Журнал обчислювальної та прикладної математики 2013, №2(112) Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.86; 339.13.012.432

ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ОЛІГОПОЛІЇ КУРНО-ПУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЇЇ ТОЧКИ РІВНОВАГИ

Н. Л. Іващук, Б. В. Гнатів, І. І. Кавалець

Резюме. У статті розглянуто одну з основних моделей, яка описує поведінку учасників олігополістичного ринку. Побудовано економічну модель олігополії — узагальнену модель Курно-Пу. Введено поняття точки рівноваги Курно. Описано процес дослідження стійкості точки рівноваги побудованої моделі.

Вступ

Олігополія (*oligopoly*) — це структура ринку, при якій в одній галузі домінує невелика кількість конкуруючих фірм, при цьому хоча б одна або дві з них виробляють значну частку продукції даної галузі, а поява нових продавців ускладнена чи неможлива. Як правило, на олігополістичних ринках є від двох до десяти фірм, на які припадає половина чи більше загального обсягу продажів продукту. На таких ринках декілька або й усі фірми у довгостроковому часовому проміжку одержують значні прибутки, оскільки вхідні бар'єри ускладнюють або унеможливлюють вхід фірм-новачків на ринок. Товар на олігополістичному ринку може бути однорідний і неоднорідний. Якщо продається однорідний товар (тобто покупці не мають вибору), то маємо справу з гомогенною олігополією, а якщо різноманітний товар (тобто покупці можуть вибирати згідно зі своїми уподобаннями), то маємо справу з гетерогенною олігополією.

Олігополія є переважаючою формою ринкової структури. До олігополістичних галузей належать автомобільна, сталеплавильна, нафтохімічна, електротехнічна, енергетична, комп'ютерна індустрії та ін. На олігополістичних ринках деякі фірми можуть впливати на формування цін, оскільки охоплюють значну частку продукції у загальній кількості виробленого товару. Продавці на олігополістичному ринку свідомі того, що зміни цін чи обсягів випуску продукції одного з учасників ринку можуть впливати на фінансові результати (в тому числі й на прибутки) усіх без винятку фірм із цієї галузі. Іншими словами, продавці усвідомлюють свою взаємозалежність на даному ринку. Передбачається, що кожна фірма у галузі визнає, що зміна її ціни чи випуску викликає реакцію з боку інших фірм. Реакція, якої очікує одна із фірм-олігополістів від фірм-конкурентів у відповідь на зміни встановленою нею ціни, обсягу випуску чи змін у маркетинговій стратегії, є основним чинником, що визначає його рішення. Така реакція може впливати на рівновагу олігополістичних ринків.

Сьогодні відома достатньо велика кількість моделей, які описують поведінку фірм на олігополістичному ринку.

Олігополістичні ринки розрізняють за тією ознакою, чи діють їхні учасники — олігополісти цілком незалежно один від одного, на свій страх і ризик, чи, навпаки, вступають в змову, яка може бути явною, відкритою або таємною, закритою. В першому випадку, зазвичай, говорять про некооперативну олігополію (*noncooperative oligopoly*), а в другому — про кооперативну (*cooperative oligopoly*), однією із форм якої є картель [1].

Очевидно, що при аналізі поведінки олігополістів, які діють цілком незалежно один від одного, тобто у випадку некооперативної олігополії, вирішальне значення мають відмінності в припущеннях відносно реакції суперників. В залежності від того, що саме вибирає олігополіст керуючою змінною — величину випуску чи ціну — розрізняють олігополію підприємств, які встановлюють величину випуску, або просто кількісну олігополію і олігополію підприємств, які встановлюють ціну, або цінову олігополію.

Існують моделі кількісної олігополії Курно (*Antoine-Augustin Cournot, 1838 р.*) і Чемберлена (*Edward Hastings Chamberlin*), а також модель Штакельберга (*Heinrich von Stackelberg*), яка пропонує асиметричну поведінку олігополістів та моделі цінової олігополії Бертрана (*Joseph Louis Francois Bertrand*), Еджуорта (*Francis Ysidro Edgeworth, 1925 р.*) і Свізі (*Paul Sweezy*) [2]. Серед моделей олігополії, в яких підприємства співпрацюють з метою максимізації прибутків (кооперативна олігополія) виділяють картелі (*kartel*) та моделі цінового лідерства. Розрізняють картелі двох типів: картелі, які максимізують спільний прибуток (централізований) та картелі, які ділять між собою ринок. Серед моделей цінового лідерства виділяють модель домінуючої фірми та модель з низькими витратами.

В моделі олігополії Курно кожне підприємство вважає обсяг продукції інших підприємств за заданий. Натомість ціну визначає ринок. В моделі олігополії Бертрана усі підприємства за задані вважають ціни, встановлені конкурентами. Отже, ціну визначає продавець. Спільним є те, що в обох моделях маємо справу із грою. Результатом гри є так звана рівновага Неша — збір стратегій (тобто, обсягів продукції у випадку олігополії Курно або цін, встановлених окремими фірмами у випадку моделі Бертрана) з такою властивістю, що жодному з гравців (тобто фірм на ринку) невигідно змінювати своєї стратегії.

Зупинимося на моделях, в яких стратегіями гравців є маніпулювання обсягами виробництва. Розглянемо модель Курно, з якої починалася сучасна теорія олігополії. Її базова модель була запропонована у 1838 році французьким математиком та економістом Антуаном Огюстеном Курно (*Augustin Cournot, Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des richesses, 1838*), який у своїй роботі поставив проблему олігополістичної взаємозалежності і необхідності кожній фірмі при визначенні своєї ринкової стратегії приймати до уваги поведінку конкурентів [3]. Курно розглядав дуополію, тобто ситуацію, коли на ринку є лише дві фірми. У цій моделі припускається, що обидві фірми виробляють стандартизований продукт (з такими самими параметрами) і знають криву ринкового попиту. На основі цього кожна фірма визначає свої обсяги виробництва, беручи до уваги, що її конкурент також прийматиме рішення щодо власних обсягів випуску аналогічного продукту. Причому кінцева ціна продукту залежатиме від загального обсягу виробництва продукції (обох фірм разом), яка потрапить на ринок. Тобто, запрацює механізм встановлення ринкової рівноваги, який залежить від ринкового попиту та загальної пропозиції товару на даному ринку.

Суть моделі Курно полягає у тому, що: кожна фірма приймає обсяг виробництва свого конкурента постійним; виходячи з цих даних та інформації про ринковий попит на даний продукт, приймає власне рішення щодо встановлення таких обсягів його виробництва, які б забезпечували максимальний прибуток (на основі дотримання правила рівності граничного доходу і граничних витрат). Отже, основна задача даної моделі — визначити, при якому обсягу випуску продукції обидві фірми досягають рівноваги.

Як уже згадувалося, модель Курно — це модель одночасної кількісної конкуренції. Її можна проаналізувати за допомогою одноразової гри при недосконалій інформації. У цій грі фірми встановлюють обсяг (кількість) продукції, а ринок встановлює спільну ціну на такому рівні, який врівноважує попит з пропозицією. Доступними для кожної фірми стратегіями є різні кількості товару, який вона може виробляти (і продавати). В момент встановлення обсягу продукції фірма не має інформації про рішення іншої фірми щодо обсягів випуску даного продукту.

У даній моделі олігополії припускається, що процес регулювання випуску Курно повинен бути хаотичним, оскільки функції реакції є немонотонними. Цей результат був виключно математичним, без істотного економічного підґрунтя, доки Пу (*Tonu Puu*) [4] не передбачив один тип економічних умов — ізоеластичний попит з різними постійними граничними витратами, під якими були розвинуті багатозначні функції реакції. Відтоді багатьма економістами були розроблені різні їх модифікації. Зокрема, Россер (*B. Rosser*) у статті [5] зробив аналітичний огляд теоретичного розвитку складної динаміки олігополії.

Найбільш вивченою для моделі Курно-Пу (*Cournot-Puu model*) є ситуація дуополії (*duopoly*), коли на ринку є лише дві фірми. Значну увагу приділено саме дослідженню керування хаосом, який виникає з даної моделі. Деякі методи, такі як DFC-метод [6], OGY-метод контролю хаосу, метод розміщення полюса [7] були застосовані до моделі Курно-Пу. Але дослідження олігополістичного ринку лише на випадок дуополії є досить обмеженим, а тому природньо постає питання побудови узагальненої моделі, що і зроблено в даній роботі. Деякі аспекти нелінійної моделі олігополії на випадок N фірм розглянуто в роботі [8].

В даній роботі розглянуто узагальнену модель олігополії Курно-Пу і введено поняття рівноваги Курно. Вагомим результатом тут є встановлення умов, за яких точка рівноваги є стійкою.

1. Узагальнена модель Курно-Пу

Для побудови моделі потрібно чітко описати поведінку учасників ринку: мотиви їхньої поведінки, умови перебування на ринку та обмеження, з якими вони стикаються.

Позначимо фірми-олігополісти через $F_1, F_2, \ldots, F_n$, обсяги випуску продукції кожної складають $q_1, q_2, \ldots, q_n$ відповідно. Введемо припущення Курно та Пу, щоб отримати вигляд функцій реакції.

Узагальнене припущення Курно полягає у тому, що кожна i-та (i=1,2,..., n) фірма очікує від свого j-го конкурента (j=1,2,...,n, $j \neq i$) пропозиції такого обсягу продажу продукту в поточний період, як і в попередньому періоді.

Згідно з цим припущенням, загальні функції реакції кожної з фірм будуть такими:

$$\begin{array}{l} q_1(t+1) = f_1(q_2(t),\ q_3(t), \ldots,\ q_n(t)), \\ q_2(t+1) = f_2(q_1(t),\ q_3(t), \ldots,\ q_n(t)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n(t+1) = f_n(q_1(t),\ q_2(t), \ldots,\ q_{n-1}(t)). \end{array}$$

Функція реакції — це крива, яка показує обсяг продукції виробленої одним виробником при кожному заданому обсязі виробництва іншого виробника. Сукупність точок на кривій реакції показує, якою буде реакція однієї із фірм (при виборі обсягу власного випуску) на рішення інших фірм відносно величини їхнього випуску. Отже, кожна із функцій $q_i(t+1)$ — це крива реакції i-ого олігополіста на обсяги випуску, запропоновані іншими олігополістами.

Узагальнені припущення Пу полягають у тому, що

1. Ринковий попит є ізоеластичним, тобто ціна p відповідає повному попиту q, тобто $p = 1/q$.

2. Товари є взаємозамінними так, що попит дорівнює постачанню (пропозиції), тобто $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

3. Конкуренти мають сталі, але різні граничні витрати. Позначимо їх через c_i , $i = 1, \ldots, n$.

Базуючись на даних припущеннях, дохід фірми F_i (i=1,2,...,n) можна подати у такому вигляді

$$U_i\left(t+1\right) = \frac{q_i\left(t+1\right)}{q_i\left(t+1\right) + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} q_j\left(t\right)} - c_i q_i\left(t+1\right).$$

Кожна із фірм бажає досягти такого обсягу випуску, який би максимізував її дохід:

$$\frac{\partial U_i\left(t+1\right)}{\partial q_i\left(t+1\right)}=\frac{q_i\left(t+1\right)+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right)-\left(1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\partial q_j\left(t\right)}{\partial q_i\left(t+1\right)}\right)q_i\left(t+1\right)}{\left(q_i\left(t+1\right)+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right)\right)^2}-$$

$$-c_i=0.$$

Звідси, враховуючи припущення Курно про те, що

$$\frac{\partial q_j\left(t\right)}{\partial q_i\left(t+1\right)}=0,\quad i\neq j,$$

отримаємо

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right)-c_i\left[q_i\left(t+1\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right)\right]^2=0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Розв'язки системи рівнянь (1) — це функції реакції для фірм F_1,F_2,…,F_n. Тобто матимемо систему таких рівнянь:

$$q_i\left(t+1\right)=\sqrt{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{q_j\left(t\right)}{c_i}}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Щоб знайти точки рівноваги, потрібно розв'язати систему (2). Ми отримаємо дві рівноважні точки: тривіальну $(\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$ і нетривіальну $(q_1^*,\ldots,q_n^*)$. Всі дослідження стосуватимуться надалі лише нетривіальної точки, яку називають точкою рівноваги Курно (*Cournot equilibrium*) або точкою рівноваги Неша (*Nash equilibrium*).

Рівновага Курно — це точка перетину функцій реакції кожної із фірм F_i (i=1,2,…,n) на дії конкурентів. Ця точка також визначає таку кількість продукції, яку невигідно змінювати жодній із фірм.

Знайдемо значення точки рівноваги.

Оскільки загальний обсяг виробництва можна описати у вигляді

$$q=q_i+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j,$$

а із системи (2) за умов стаціонарності отримуємо

$$q_i^*+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j^*=\sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}q_j^*}{c_i}},$$

тоді маємо

$$q^* = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} q_j^*}{c_i}}$$

або

$$q^{*2} c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j^*.$$

Отже,

$$q_i^* = q^* - q^{*2} c_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Просумувавши всі q_i^*, отримаємо

$$q^* = n q^* - q^{*2} \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Звідси отримаємо нетривіальний розв'язок

$$q^* = \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}.$$

Підставивши отримане значення q^* у вираз (3), отримаємо значення $q_i^*, \quad i = \overline{1, n}$,

$$q_i^* = \frac{n-1}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} - c_i \left(\frac{n-1}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} \right)^2 = (n-1) \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j - (n-1) c_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \right)^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$q_i^* = (n-1) \frac{-(n-2) c_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} c_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \right)^2}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

2. Методика оцінки стійкості точки рівноваги Курно

Дослідимо стійкість точки рівноваги $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$. Для цього лінеаризуємо систему (2) в околі рівноважної точки. Введемо позначення:

$$\delta q_i(t) = q_i(t) - q_i^*, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

і перейдемо до відхилень:

$$\delta q_i\left(t+1\right)+q_i^*=\sqrt{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{q_j^*}{c_i}}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}q_j^*+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial q_i\left(t+1\right)}{\partial q_j\left(t\right)}\right]_{\left(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_n^*\right)}\cdot\delta q_j\left(t\right),\quad i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Лінеаризувавши систему (5), отримаємо

$$\delta q_i\left(t+1\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\frac{1}{2\sqrt{c_i\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}q_j\left(t\right)}}-1\right]_{\left(q_1^*,q_2^*,\ldots,q_n^*\right)}\cdot\delta q_j\left(t\right),\quad i=\overline{1,n}.$$

Підставимо значення рівноважної точки (4):

$$\delta q_i\left(t+1\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\frac{1}{2\sqrt{c_i\frac{\left(n-1\right)^2c_i}{\left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)^2}}}-1\right]\cdot\delta q_j\left(t\right),\quad i=\overline{1,n},$$

тобто

$$\delta q_i\left(t+1\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n-2\left(n-1\right)c_i}{2\left(n-1\right)c_i}\cdot\delta q_j\left(t\right),\quad i=\overline{1,n}.$$

Запишемо отриману систему в матричному вигляді:

$$\delta q\left(t+1\right)=J\cdot\delta q\left(t\right), \tag{6}$$

де

$$\delta q\left(t+1\right)=\left(\delta q_1\left(t+1\right),\delta q_2\left(t+1\right),\ldots,\delta q_n\left(t+1\right)\right)^T,$$

$$\delta q\left(t\right)=\left(\delta q_1\left(t\right),\delta q_2\left(t\right),\ldots,\delta q_n\left(t\right)\right)^T.$$

J — матриця Якобі лінеаризованої системи:

$$J=\begin{bmatrix} 0 & p_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_1 \\ p_2 & 0 & p_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_i & \ldots & \ldots & p_i & \underbrace{0}_{i\text{–та позиція}} & p_i & \ldots & p_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & p_n & 0 \end{bmatrix},$$

елементи p_i якої мають вигляд

$$p_i = \frac{c_1 + c_2 + ... + (3 - 2n)\, c_i + ... + c_n}{2\,(n-1)\, c_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Стійкість системи (6) обумовлюється характеристичним рівнянням

$$\det (J - \lambda I) = 0$$

або

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{7}$$

Як відомо [9], побудова аналітичного вигляду коефіцієнтів характеристичного полінома може бути здійснена за допомогою головних мінорів матриці Якобі J.

Коефіцієнт при λ^{n-1} дорівнює сліду матриці, взятого зі знаком мінус. Оскільки в нашому випадку всі діагональні елементи дорівнюють нулю, то

$$a_1 = -trJ = 0.$$

Вільний член a_n характеристичного многочлена (7) матриці Якобі J дорівнює визначнику цієї матриці, помноженому на $(-1)^n$, де n — порядок матриці. Отже,

$$a_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & p_1 & ... & p_1 \\ p_2 & 0 & ... & p_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ p_n & p_n & ... & 0 \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти $a_i,\ i = \overline{2, n-1}$, при $\lambda^m,\ m = \overline{n-2,\, 1}$, будуємо за формулою

$$a_i = (-1)^{n-m} \sum_{j=1}^{k} \Delta_j, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad m = n - i, \quad k = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!},$$

де $\Delta_j,\ j = \overline{1, k}$ — мінори матриці Якобі J порядку $n - m$, утворені шляхом викреслювання m рядків з номерами $i_1, i_2, ..., i_m$ та m стовпців з цими ж номерами.

За відомою теоремою фон Неймана точка рівноваги $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ є асимптотично стійкою, якщо для всіх власних значень λ матриці Якобі J виконується умова

$$|\lambda| < 1. \tag{8}$$

Розглянемо простір A всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння порядку n. Умова (8) визначає у цьому просторі геометричну область асимптотичної стійкості. Аналітичний опис цієї області стійкості може бути побудований за допомогою класичної процедури Рауса-Гурвіца (*classical Routh-Hurwitz procedure*) у вигляді нелінійних нерівностей. Ця процедура може бути описана таким чином [9].

Спершу побудуємо параметри

$b_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$, де $a_0 = 1$,
$b_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \left(n - 2i\right)$,
$\ldots$,

$$b_r = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k \binom{n-i}{r-k} \binom{i}{k}, \text{ де } \binom{i}{k} = \begin{cases} \frac{i!}{k!(i-k)!}, & i \geq k,\ k \geq 0, \\ 0, & i < k, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

$\ldots$,
$b_n = 1 - a_1 + a_2 - ... + \left(-1\right)^{n-1} a_{n-1} + \left(-1\right)^n a_n.$

Далі будуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & ... & ... & ... \\ b_0 & b_2 & b_4 & ... & ... & ... \\ 0 & b_1 & b_3 & ... & ... & ... \\ 0 & b_0 & b_2 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

і її головні мінори Δ_r, $r = \overline{1,n}$, порядку r, що побудовані із перших r стовпців та перших r рядків верхнього лівого кутка даної матриці, тобто,

$$\Delta_1 = b_1,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix},$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$
$$...,$$
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & ... \\ b_0 & b_2 & b_4 & ... \\ 0 & b_1 & b_3 & ... \\ 0 & b_0 & b_2 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}.$$

Умовами асимптотичної стійкості є

$$b_0 > 0, \quad \Delta_r > 0, \quad r = 1, 2, ..., n,$$

і межі області стійкості в просторі A визначаються за допомогою описаної вище процедури Рауса-Гурвіца у вигляді нелінійних рівностей

$$b_0 = 0, \quad \Delta_r = 0, \quad r = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

На межах (9) абсолютні значення деяких власних значень матриці Якобі дорівнюють 1, а також є безліч різних біфуркаційних явищ [9].

Детальний опис процедури Рауса-Гурвіца для дво- та тривимірного випадку, а також геометрична побудова області стійкості розглянуто у роботах М. Соніса (*M. Sonis*) [9, 10].

Висновки

Управління фінансовими ринками та економічними процесами є одним із найважливіших завдань, що стоять перед менеджерами фірм, економістами та творцями економічної політики в уряді сьогодні.

У даній роботі модель дуополії Курно-Пу узагальнено на випадок присутності на олігополістичному ринку N фірм. Вважається, що кожна з фірм-олігополістів виробляє таку саму, стандартну продукцію, яку змушена продавати по тій самій ціні (встановленій на основі розмірів загальної продукції у галузі). На цьому ринку кожна окрема фірма може (за таких умов) через своє рішення щодо обсягів власного випуску впливати на загальний обсяг продукції і, тим самим, на її ринкову ціну. Окрім того, кожна із фірм характеризується функцією оптимальної реакції. Дана функція описує оптимальний обсяг продукції (такий, що максимізує прибуток) однієї фірми в залежності від рішення щодо обсягу продукції інших фірм.

Побудована модель є системою нелінійних рівнянь, яка має як тривіальну, так і нетривіальну точки рівноваги. Нетривіальна точка рівноваги — це рівновага Курно (Неша). В умовах такого типу рівноваги кожне підприємство приймає таке рішення (реалізує стратегію), яке дає змогу максимізувати його прибуток, передбачаючи таку саму поведінку конкурента. В умовах олігополії рівновага наступає при нижчій ціні, більшій продукції і меншому загальному прибутку у порівнянні з чистою монополією. Зважаючи на два перші параметри (нижчу ціну і більшу продукцію), олігополію можна вважати кращим варіантом для ринкової економіки ніж монополія.

Процес дослідження стійкості точки рівноваги Курно у випадку олігополії є достатньо трудомісткою задачею і потребує потужного пакету математичних програм. А це і є альтернативою подальших досліджень.

Література

1. Мицель И. И. Модели олигополии / И. И. Мицель, С. В. Козлов // Известия Томского политехнического университета. — 2007. — Т. 311. — № 6. — С. 4–8.
2. Гальперин В. М. Микроэкономика. Т. 2. / В. М. Гальперин. — С.Пб.: Экономическая школа, 1999. — 843 с.
3. Puu T. Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics / T. Puu. — New-York: Springer, 2000.
4. Puu T. Chaos in duopoly pricing / T. Puu // Chaos, Solitons and Fractals. — 1991. — V. 6. – № 1. – P. 573–581.
5. Rosser B. The development of complex oligopoly dynamic theory / B. Rosser. — Режим доступу: http://www.belairsky.com/coolbit/econophys/complexoligopy.pdf.
6. Chen L. Controlling chaos in an economic model / L. Chen, G. Chen // Physica A. — 2007. — № 374. — P. 349–358.

7. Matsumoto A. Controlling the Cournot–Nash chaos / A. Matsumoto // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2006. — № 128. — P. 379–392.
8. Matsumoto A. Stability, Bifurcation, and Chaos in N-Firm Nonlinear Cournot Games / A. Matsumoto, F. Szidarovszky // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2011.
9. Sonis M. Linear Bifurcation Analysis with Applications to Relative Socio-Spatial Dynamics / M. Sonis // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 1997. — V. 1. — P. 45–56.
10. Sonis M. Critical Bifurcation Surfaces of 3D Discrete Dynamics / M. Sonis // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2000. — V. 4. — P. 333–343.

Кафедра прикладної математики, Інститут прикладної математики та фундаментальних наук, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна.

Надійшла 05.09.2012