quad \xi \in T_{\alpha_a}(T^*(G)). \tag{8}$$

Соотношение (8), фактически, является определением «дифференциалов» δ_g и δ_μ, причем последний является настоящим частным дифференциалом.

Из (8) также следует, что

$$\delta_g F \in \boldsymbol{g}^*; \quad \delta_\mu F \in \boldsymbol{g}. \tag{9}$$

Разберем 2 частных случая.

1. Рассмотрим функции вида $F \circ \pi_G$.

Из (5) выводим

$$d(F \circ \pi_G)[\xi_\alpha] = dF \cdot T\pi_G[\xi_\alpha] =$$
$$= d(F \circ L_a)[(TL_{a^{-1}} \circ T\pi_G) \cdot \xi_\alpha] = d(F \circ L_a)[\xi_{(h)}(\alpha)] = \delta_g F \cdot \xi_{(h)}(\alpha),$$

т.е.

$$d(F \circ \pi_G)[\xi_\alpha] = \delta_g(F \circ \pi_G) \cdot \xi_{(h)}(\alpha) \longrightarrow \delta_\mu(F \circ \pi_G) = 0. \tag{10}$$

Заметим, что дифференциал функции $F \circ \pi_G$, являясь линейной формой на касательных к G векторах, тем самым является элементом $T^*(G)$, т.е. $d_{|\alpha}(F \circ \pi_G) \in T^*_{|\alpha}(G)$. Тогда

$$\delta_g F \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = dF \cdot T_e L_a[\xi_{(h)}(\alpha)] = T_e^* L_a[dF_{|a}] \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = \boldsymbol{J}_R(dF_{|a}) \cdot \xi_{(h)}(\alpha),$$

т.е.

$$\begin{cases} \delta_\mu (F \circ \pi_G) = 0, \\ \delta_g (F \circ \pi_G)_{|\alpha} = \boldsymbol{J}_R (dF_{|a}). \end{cases} \tag{11}$$

2. Рассмотрим функции, зависящие в представлении левой тривиализации только от переменных μ на $\boldsymbol{g}^*$. Множество таких функций, очевидно, совпадает с множеством левоинвариантных функций. Тогда из (7), (8) получаем

$$dF_L \cdot \xi = \frac{\partial F_L}{\partial \mu_i} d\mu_i(\xi), \tag{12}$$

$$\begin{cases} \delta_g F_L = 0, \\ \delta_\mu F_L = \frac{\partial F_L}{\partial \mu_i} e_i. \end{cases} \tag{12a}$$

Заметим, что при теоретико-групповом описании механики твердого тела представление левой тривиализации соответствует системе координат, связанной с телом см. [10, 11], тогда как представление правой тривиализации соответствует инерциальной системе координат.

Представление правой тривиализации может быть рассмотрено совершенно аналогично левой тривиализации. При этом можно пользоваться следующей простой связью этих представлений:

$$\begin{cases} \varrho_t \circ \lambda_t^{-1}(a, \xi) = (a, Ad_a[\xi]), \\ \varrho_{ct} \circ \lambda_{ct}^{-1}(a, \mu) = (a, Ad^*_{a^{-1}}[\mu]). \end{cases} \tag{13}$$

3. Левое и правое действие в представлении левой тривиализации

Группа Ли действует на себе, как на конфигурационном пространстве, левыми и правыми сдвигами. Эти преобразования расширяются (поднимаются) на касательное и кокасательное расслоения следующим образом:

Tangent Lift определяется при левой тривиализации следующими формулами:

$$\begin{cases} TL_b \mapsto L_b \times id_{\boldsymbol{g}}, \\ TR_b \mapsto R_b \times Ad_{b^{-1}}, \end{cases} \tag{14}$$

Cotangent Lift — следующими формулами:

$$\begin{cases} T_* L_b \mapsto L_b \times id^*_{\boldsymbol{g}}, \\ T_* R_{b^{-1}} \mapsto R_{b^{-1}} \times Ad^*_{b^{-1}}. \end{cases} \tag{15}$$

Представляет интерес найти в этом представлении выражения для лево- и правоинвариантных полей.

Для левоинвариантных полей получаем

$$\begin{cases} \zeta'^L_{|(a,\xi)} = (\zeta, -ad_\zeta \xi), \\ \tilde{\zeta}^L_{|(a,\mu)} = (\zeta, ad^*_\zeta \mu). \end{cases} \tag{16}$$

Для правоинвариантных полей получаем

$$\begin{cases} \zeta'^R_{|(a,\xi)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0), \\ \tilde{\zeta}^R_{|(a,\mu)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0), \end{cases} \tag{17}$$

здесь ζ' — продолжение (Tangent Lift) лево-/правоинвариантного поля с группы G на $T(G)$, а $\tilde{\zeta}$ — продолжение (Cotangent Lift) лево-/правоинвариантного поля с группы G на $T^*(G)$.

Левоинвариантные поля являются генераторами **правых** сдвигов на $T^*(G)$, тогда как **право**инвариантные поля являются генераторами **левых** сдвигов на $T^*(G)$.

Тогда, если F_L — левоинвариантная функция, то $\partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0$ и, следовательно, как и в (12a)

$$\partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0 \longrightarrow \delta_g F \cdot Ad_{a^{-1}}[\xi] = 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{g} \longrightarrow \delta_g F = 0. \tag{18}$$

Для правоинвариантных функций

$$\partial_{\tilde{\xi}^L} F_R = 0 \longrightarrow \delta_g F_R \cdot \xi + \langle ad^*_\xi[\mu], \delta_\mu F_R \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{g} \tag{19}$$

$$\longrightarrow \delta_g F = ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu].$$

4. Отображение момента для действия группы на себе

Если группа действует на многообразие, то это действие, как было описано выше, продолжается (Cotangent Lift) на кокасательное расслоение к этому многообразию.

На каждом кокасательном расслоении существует каноническая 1-форма Θ (форма Лиувилля), внешний дифференциал которой определяет каноническую симплектическую структуру $\Omega = -d\Theta$ на кокасательном расслоении (см. [11, п.3, с. 377], а также формулы (11.3.1-4) там же).

При помощи формы Лиувилля определяется выражение для *отображения момента* на кокасательном расслоении многообразия:

$$\langle \boldsymbol{J}(z), \xi \rangle = (i_{\xi_P} \Theta)(z) = \Theta(\xi_P(z)). \tag{20}$$

В карте левой тривиализации λ_{ct} имеем для действия группы на себе левыми сдвигами такие генераторы (которые являются правоинвариантными полями):

$$\xi_{P|(a,\mu)} = (\xi^R(a), 0) \tag{21}$$

соответственно

$$\begin{cases} \xi_{P(h)} = \boldsymbol{\epsilon}(\xi^R(a)) = Ad_{a^{-1}}[\xi], \\ \xi_P^{(v)} = T\boldsymbol{J}_R \cdot \xi = 0. \end{cases} \tag{21a}$$

Используя выражение для формы Лиувилля в карте λ_{ct} (см. следующий раздел), получим

$$\langle \boldsymbol{J}_L(z), \xi \rangle = \Theta_{|(a,\mu)}(\xi_P) = \langle \mu, Ad_{a^{-1}}[\xi] \rangle = \langle Ad^*_{a^{-1}} \mu, \xi \rangle,$$

т.е.

$$\boldsymbol{J}_L(a, \mu) = Ad^*_{a^{-1}} \mu. \tag{22}$$

В карте левой тривиализации λ_{ct} для действия группы на себе *правыми* сдвигами генераторами будут левовоинвариантные поля:

$$\xi_{P|(a,\mu)} = (\xi_a^L, ad^*_\xi \mu) \tag{23}$$

соответственно

$$\begin{cases} \xi_{P(h)} = \boldsymbol{\epsilon}(\xi^L(a)) = \xi, \\ \xi_P^{(v)} = ad^*_\xi \mu. \end{cases} \tag{23a}$$

Поэтому

$$\langle \boldsymbol{J}_R(z), \xi \rangle = \Theta_{|(a,\mu)}(\xi_P) = \langle \mu, \xi \rangle,$$

т.е.

$$\boldsymbol{J}_R(a,\mu) = \mu. \tag{24}$$

Итак, для *отображения момента*, соответствующих левым и правым сдвигам, получаем выражения

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_R(a,\mu) = \mu, \\ \boldsymbol{J}_L(a,\mu) = Ad^*_{a^{-1}}[\mu]. \end{cases} \tag{25}$$

5. Симплектическая структура на $T^*(G)$

На $P = T^*(G)$ существует каноническая симплектическая структура, основанная на форме Лиувилля Θ. Рассмотрим ее в представлении левой тривиализации кокасательного к G расслоения.

$$\Omega = -d\Theta. \tag{26}$$

Для любой 1-формы β на G обозначим

$$\bar{\beta} = \pi_G^* \beta. \tag{27}$$

Тогда в карте λ_{ct} имеем

$$\Theta_{|(a,\mu)} = \mu_i \pi_G^* e^i_{L|a} = \pi_G^* \mu_L(a) = \bar{\mu}_L(a), \quad a \in G, \mu \in \boldsymbol{g}^*, \tag{28}$$

1-формы Маурера-Картана e^i_L удовлетворяют структурным уравнениям [12, (4), с. 134]

$$de^i_L = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk} e^j_L \wedge e^k_L \longrightarrow d\bar{e}^i_L = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk} \bar{e}^j_L \wedge \bar{e}^k_L, \tag{29}$$

поэтому

$$\Omega = -d\Theta = \bar{e}^i_L \wedge d\mu_i + \frac{1}{2} \mu_i c^i{}_{jk} \bar{e}^j_L \wedge \bar{e}^k_L. \tag{30}$$

Имеет место соотношение

$$ad^*_\xi \mu = \mu_i c^i{}_{jk} \xi^j e^k. \tag{31}$$

Т.о.

$$i_\xi \Omega = \xi^i_{(h)} d\mu_i - \xi^{(v)}_i \bar{e}^i_L + (ad^*_{\xi_{(h)}} \mu)_L \tag{32}$$

или

$$i_\xi \Omega = \xi^i_{(h)} d\mu_i - \xi^{(v)}_L + (ad^*_{\xi_{(h)}} \mu)_L. \tag{32a}$$

Отсюда

$$\Omega(\xi, \eta) = \langle \eta^{(v)}, \xi_{(h)} \rangle - \langle \xi^{(v)}, \eta_{(h)} \rangle + \langle \mu, [\xi_{(h)}, \eta_{(h)}] \rangle, \tag{33}$$

$$\Omega(\xi,\eta)=\eta^{(v)}[\xi_{(h)}]-\xi^{(v)}[\eta_{(h)}]+\mu([\xi_{(h)},\eta_{(h)}]), \tag{33a}$$

$$\Omega(\xi,\eta)=\eta^{(v)}\cdot\xi_{(h)}-\xi^{(v)}\cdot\eta_{(h)}+\mu\cdot[\xi_{(h)},\eta_{(h)}]. \tag{33b}$$

Этот результат с точностью до обозначений совпадает с п. (ii) предложения [10, п. 4.4.2, с. 316].

6. Скобки Пуассона в представлении левой тривиализации

По определению гамильтонова поля $\xi=\xi_H$, соответствующего гамильтониану H (см. [11, (5.4.1), с. 153])

$$i_{\xi_H}\Omega=dH\longrightarrow\Omega(\xi_H,\eta)=dH\cdot\eta=\partial_\eta H. \tag{34}$$

Тогда скобки Пуассона (СП) определяется так (см. [11, (5.5.1), с. 156])

$$\{F,H\}(z)=\Omega(\xi_F(z),\xi_H(z)) \tag{35}$$

и выполняются соотношения (см. [11, (5.5.5), с. 158])

$$\{F,H\}=dF\cdot\xi_H=\partial_{\xi_H}F. \tag{36}$$

В соответствии с разложением (4) §3 запишем

$$\partial_\xi F=dF\cdot\xi=\delta_g F\cdot\xi_{(h)}+\delta_\mu F\cdot\xi^{(v)},\quad\forall\xi\in T(T^*(G)) \tag{37}$$
$$\longrightarrow\delta_g F\in\boldsymbol{g}^*,\delta_\mu F\in\boldsymbol{g}.$$

Уравнения (34) имеют вид (см. (33b))

$$\eta^{(v)}\cdot\xi_{(h)}-\xi^{(v)}\cdot\eta_{(h)}+\mu\cdot[\xi_{(h)},\eta_{(h)}]=\delta_g H\cdot\eta_{(h)}+\delta_\mu H\cdot\eta^{(v)},\quad\forall\eta\in T(T^*(G)). \tag{38}$$

Рассмотрим вначале такие η, что $\eta_{(h)}=0$, а затем η такие, что $\eta_{(v)}=0$. В результате получим

$$\begin{cases}\xi_{(h)}=\delta_\mu H,\\ \xi^{(v)}=-\delta_g H+ad^*_{\xi_{(h)}}[\mu].\end{cases} \tag{39}$$

Подставляя (39) в (36), находим

$$\{F,H\}=\delta_g F\cdot\delta_\mu H-\delta_g H\cdot\delta_\mu F-\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle. \tag{40}$$

Выведенная с помощью развитой здесь техники (40) с точностью до обозначений совпадает с малоизвестным выражением [13, (1.13), с. 22].

7. Вывод скобок Ли-Пуассона

Как согласуется выведенная выше скобка Пуассона на группе G с широко известными результатами, в частности, со скобкой Ли-Пуассона на пространстве $\boldsymbol{g}^*$, дуальном к алгебре Ли $\boldsymbol{g}$ группы G [11, (13.1.1), с. 426]?

Итак, для СП на группе G получено выражение

$$\{F,H\}_{|(a,\mu)}=(\delta_g F\cdot\delta_\mu H-\delta_g H\cdot\delta_\mu F-\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle)_{|(a,\mu)}, \tag{41}$$

а формула для скобок Ли-Пуассона имеет вид [11, (13.1.1), с. 426]

$$\{F,H\}_\pm(\mu)=\pm\langle\mu,[\delta_\mu F,\delta_\mu H]\rangle. \tag{42}$$

Знак «+» относится к правоинвариантным функциям, а «−» — к левоинвариантным [11, (13.1.8–9), с. 427].

Придерживаемся прежних обозначений:

$\tilde{\xi}^L$ — *Cotangent Lift* **лево**инвариантного поля ξ^L на группе G, генератор **правых** сдвигов на $T^*(G)$;

$\tilde{\xi}^R$ — *Cotangent Lift* **право**инвариантного поля ξ^R на группе G, генератор **левых** сдвигов на $T^*(G)$.

Как следует из формул (16)–(17)

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}^L_{|(a,\mu)} = (\zeta, ad^*_\xi \mu), \\ \tilde{\zeta}^R_{|(a,\mu)} = (Ad_{a^{-1}}[\zeta], 0). \end{cases} \tag{43}$$

Из формул (18)-(19) следует

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{\xi}^R} F_L = 0 \longrightarrow \delta_g F = 0, \\ \partial_{\tilde{\xi}^L} F_R = 0 \longrightarrow \delta_g F = ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu]. \end{cases} \tag{44}$$

Тогда из (41) и 1-й строки (44) сразу следует

$$\{F_L, H_L\}_{|\mu} = -\langle \mu, [\delta_\mu F, \delta_\mu H] \rangle, \tag{45}$$

что, фактически, совпадает с [11, (13.1.8), с. 427].

Для правоинвариантных функций

$$\{F_R, H_R\}_{|\mu} = \langle ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu], \delta_\mu H_R \rangle - \langle ad^*_{(\delta_\mu F_R)}[\mu], \delta_\mu H_R \rangle + \tag{46}$$
$$+\langle \mu, [\delta_\mu F_R, \delta_\mu H_R] \rangle = \langle \mu, [\delta_\mu F_R, \delta_\mu H_R] \rangle,$$

что, фактически, совпадает с [11, (13.1.9), с. 427].

Рассмотрим СП [11, (12.1.18), с. 395].

В нашем случае следует для начала ограничиться левоинвариантными полями, тогда по определению **momentum function** на [11, с. 391] имеем

$$\Pi(\xi^L)(\alpha_a) = \langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle, \tag{47}$$

а из (3) имеем

$$\langle \alpha_a, \xi^L(a) \rangle = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \mu, \xi \rangle. \tag{47a}$$

Т.о.

$$\Pi(\xi^L)(\alpha_a) = \langle \boldsymbol{J}_R(\alpha_a), \xi \rangle = \langle \mu, \xi \rangle \longrightarrow \delta_\mu \Pi(\xi^L) = \xi. \tag{48}$$

Рассмотрим теперь функции вида $F \circ \pi_G$. Для них из (11) имеем

$$\begin{cases} \delta_\mu (F \circ \pi_G) = 0, \\ \delta_g (F \circ \pi_G)_{|\alpha} = T^*_e L_a [dF_{|a}] \cdot \xi_{(h)}(\alpha) = \boldsymbol{J}_R(dF_{|a}). \end{cases} \tag{49}$$

Тогда из (41) следует, что

$$\{F \circ \pi_G, H \circ \pi_G\} = 0, \tag{50}$$

$$\{F \circ \pi_G, \Pi(\xi^L)\}_{|(a,\mu)} = \delta_g (F \circ \pi_G)_{|(a,\mu)} \cdot \xi = \tag{51}$$
$$= d(F \circ L_a) \cdot \xi = dF \cdot \xi^L(a) = (\partial_{\xi^L} F)_{|a} = (\partial_{\xi^L} F)_{|\pi_G(a,\mu)}.$$

Т.о., получаем, фактически, соотношения [11, (12.1.18), с. 395]

$$\begin{cases} \{F \circ \pi_G, H \circ \pi_G\} = 0, \\ \{\Pi(\xi^L_1), \Pi(\xi^L_2)\} = -\Pi([\xi^L_1, \xi^L_2]), \\ \{F \circ \pi_G, \Pi(\xi^L)\} = (\partial_{\zeta^L} F) \circ \pi_G. \end{cases} \tag{52}$$

Литература

1. Zub S. S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies / S. S. Zub // PoS. — 2008. — V. ACAT08. — P. 116–121.
2. Zub S. S. Research into orbital motion stability in system of two magnetically interacting bodies / S. S. Zub // IntellectualArchive. — 2012. — V. 1, — № 2. — P. 14–24.
3. Grygor'yeva L. Fields institute: Focus program on geometry, mechanics and dynamics / L. Grygor'yeva, J.-P. Ortega, S. Zub. — Toronto, Canada: 2012.
4. Зуб С. С. Орбитрон: Устойчивость орбитального движения магнитного диполя / С. С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — Т. 111, № 1. — С. 113–128.
5. Парс Л. А. Аналитическая динамика / Л. А. Парс. — М.: Наука, 1971. — 636 с.
6. Marsden J. E. Lectures On Mechanics / J. E. Marsden. London Mathematical Society Lecture. — 2nd ed. –— London: Cambridge University Press, 1997. — 233 p.
7. Earnshaw S. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether / S. Earnshaw // Trans. Camb. Phil. Soc. — 1842. — V. 7. — P. 97–112.
8. Гинзбург В. Л. Теория мезона и ядерные силы / В. Л. Гинзбург // Усп. физ. наук. — 1947. — Т. 31, № 2. — С. 174–209.
9. Smale S. Topology and mechanics / S. Smale // Inv. Math. — 1970. — V. I, № 10. — P. 305–331.
10. Abraham R. Foundations of mechanics / R. Abraham, J. E. Marsden. — Addison Wesley, 1978. — 838 p.
11. Marsden J. E. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. — Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1994. — 616 p.
12. Зуланке Р. Дифференциальная геометрия и расслоения / Р. Зуланке, П. Винтген. — М.: Мир, 1975. — 348 с.
13. Карасев М. В. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование / М. В. Карасев, В. П. Маслов. — М.: Наука, 1991. — 365 с.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 22.01.2013